

$$\begin{aligned} \phi_z^+ |P_1\rangle &= \int \frac{d^3 P_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{P_2}}} \underbrace{a_{P_2} e^{+iP_2 z}}_{\text{comut.}} \sqrt{2E_{P_1}} a_{P_1}^+ |0\rangle = \\ &= \int \frac{d^3 P_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{P_2}}} e^{+iP_2 z} \sqrt{2E_{P_1}} (2\pi)^3 \delta(P_2 - P_1) |0\rangle = \underbrace{e^{+iP_1 z}}_{\sim e^{-1E_{P_1}(z^0 - z_1^0)}} |0\rangle \end{aligned} \quad (\text{eq. 64.1})$$

Da mesma forma:

$$\langle P_3 | \phi_z = \langle 0 | e^{-iP_3 z} \quad (\text{eq. 64.2})$$

(partícula indo para um tempo posterior a  $z^0$ )

(partícula vinda de um tempo anterior a  $z^0$ )

O que nos mostra que cada linha externa contrinuirá com:



Ainda resta a integral em z:

$$= \frac{(-i\lambda)}{4!} \int d^4 z e^{+ip_1 z} e^{+ip_2 z} e^{-ip_3 z} e^{-ip_4 z} =$$

4! formas de fazer isto

$$= \frac{(-i\lambda)}{4!} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)$$

contribuição do vértice (a integração na posição do vértice garantiu conservação de momento no mesmo)

No caso de um diagrama mais complicado:

$$= \langle P_3 P_4 | \underbrace{\left( \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4 z_1 \phi_{z_1} \phi_{z_1} \phi_{z_1} \phi_{z_1} \right)}_{4.3} \underbrace{\left( \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4 z_2 \phi_{z_2} \phi_{z_2} \phi_{z_2} \phi_{z_2} \right)}_2 | P_1 P_2 \rangle =$$

$$= \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int d^4 z_1 d^4 z_2 \int \frac{d^4 k_1 d^4 k_2}{(2\pi)^8} D_F(k_1) D_F(k_2) e^{i k_1^0 (\delta_1 - \delta_2)} e^{i k_2^0 (\delta_2 - \delta_1)} e^{+i P_1 z_1} e^{+i P_2 z_1} e^{-i P_3 z_2} e^{-i P_4 z_2}$$

fator de simetria      propagadores      linhas externas

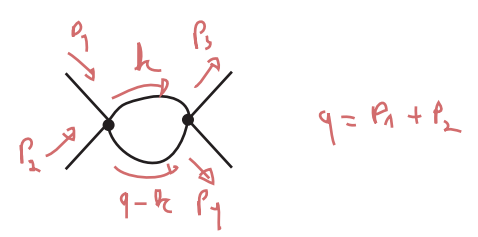
$$= \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \underbrace{d^4 k_1}_{k_1 = k} d^4 k_2 \underbrace{\delta^4(+P_1 + P_2 - k_1 - k_2)}_{P_1 + P_2 = q} \delta^4(+k_1 + k_2 - P_3 - P_4) D_F(k_1) D_F(k_2)$$

$\delta^4(-k_2 + (q - k))$

$$= \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int d^4k \delta^4(+k + (q-k) - p_3 - p_4) D_F(k) D_F(q-k) =$$

$$= \frac{(-i\lambda)^2 (2\pi)^4}{2} \delta^4(-p_3 - p_4 + p_1 + p_2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_F(k) D_F(p_1 + p_2 - k)$$

↳ mais tarde ficará claro porque queremos isto em evidência



Podemos então escrever as regras para obter diretamente a expressão no espaço dos momentos:

- (1) para cada propagador de momento p: =  $D_F(p) = \frac{-i}{p^2 + m^2 - i\epsilon}$
- (2) para cada vértice: =  $-i\lambda$
- (3) para linha externa: = 1
- (4) imponha conservação de momento em cada vértice (re-escrevendo os momentos internos)
- (5) integre sobre cada momento não determinado:  $\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$
- (6) divida pelo fator de simetria
- (7) multiplique por:  $(2\pi)^4 \delta^4(\sum p_{\alpha})$  → momentos externos

Regras (provisórias) de Feynman de  $\lambda\phi^4$  no espaço dos momentos (eq. 65.1)

Mais alguns exemplos:

$$= (2\pi)^4 \delta(p_1 - p_2) \frac{(-i\lambda)}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_F(k)$$

$$= (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_F(k) D_F(q-k)$$

$q = p_1 - p_3$

Conservação nos vértices:  $p_1 = p_3 + k_2 + k$   
 $p_2 + k_2 + k_1 = p_1$   
 $p_1 - p_3 = q = p_1 - p_3 = k_2 + k$   
 $k_2 = q - k$

Com isso temos um conjunto de regras completo para calcular estes produtos temporalmente ordenados, mas cabem alguns comentários para amarrar as pontas soltas. Primeiramente note que, na eq. 55.1, estamos dizendo que todos estes correlatores serão calculados para:

$$T \rightarrow \infty (1 - i\epsilon)$$

(eq. 55.1)

$$\lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \{ \prod_I \psi(x_i) \dots \prod_I \psi(x_n) \text{Exp}[-i \int_{-T}^T dt H_{\text{int}}(t)] \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ \text{Exp}[-i \int_{-T}^T dt H_{\text{int}}(t)] \} | 0 \rangle}$$

Isto significa que todas as integrais dos vértices não vão ser simples integrais em  $d^4z$ , mas sim:

$$\lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \int_{-T}^T d^3z \int d^3z e^{-i(p_1 + \dots + p_n)z} \propto \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ e^{i(p_1 + \dots + p_n)^0 (T - \lambda \epsilon T)} - e^{i(p_1 + \dots + p_n)^0 (-T + \lambda \epsilon T)} \right]$$

$$\propto \lim_{T \rightarrow \infty} \left( e^{+\epsilon(p_1 + \dots + p_n)^0 T} - e^{-\epsilon(p_1 + \dots + p_n)^0 T} \right)$$

Uma destas exponenciais explode (qual delas depende do sinal de  $q^0$ )

Para resolver isto podemos impor que  $q^0$  tenha uma parte imaginária (também pequena e proporcional a  $\epsilon$ ) porque então:

$$q^0 \rightarrow q^0(1+i\epsilon) \Rightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} e^{i q^0 (\pm T \mp \lambda \epsilon T)} \rightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} \text{Exp} \left[ q^0 (\pm i T \pm \epsilon T \mp T \epsilon \pm i \epsilon^2 T) \right]$$

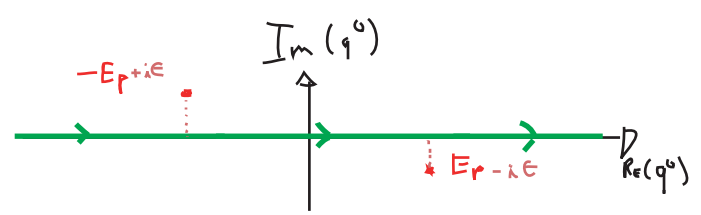
oscilatória

De fato isto é totalmente consistente com o que já vínhamos fazendo, pense de onde vêm estas exponenciais dentro das integrais dos vértices:

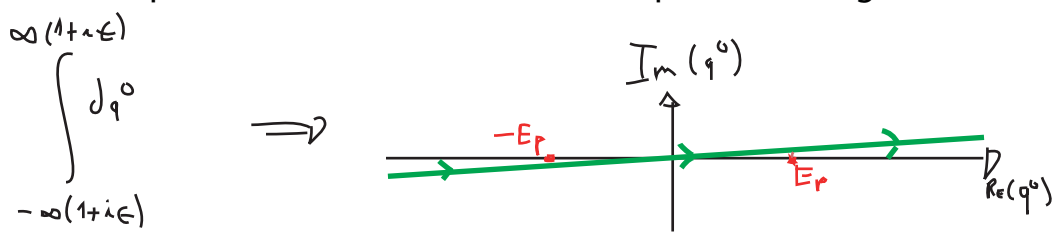
- (1) De linha externas (veja eqs. 64.1 e 64.2): neste caso não há restrição alguma sobre os momentos e podemos tomá-los imaginários e, depois de integrar, tomar o limite  $\epsilon \rightarrow 0$
- (2) Dos propagadores de Feynman (veja, por exemplo, a expressão do diagrama na segunda metade da pg 64). Neste caso devemos lembrar que o propagador no espaço dos momentos é:

$$D_F(q) = \frac{-i}{q^2 + m^2 - i\epsilon}$$

e que  $q^0$  está sendo integrado no caminho (pg 46):



acontece que isto é exatamente o mesmo que fazer o seguinte caminho:



o que dá para  $q^0$  exatamente a parte imaginária de que precisávamos. Isto mostra que o aparecimen-

to dos propagadores de Feynman no teorema de Wick não é uma coincidência, mas está intrinsecamente ligado ao limite que tomamos no tempo para poder projetar o vácuo livre da teoria no vácuo da teoria completa na página 52. Aqui podemos finalmente entender porque escolhemos, na definição do propagador de Feynman (eq 46.1), os polos  $E_p$  e  $-E_p$  respectivamente abaixo e acima do eixo real, a escolha contrária geraria divergências aqui.

Ignoramos outros dois pontos importantes, um deles está relacionado a "bolhas no vácuo". Considere os dois dos diagramas de ordem  $\mathcal{L}^2$  para a função de dois pontos no fim da página 62:

(A)

$$= \frac{(-i\lambda)^2}{4} \int d^4y_1 d^4y_2 D_F(x_1 - y_1) D_F(y_1 - x_2) D_F^2(y_1 - y_2) D_F(y_2 - y_2)$$

(B)

$$= \frac{(-i\lambda)^2}{16} \int d^4y_1 d^4y_2 D_F(x_1 - y_1) D_F(y_1 - x_2) D_F(y_1 - y_2) D_F^2(y_2 - y_2)$$

(A)

$$= \frac{(-i\lambda)^2}{4} \int d^4y_1 d^4y_2 e^{-i y_1 p_1} e^{+i y_2 p_2} \int \frac{d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3}{(2\pi)^{12}} D_F(k_1) D_F(k_2) D_F(k_3) e^{i k_1 (y_1 - y_2)} e^{i k_2 (y_1 - y_2)} =$$

$$= \frac{(-i\lambda)^2}{4} \int \frac{d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3}{(2\pi)^4} \delta^4(-p_1 + p_2 + k_1 + k_2) \delta^4(k_1 + k_2) D_F(k_1) D_F(k_2) D_F(k_3) =$$

$$= \frac{(-i\lambda)^2}{4} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_F(k) D_F(-k) \int \frac{d^4k_3}{(2\pi)^4} D_F(k_3)$$

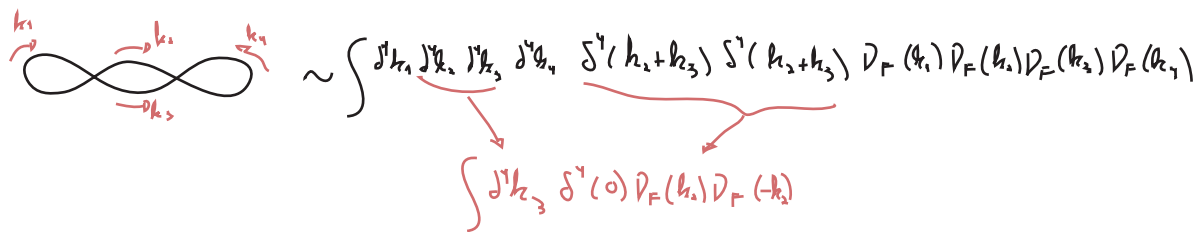
(B)

$$= \frac{(-i\lambda)^2}{16} \int d^4y_1 d^4y_2 e^{-i y_1 p_1} e^{+i y_2 p_2} \int \frac{d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3}{(2\pi)^{12}} D_F(k_1) D_F(k_2) D_F(k_3) e^{i k_1 \cdot 0} e^{i k_2 \cdot 0} e^{i k_3 \cdot 0} =$$

$$= \frac{(-i\lambda)^2}{16} \int \frac{d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3}{(2\pi)^8} \delta^4(-p_1 + p_2) D_F(k_1) D_F(k_2) D_F(k_3) \underbrace{\int d^4y_2}_{(2T) \cdot V = \infty}$$

$(2\pi)^4 \delta(0)$

Isto sempre vai acontecer com diagramas desconectados de linhas externas (as tais bolhas no vácuo):



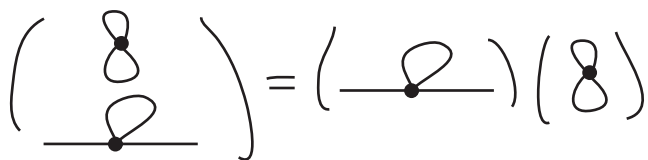
$$\sim \int d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3 d^4k_4 \delta^4(k_2+k_3) \delta^4(k_2+k_3) D_F(k_1) D_F(k_2) D_F(k_3) D_F(k_4)$$

$$\int d^4k_3 \delta^4(0) D_F(k_2) D_F(-k_2)$$

O outro detalhe que ignoramos foi o denominador de 55.1:

$$\langle 0 | T \left\{ \text{Exp} \left[ -i \int_T dt H_{\text{int}}(t) \right] \right\} | 0 \rangle$$

Que de fato só contém bolhas (note que ele não depende de nenhum dos pontos externos, que vão todos no numerador). Para ver como os dois problemas se resolvem, basta notar que podemos separar as bolhas da parte **conectada a linhas externas** do diagrama:



$$\left( \text{diagram with bubble on line} \right) = \left( \text{line with bubble} \right) \left( \text{bubble} \right)$$

$$\frac{(-i\lambda)^2}{16} \int \frac{d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3}{(2\pi)^8} \delta^4(-p_1+p_2) D_F(k_1) D_F(k_2) D_F(k_3) (2\pi)^4 \delta(0) =$$

$$= \left[ \frac{(-i\lambda)}{2} (2\pi)^4 \delta^4(p_1-p_2) \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} D_F(k_1) \right] \left[ \frac{(-i\lambda)}{8} (2\pi)^4 \delta(0) \int \frac{d^4k_2 d^4k_3}{(2\pi)^8} D_F(k_2) D_F(k_3) \right]$$

O numerador vai conter justamente diagramas conectados as pernas externas multiplicados por uma soma de todas as bolhas possíveis. Por exemplo, no caso de dois pontos:

$$\langle 0 | T \left\{ \phi_1 \phi_2 \text{Exp} \left[ -i \int_T dt H_{\text{int}}(t) \right] \right\} | 0 \rangle = \left( x_1 \text{---} x_2 \right) \left( 1 + \underbrace{\text{bubble}}_{\mathcal{O}(\lambda^2)} + \underbrace{\text{two bubbles}}_{\mathcal{O}(\lambda^4)} + \underbrace{\text{three bubbles}}_{\mathcal{O}(\lambda^6)} + \underbrace{\text{four bubbles}}_{\mathcal{O}(\lambda^8)} + \dots \right) +$$

$$+ \left( x_1 \text{---} \text{bubble} \text{---} x_2 \right) \left( 1 + \underbrace{\text{bubble}}_{\mathcal{O}(\lambda^2)} + \underbrace{\text{two bubbles}}_{\mathcal{O}(\lambda^4)} + \underbrace{\text{three bubbles}}_{\mathcal{O}(\lambda^6)} + \underbrace{\text{four bubbles}}_{\mathcal{O}(\lambda^8)} + \dots \right) + \dots$$

$$\left( \underbrace{\text{bubble}}_{V_1} + \underbrace{\text{two bubbles}}_{V_2} + \underbrace{\text{three bubbles}}_{\frac{1}{2!} (V_1)^2} + \underbrace{\text{four bubbles}}_{V_3} + \frac{1}{3!} V_1^3 + V_1 V_2 + V_1 V_3 + \frac{V_1^4}{4!} + \frac{V_2^2}{2!} + \frac{V_1^2 V_2}{2!} + \dots \right)$$

$\frac{1}{2!} \rightarrow$  fator de simetria

Qualquer diagrama específico nesta longa soma vai ser portanto da forma:

$$\left( \text{diagrama conectado} \right) \cdot \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n_i!} (V_i)^{n_i} \dots \left( \text{diagram with two bubbles and a line} \right) \rightarrow \begin{matrix} n_1=2 \\ n_2=0 \\ n_3=1 \end{matrix} \rightarrow \{n_i\} = \{2, 0, 1, 0, 0, \dots\}$$

$$\begin{aligned} \therefore \langle 0|T\{\phi_1\phi_2\text{Exp}[-i\int_{-T}^T dt H_{\text{I}}(t)]\}|0\rangle &= \sum_{\text{conectados}} \left\{ \sum_{\{n_i\}} (\text{diagrama conectado}) \prod_i \frac{1}{n_i!} (V_i)^{n_i} \right\} = \\ &\quad \text{incluindo } \{0,0,0, \dots\} \\ &= \sum_{\text{conectados}} (\text{diagrama conectado}) \cdot \sum_{\{n_i\}} \left( \prod_i \frac{1}{n_i!} (V_i)^{n_i} \right) = \\ &\quad \left( 1 + V_1 + V_2 + V_3 + \frac{1}{2!} V_1^2 + V_3 + \frac{1}{3!} V_1^3 + V_1 V_2 + V_1 V_3 + \frac{V_1^2 V_2}{2!} + \dots = \left( 1 + V_1 + \frac{V_1^2}{2!} + \dots \right) \left( 1 + V_2 + \frac{V_2^2}{2!} + \dots \right) \dots \right) \\ &= \sum_{\text{conectados}} (\text{diagrama conectado}) \cdot \left( \sum_{n_1} \frac{1}{n_1!} (V_1)^{n_1} \right) \left( \sum_{n_2} \frac{1}{n_2!} (V_2)^{n_2} \right) \left( \sum_{n_3} \frac{1}{n_3!} (V_3)^{n_3} \right) \dots = \\ &= \sum_{\text{conectados}} (\text{diagrama conectado}) \prod_{i=1} \left( \sum_{n_i} \frac{1}{n_i!} (V_i)^{n_i} \right) = \sum_{\text{conectados}} (\text{diagrama conectado}) \prod_{i=1} e^{V_i} \end{aligned}$$

$$\langle 0|T\{\phi_1\phi_2\text{Exp}[-i\int_{-T}^T dt H_{\text{I}}(t)]\}|0\rangle = \sum_{\text{conectados}} (\text{diagrama conectado}) e^{\sum_i V_i} \quad (\text{eq. 69.1})$$

$$\langle 0|T\{\phi_1\phi_2\text{Exp}[-i\int_{-T}^T dt H_{\text{I}}(t)]\}|0\rangle = \left( x_1 \text{---} x_2 + x_1 \text{---} \bigcirc \text{---} x_2 + x_1 \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} x_2 + \dots \right) \times \text{Exp} \left[ \bigcirc + \bigcirc + \bigcirc + \dots \right]$$

Claramente o mesmo vale para funções de mais pontos (aumentar o número de pontos externos só torna os diagramas conectados mais complicados, a soma das bolhas fica a mesma.

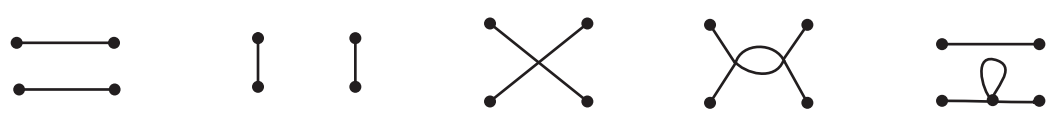
No caso do denominador, a lógica é a mesma, só que não há diagramas desconectados:

$$\langle 0|T\{\text{Exp}[-i\int_{-T}^T dt H_{\text{I}}(t)]\}|0\rangle = \underbrace{\langle 0|0\rangle}_1 \text{Exp} \left[ \bigcirc + \bigcirc + \bigcirc + \dots \right]$$

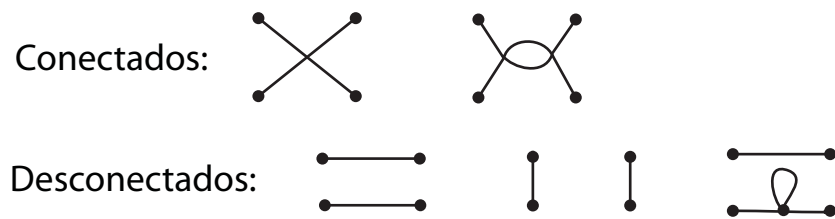
Logo a exponencial das bolhas é cancelada entre numerador e denominador, fazendo:

$$\langle \Omega|T\{\phi_H(x_1)\dots\phi_H(x_n)\}|\Omega\rangle = \sum_{\substack{\text{diagrama} \\ \text{conectado} \\ \text{a linhas externas}}} (\text{diagrama conectado}) \quad (\text{eq. 69.2})$$

Uma observação final sobre notação, aqui usamos "diagramas conectados" para denominar diagramas que estejam ligados aos pontos externos, e.g.:



Usaremos, com muito mais frequência, uma outra definição para "conectado" - querendo dizer que o diagrama conecta todos os pontos externos entre si. Nesta nova definição, os diagramas acima ficam divididos entre:



Ambos conjuntos entram na soma da eq. 69.2, somente as bolhas do vácuo foram realmente canceladas pelo denominador.

Com estes resultados em mãos já conseguimos calcular quaisquer correlatores na teoria  $\lambda\phi^4$ . Daremos uns passos atrás para ver como obteríamos estes mesmos resultados usando a quantização por integrais de trajetória, passando antes por algum formalismo que será útil nesta quantização.

## O oscilador Harmônico forçado

(Nastase 7 e 8, Ramond 2.3)

Voltando ao mundo da Mecânica Quântica, vimos que podemos escrever amplitudes de transição na forma:

$$F(q', t', q, t) = \langle q', t' | q, t \rangle = \langle q' | e^{-iH(t'-t)} | q \rangle = \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p \exp \left\{ i \int_t^{t'} dt [p(\dot{q}) - H[p(t), q(t)]] \right\}$$

pg 18 eq. 20.1

$$H = \frac{p^2}{2} + V(q)$$

$$= \mathcal{N} \int \mathcal{D}q e^{iS[q]}$$

E também os correlatores:

$$G_N(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_N) = \langle q', t' | T \hat{q}(\bar{t}_1) \dots \hat{q}(\bar{t}_N) | q, t \rangle = \int \mathcal{D}q(t) e^{iS[q]} q(\bar{t}_1) \dots q(\bar{t}_N)$$

(eq. 25.3)

Vimos ainda que é possível obter qualquer correlator a partir do gerador funcional:

$$\mathcal{Z}[J] = \int \mathcal{D}q e^{iS[q; J]} = \int \mathcal{D}q e^{iS[q] + i \int dt q(t) J(t)}$$

simplesmente calculando:  $G_N(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_N) = \frac{\delta}{i \delta J(\bar{t}_1)} \dots \frac{\delta}{i \delta J(\bar{t}_N)} \mathcal{Z}[J] \Big|_{J=0}$