Usaremos, com muito mais frequência, uma outra definição para "conectado" - querendo dizer que o diagrama conecta todos os pontos externos entre si. Nesta nova definição, os diagramas acima ficam divididos entre:

Conectados: 

Desconectados: 

Ambos conjuntos entram na soma da eq. 69.2, somente as bolhas do vácuo foram realmente canceladas pelo denominador.

Com estes resultados em mãos já conseguimos calcular quaisquer correlatores na teoria $\lambda\phi^4$. Daremos uns passos atrás para ver como obteríamos estes mesmos resultados usando a quantização por integrais de trajetória, passando antes por algum formalismo que será útil nesta quantização.

O oscilador Harmônico forçado

(Nastase 7 e 8, Ramond 2.3)

Voltando ao mundo da Mecânica Quântica, vimos que podemos escrever amplitudes de transição na forma:

$$F(q',t';q,t) = \underbrace{\langle q',t'|q,t\rangle = \langle q'|e^{-iH(t'-t)}|q\rangle}_{\text{pg 18}} = \int \mathcal{D}q\,\mathcal{D}p\,\exp\left\{i\int_t^{t'}dt\left[p(t)\dot{q}(t) - H[p(t),q(t)]\right]\right\}$$

eq. 20.1

$$H = \frac{p^2}{2} + V(q)$$

$$= \mathcal{N}\int \mathcal{D}q\, e^{iS[q]}$$

E também os correlatores:

$$G_N(t_1,\ldots,t_N) = \langle q',t'|T\{\hat{q}(t_1)\ldots\hat{q}(t_N)\}|q,t\rangle = \int \mathcal{D}q(t)\, e^{iS[q]}\, q(t_1)\ldots q(t_N)$$

(eq. 25.3)

Vimos ainda que é possível obter qualquer correlator a partir do gerador funcional:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}q\, e^{iS[q;J]} = \int \mathcal{D}q\, e^{iS[q] + i\int dt\, q(t)J(t)}$$

simplesmente calculando: $$G_N(t_1,\ldots,t_N) = \frac{\delta}{i\delta J(t_1)}\cdots\frac{\delta}{i\delta J(t_N)} Z[J]\Big|_{J=0}$$

Neste procedimento, a função *J(t)* não passava de um artifício matemático, introduzida apenas para definir o funcional gerador e igualada a zero assim que possível. No entanto podemos nos perguntar o que acontece se não fizemos *J(t) = 0*. A ação definida com a inclusão do termo com *J* é:

$$S[q;J] = S[q] + \int dt\, J(t)\, q(t)$$

que, pelo princípio da extrema ação: $\frac{\delta S[q;J]}{\delta q} = \frac{\delta S[q]}{\delta q} + J(t) = 0$

Se $L(q) = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 - w^2 q^2) \Rightarrow \boxed{-w^2 q - \ddot{q} + J(t) = 0}$ (eq. 71.1)

Oscilador Harmônico Forçado

Note que *J(t)* é uma força externa ao sistema descrito por esta eq. de movimento, no sentido de que sua dinâmica não é influenciada pelo valor de *q(t)* (ou suas derivadas). Todo o comportamento desta "Fonte" é estabelecido a priori por fatores externos e o que resolvemos é a resposta do oscilador a isto. Neste sentido vemos que os correlatores da teoria descrevem o comportamento do sistema isolado, na ausência de fontes.

A ação $S[q;J] = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 - w^2 q^2) + qJ$ é quadrática em *q* e portanto podemos fazer a integral de trajetória usando o resultado da pg 22.1 para integrais gaussianas. Há, no entanto, um sutil problema ligado às condições de contorno de q(t), vamos primeiro fingir que não notamos este problema (ou de fato ser honestos a respeito):

$$S[q] = \int dt \left[\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{dq}{dt}\right)^2}_{} - \frac{w^2 q^2}{2} + Jq \right] = \int dt \left[-\frac{1}{2} q \left(\frac{d^2}{dt^2} + w^2 \right) q + Jq \right]$$

$$\int \frac{dq}{dt}\frac{dq}{dt} = \cancel{\int \frac{d}{dt}\left(q\frac{dq}{dt}\right)} - \int q \frac{d^2 q}{dt^2}$$

O que leva à integral de trajetória:

$$Z[J] = \int Dq\, \mathrm{EXP}\left\{ \left[-\frac{1}{2} q \cdot \Delta^{-1} q + i J \cdot q \right] \right\} \qquad \Delta^{-1} = i\left(\frac{d^2}{dt^2} + w^2\right)$$

$$\Rightarrow J \cdot q = \int dt\, J(t)\, q(t)$$

Comparando com 22.1:

$$\int d^n x\, e^{-\left(\frac{1}{2}\vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} + \vec{b}^T \cdot \vec{x}\right)} = (2\pi)^{n/2} (\mathrm{Det}\, A)^{-1/2} e^{\frac{1}{2}\vec{b}^T A^{-1} \vec{b}} \Rightarrow \begin{aligned} b &= -iJ(t) \\ A &= \Delta^{-1} \end{aligned}$$

$$Z[J] = \underbrace{N'}_{(\mathrm{Det}\,\Delta^{-1})^{-1/2}} e^{-\frac{1}{2} J\cdot\Delta\cdot J}$$

(não depende de J)

$$J\cdot\Delta\cdot J = \int dt \int dt'\, J(t)\, \Delta(t,t')\, J(t')$$

$$\Delta^{-1}\Delta(t,t') = i\left[\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right] \overbrace{i\int \frac{dp}{2\pi} \frac{e^{-ip(t-t')}}{p^2-\omega^2}}^{\text{ANSATZ P/ }\Delta} = \cancel{-}\int \frac{dp}{2\pi} \frac{\cancel{-p^2+\omega^2}}{\cancel{p^2-\omega^2}} e^{-ip(t-t')}$$

$$= \delta(t-t')$$

$$\boxed{\Delta(t,t') = i\int \frac{dp}{2\pi} \frac{e^{-ip(t-t')}}{p^2-\omega^2}} \quad \text{(eq. 72.1)}$$

No entanto temos uma singularidade aqui, que seria evitada (como fizemos antes) escolhendo caminhos apropriados no plano complexo.

Esta singularidade invalida a inversão que fizemos de Δ^{-1}? A pergunta só pode ser respondida pensando em que espaço de funções Δ^{-1} está agindo, pois neste caso podemos pensar no operador como uma matriz e ver que, se existem funções que satisfaçam:

$$\boxed{\left[\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right] q_0(t) = 0} \quad \text{(eq. 72.2)}$$

isto significa que o operador tem autovalores iguais a zero e é singular, não pode ser invertido! Para piorar, estes modos de autovalor zero são justamente as soluções clássicas do oscilador livre.

$$q_0(t) = C_\pm e^{\pm i\omega t}$$

Para conseguir inverter Δ^{-1}, portanto, precisamos excluir estas soluções do espaço em que Δ^{-1} está agindo, o que quer dizer que precisamos que elas não sejam varidas pela integral de trajetória. Lembre-se que para definir a intregral de trajetória, temos que também escolher os pontos inicial e final da trajetória, que estão fixos. Note ainda que a equação só tem soluções $q(t),\ t \in [t_i, t_f]$ não triviais se:

$$q(t_i) \neq 0$$

ou

$$q(t_f) \neq 0$$

$$q_0(t) = C_+ e^{i\omega t} + C_- e^{-i\omega t}$$

$$q_0(t_i) = 0 \Rightarrow \left(C_+ e^{i\omega t_i} + C_- e^{-i\omega t_i}\right) = 0$$

&

$$q_0(t_f) = 0 \Rightarrow \left(C_+ e^{i\omega t_f} + C_- e^{-i\omega t_f}\right) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (C_+ - C_-)\,\mathrm{sen}\left[\frac{\omega(t_f+t_i)}{2}\right] \cos\left[\frac{\omega(t_f-t_i)}{2}\right] = 0 \\ (C_+ + C_-)\cos\left[\frac{\omega(t_f+t_i)}{2}\right] \cos\left[\frac{\omega(t_f-t_i)}{2}\right] = 0 \end{array} \right.$$

$$\left.\begin{array}{l}\forall t_i \\ \forall t_f\end{array}\right\} \Rightarrow C_+ = C_- = 0$$

Vamos então fazer uma mudança de variável e escrever:

$$q(t) = q_{cl}(t) + \tilde{q}(t) \rightarrow \boxed{\tilde{q}(t_i) = \tilde{q}(t_f) = 0} \quad \text{(eq. 73.1)}$$

↳ Trajetória clássica, com condições de contorno não triviais

Do ponto de vista da integral de trajetória, mudar a integração de q para $\tilde{q}$ é o mesmo que uma mudança de variável dada pela adição de uma constante em uma integral usual, estamos apenas somando um caminho fixo. Então:

$$\int Dq\, e^{iS[q_{cl}(t)+\tilde{q};J]} = \int D\tilde{q}\, e^{iS[q_{cl}(t)+\tilde{q};J]}$$

De fato, isto decorre da definição da integral de trajetória de um modo trivial:

$$\prod_i dq_i = \prod_i d(\underbrace{q_i^{cl}}_{\text{número}} + \tilde{q}_i) = \prod_i d\tilde{q}_i$$

Lembrando que (pg 22), se acharmos um extremo q_0 de $S[q;J]$, podemos escrever:

$$\left.\begin{array}{l} S[q;J] = \frac{1}{2}Aq^2 + Jq \\ \left.\frac{\delta S}{\delta q}[q;J]\right|_{q=q_0} = 0 \end{array}\right\} = S[q_0;J] + \underbrace{\frac{1}{2}A(q-q_0)^2}_{\text{justamente a ação para J = 0}} = S[q_0;J] + S[q-q_0;0]$$

Acontece que q_{cl} é justamente um extremo da ação, de forma que:

$$\boxed{S[q;J] = S[q_{cl};J] + S[\overbrace{q-q_{cl}}^{\tilde{q}};0] \Rightarrow S[q;J] = S[q_{cl};J] + S[\tilde{q};0]} \quad \text{(eq. 73.2)}$$

$$\therefore \boxed{Z[J] = e^{iS[q_{cl};J]} \int D\tilde{q}\, e^{iS[\tilde{q};0]}} \quad \text{(eq. 73.3)}$$

esta integral agora está bem definida, mas não interessa o seu resultado pois ela independe de J e pode ser absorvida na constante que acompanha Z. O importante é que a Δ que vai parar no determinante é obtida invertendo o operador Δ^{-1} numa base em que não há modos com autovalor zero

$$\therefore \boxed{Z[J] = N e^{iS[q_{cl};J]}} \quad \text{(eq. 73.4)}$$

E a equação de movimento para q_{cl} é

$$\boxed{\Delta^{-1} q_{cl}(t;J) = iJ(t)}$$ (eq. 74.1)

E a solução:

$$q_{cl}(t;J) = \underbrace{q_{cl}(t;0)}_{\Delta^{-1} q_{cl}(t;0) = 0} + i(\Delta\cdot J)(t)$$

(estas são as funcões problemáticas que satisfazem a eq. 72.2 , posso inverter Δ porque ele agora age em $q_{cl}(t;J)$, o segundo termo acima conserta o problema)

Note que:

$$\frac{\delta_{FULL} S[q_{cl};J]}{\delta_{FULL} J(t)} = \int dt' \left[\underbrace{\left.\frac{\delta S}{\delta q(t')}\right|_{q=q_{cl}}}_{0\ (EOM)} \frac{\delta q_{cl}(t';J)}{\delta J(t)} + \underbrace{\frac{\delta S}{\delta J}}_{q_{cl}} \right] =$$

$$\int dJ \left(\frac{\delta_{FULL} S[q_{cl};J]}{\delta_{FULL} J(t)} = q_{cl}(t;J) = q_{cl}(t;0) + i(\Delta\cdot J)(t) \right)$$

$$S[q_{cl}(J);J] = \underbrace{S[q_{cl}(0);0]}_{CONST} + q_{cl}(0)\cdot J + \frac{i}{2} J\cdot\Delta\cdot J$$

cada produto escalar deste é uma integral em t (por isso suprimi as dep. em t)

$$\boxed{Z[J] = N e^{iS[q_{cl};J]} \underset{(eq.\ 73.4)}{=} N\, e^{-\frac{1}{2} J\cdot\Delta\cdot J + i q_{cl}(0)\cdot J}}$$ (eq. 74.2)

Ainda resta saber qual é a forma deste Δ quais condições de contorno usamos para $q_{cl}(t;J)$ na eq. 74.1

Uma opção que temos para evitar os polos em 72.2 é tirá-los do eixo real, faremos isto segundo a prescrição:

$$\boxed{\omega^2 \to \omega^2 - i\epsilon}$$ (eq. 74.3)

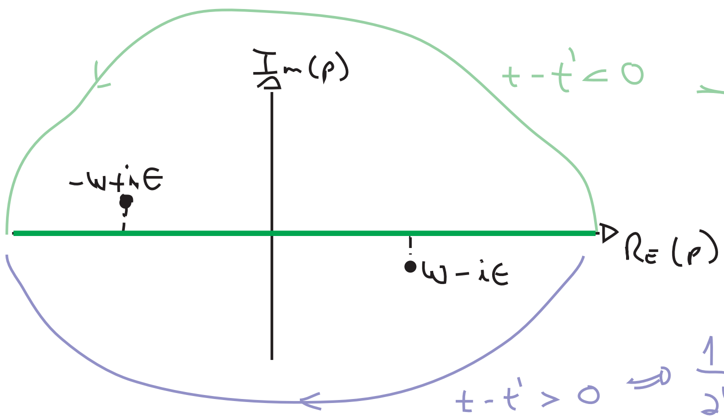
$$\Delta_F(t,t') = i\int \frac{dp}{2\pi} \frac{e^{-ip(t-t')}}{p^2-\omega^2+i\epsilon}$$

polos em:

$p = \pm(\omega - i\epsilon)$

que obviamente não é inocente, compare com o propagador de Feynman na eq. 46.1 e note que estamos fazendo uma "teoria de campos" com 0 dimensões espaciais e uma temporal:

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-i}{\underbrace{p^2+m^2-i\epsilon}_{-(p^0)^2+\underbrace{\vec{p}^2+m^2}_{\omega^2}-i\epsilon}} e^{ip(x-y)} \to \int \frac{dp^0}{(2\pi)} \frac{-i}{-(p^0)^2+m^2-i\epsilon} e^{-ip^0(t'-y^0)}$$



$$t - t' < 0 \Rightarrow \frac{1}{2\omega} e^{i\omega(t-t')}$$

$$t - t' > 0 \Rightarrow \frac{1}{2\omega} e^{-i\omega(t-t')}$$

$$\Delta_F(t,t') = \frac{1}{2\omega} e^{-i\omega|t-t'|}$$

Voltemos então a equação 74.1:

$$\Delta^{-1} q_{cl}(t;J) = iJ(t) \Rightarrow i\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega^2\right) q_{cl}(t,J) = iJ(t)$$

E lembrando que: $$\underbrace{i\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega^2\right)}_{\Delta^{-1}} \underbrace{\left(i\int \frac{dp}{2\pi} \frac{e^{-ip(t-t')}}{p^2 - \omega^2 + i\epsilon}\right)}_{\Delta_F(t-t')} = \delta(t-t')$$

Fica fácil deduzir que: $$q_{cl}(t,J) = \int dt' \, \Delta_F(t-t') J(t')$$

Assumindo que $J(t) \to 0 \,/\, t \to \pm\infty \Rightarrow \int dt' \to \int_{-T}^{T} dt'$

algum número finito, pois fora desta região *J(t) = 0*

Então: $$t \to \infty \Rightarrow q_{cl}(t,J) = e^{-i\omega t} \underbrace{\int_{-T}^{T} dt' \frac{e^{i\omega t'}}{2\omega} J(t')}_{\text{const.}} = A e^{-i\omega t}$$

$$t \to -\infty \Rightarrow q_{cl}(t,J) = e^{+i\omega t} \int_{-T}^{T} dt' \frac{e^{-i\omega t'}}{2\omega} J(t') = A^* e^{+i\omega t}$$

Vemos que a prescrição 74.3 (chamada de prescrição de Feynman) é equivalente a resolver 74.1 com as condições de contorno:

$$\boxed{\begin{array}{l} q_{cl}(t \to \infty, J) = e^{-i\omega t} \\ q_{cl}(t \to -\infty, J) = e^{i\omega t} \end{array}} \quad (\text{eq. } 75.1)$$

(somente frequências positivas se propagam para o futuro)

(somente frequências negativas se propagam para o passado) e estas condições exigem que *J(t)* seja limitado no tempo. Além disso, como estas condições não permitem soluções não triviais da equação 72.2, vemos que a integral de trajetória original em q(t) está bem definida (com a trajetória clássica satisfazendo 75.1 e a quântica satisfazendo 73.1.

Espaço de Fase Harmônico

Vejamos agora como podemos tratar este oscilador forçado de forma mais rigorosa. Começando com o oscilador livre, temos:

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 q^2}{2} \Rightarrow \begin{cases} q(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left[a(t) + a^\dagger(t)\right] \\ p(t) = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}\left[a(t) - a^\dagger(t)\right] \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left[\omega q - ip\right] = a(0)\, e^{-i\omega t} \\ a^\dagger(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left[\omega q + ip\right] = a^\dagger(0)\, e^{i\omega t} \end{aligned}}$$ (eq. 76.1)

(quantizando)

$$H(\hat{a},\hat{a}^\dagger) = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} \qquad [\hat{a},\hat{a}^\dagger] = 1$$

Espaço de Fock: $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle$

Até aqui, nada de novo, mas podemos também definir um outro conjunto de estados os estados coerentes:

$$\boxed{|\alpha\rangle \equiv e^{\alpha \hat{a}^\dagger}|0\rangle = \sum_{n\geq 0} \frac{\alpha^n}{n!}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle}$$ (eq. 76.2)

Estas combinações lineares dos estados no espaço de Fock são autoestados de $\hat{a}$:

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \hat{a}\, e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle + \underbrace{e^{\alpha\hat{a}^\dagger}\hat{a}|0\rangle}_{0} = \left[\hat{a}, e^{\alpha\hat{a}^\dagger}\right]|0\rangle$$

$[a,bcd] = [a,b]cd + b[a,c]d + bc[a,d]$

$$\left[\hat{a}, e^{\alpha\hat{a}^\dagger}\right] = \sum_{n\geq 0}\frac{\alpha^n}{n!}\overbrace{\left(\underbrace{[\hat{a},\hat{a}^\dagger]}_{1}(\hat{a}^\dagger)^{n-1} + \hat{a}^\dagger\underbrace{[\hat{a},\hat{a}^\dagger]}_{1}(\hat{a}^\dagger)^{n-2} + \dots + (\hat{a}^\dagger)^{n-1}\underbrace{[\hat{a},\hat{a}^\dagger]}_{1}\right)}^{n(\hat{a}^\dagger)^{n-1}} =$$

$$= \sum_{n\geq 0}\frac{\alpha^n}{(n-1)!}(\hat{a}^\dagger)^{n-1} = \alpha\, e^{\alpha\hat{a}^\dagger}$$

$$\boxed{\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle}$$ (eq. 76.3)

Da mesma forma: $\begin{cases} \langle\alpha^*| \equiv \langle 0|e^{\alpha^*\hat{a}} \\ \boxed{\langle\alpha^*|\hat{a}^\dagger = \langle\alpha^*|\alpha^*} \end{cases}$ (eq. 76.4)

Note que:

$$\boxed{\langle\alpha^*|\alpha\rangle} = \langle 0| e^{\alpha^*\hat{a}} |\alpha\rangle = e^{\alpha^*\alpha} \underbrace{\langle 0|\alpha\rangle} = \boxed{e^{\alpha^*\alpha}} \quad \text{(eq. 77.1)}$$

$\alpha|\alpha\rangle$

$$\langle 0| e^{\alpha\hat{a}^+}|0\rangle = \langle 0|0\rangle = 1$$

$$\langle 0| 1 + \hat{a}^+ + (\hat{a}^+)^2 + \dots$$

$0 \quad 0$

E temos a identidade (provar que isto é a identidade está na lista de exercícios):

$$\hat{1} = \int \frac{d\alpha\, d\alpha^*}{2\pi i} e^{-\alpha\alpha^*} |\alpha\rangle\langle\alpha^*|$$

Usemos agora estes estados para calcular a amplitude de transição entre estados:

$$F(\alpha^*, t'; \alpha, t) = {}_H\langle\alpha^*, t'|\alpha, t\rangle_H = {}_S\langle\alpha^*| e^{-i\hat{H}(t'-t)}|\alpha\rangle_S$$

estados no quadro de Heisenberg, assim como no moving frame (pg 18)

Mudando para o oscilador forçado:

$$H = \underbrace{\frac{\hat{p}^2}{2} + \frac{\omega^2\hat{q}^2}{2}}_{\omega a^+ a} - \hat{q} J = \omega \hat{a}^+\hat{a} - \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left[J\hat{a} + J\hat{a}^+\right] \qquad \gamma(t) = \frac{J(t)}{\sqrt{2\omega}}$$

$J \in \mathbb{R}$

$$\boxed{H(\hat{a}^+, \hat{a}; t) = \omega \hat{a}^+\hat{a} - \gamma(t)\hat{a}^+ - \bar{\gamma}(t)\hat{a}} \quad \text{(eq. 77.2)}$$

dependem ou não do tempo de acordo com o quadro, neste caso não pois estamos no q. de Schrödinger

Vale que:

$$\langle\alpha^*| \hat{H}(\hat{a}^+, \hat{a}; t)|\beta\rangle = H(\alpha^*, \beta; t)\langle\alpha^*|\beta\rangle = H(\alpha^*, \beta; t)\, e^{\alpha^*\beta} \quad \text{(eq. 77.3)}$$

Agora seguimos o procedimento usual para transformar a transição F em uma integral de trajetória, dividindo o tempo entre t e t' em n+1 intervalos de tamanho ε:

$$\epsilon = \frac{t'-t}{N+1} \qquad \{t_0 = t, t_1, t_2, \dots, t_n, t' = t_{n+1}\}$$

$$F(\alpha^*, t'; \alpha, t) = \int \prod_{i=1}^{n} \Bigg[\overbrace{\frac{d\alpha(t_i)\, d\alpha^*(t_i)}{2\pi i} e^{-\alpha^*(t_i)\alpha(t_i)}}^{\text{das n identidades inseridas}}\Bigg] \langle\alpha^*(t')| e^{-i\epsilon\hat{H}}|\alpha(t_n)\rangle \times$$

$$\times \langle\alpha^*(t_n)| e^{-i\epsilon\hat{H}}|\alpha(t_{n-1})\rangle \dots \langle\alpha^*(t_1)| e^{-i\epsilon\hat{H}}|\alpha(t)\rangle$$

como:

$$\langle\alpha^*(t_{i+1})| e^{-i\epsilon\hat{H}}|\alpha(t_i)\rangle = e^{-i\epsilon H(\alpha^*(t_{i+1}), \alpha(t_i); t_i)} e^{\alpha^*(t_{i+1})\alpha(t_i)}$$

(aqui está a vantagem dos estados coerentes, se tentássemos fazer o mesmo no espaço de Fock apareceriam problemas pois o termo com fontes mistura níveis de Fock diferentes)

$$F(\alpha^*, t'; \alpha, t) = \int \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{d\alpha(t_i)\, d\alpha^*(t_i)}{2\pi i} \right] \mathrm{EXP}\left[-i \sum_{i=0}^{n} \epsilon H(\alpha^*(t_{i+1}), \alpha(t_i); t_i) \right] \times$$

$$\times \underbrace{\mathrm{EXP}\left[\sum_{i=1}^{n} -\alpha^*(t_i)\alpha(t_i) \right]} \underbrace{\mathrm{EXP}\left[\sum_{i=0}^{n} +\alpha^*(t_{i+1})\alpha(t_i) \right]}$$

$$\mathrm{EXP}\left[\underbrace{\alpha^*(t')\alpha(t_n) - \alpha^*(t_n)\alpha(t_n)} + \underbrace{\alpha^*(t_n)\alpha(t_{n-1}) - \alpha^*(t_{n-1})\alpha(t_{n-1})} \ldots \underbrace{-\alpha^*(t_1)\alpha(t_1)} + \underbrace{\alpha^*(t_1)\alpha(t)}_{\text{"órfão"}} \right]$$

No limite $\epsilon \to 0$ $\qquad \epsilon \dfrac{\alpha^*(t') - \alpha^*(t_n)}{\epsilon} \alpha(t_n) \to d\tau\, \dot{\alpha}^*(\tau)\alpha(\tau)$

$$\boxed{F(\alpha^*, t'; \alpha, t) = \int D\alpha D\alpha^* \, \mathrm{EXP}\left\{ i \int_t^{t'} d\tau \left[\frac{\dot{\alpha}^*(\tau)}{i} \alpha(\tau) - H \right] + \alpha^*(t)\alpha(t) \right\}} \quad \text{(eq. 78.1)}$$

aqui termina a Lecture 7 do Nastase

Para resolver esta integral precisamos pensar um pouco sobre as condições de contorno. É tentador dizer que $\alpha*$ e α estão ambos fixos nas "bordas" (t' e t), mas temos um problema, pois estes são autovalores de operadores diferentes ($\hat{a}^\dagger$ e $\hat{a}$ respectivamente) e estes dois operadores não comutam. Sabemos que, em mecânica quântica, a nossa capacidade de especificar autovalores em um mesmo estado está limitada por:

$$\sigma_A \sigma_B \geq \frac{1}{2} \left| i \langle \psi | [\hat{A}, \hat{B}] | \psi \rangle \right|$$ (Griffiths de Mec. Quant., sec 3.4)

$$\sigma_O^2 = \langle \psi | (\hat{O} - O\hat{1})^2 | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{O}^2 | \psi \rangle - \langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle^2$$

$$O = \langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle$$

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \to \sigma_q \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Como estamos no quadro de Schrödinger e os estados evoluem no tempo, não podemos especificar $\alpha*$ e α ao mesmo tempo no estado inicial e nem no final, mas podemos fazer:

$t \to \quad \alpha(t) = \alpha \qquad \alpha^*(t)$ é livre $\quad (\sigma_{a^\dagger} = \infty)$

$t' \to \quad \alpha^*(t') = \alpha^* \qquad \alpha(t)$ é livre $\quad (\sigma_a = \infty)$

Note que a equação 78.1 está na forma: $\quad F = \int D\alpha D\alpha^* \, e^{\overbrace{i\tilde{S}[\alpha, \alpha^*]}}$

este objeto vai aparecer exponenciado em todas as integrais da trajet. p/ F ou Z

e portanto podemos usar o princípio da extrema ação para achar a equação de movimento para as