(aqui está a vantagem dos estados coerentes, se tentássemos fazer o mesmo no espaço de Fock apareceriam problemas pois o termo com fontes mistura níveis de Fock diferentes)

$$F(\alpha^*, t'; \alpha, t) = \int \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{d\alpha(t_i)\, d\alpha^*(t_i)}{2\pi i} \right] \mathrm{EXP}\left[-i \sum_{i=0}^{n} \epsilon H(\alpha^*(t_{i+1}), \alpha(t_i); t_i) \right] \times$$

$$\times \underbrace{\mathrm{EXP}\left[\sum_{i=1}^{n} -\alpha^*(t_i)\alpha(t_i) \right] \mathrm{EXP}\left[\sum_{i=0}^{n} +\alpha^*(t_{i+1})\alpha(t_i) \right]}$$

$$\mathrm{EXP}\Big[\alpha^*(t')\alpha(t_n) - \alpha^*(t_n)\alpha(t_n) + \alpha^*(t_n)\alpha(t_{n-1}) - \alpha^*(t_{n-1})\alpha(t_{n-1}) \ldots - \alpha^*(t_1)\alpha(t_1) + \underbrace{\alpha^*(t_1)\alpha(t)}_{\text{“órfão”}} \Big]$$

No limite $\epsilon \to 0$ $\quad \epsilon \frac{\alpha^*(t') - \alpha^*(t_n)}{\epsilon} \alpha(t_n) \to d\tau\, \dot{\alpha}^*(\tau)\alpha(\tau)$

$$\boxed{F(\alpha^*, t'; \alpha, t) = \int \mathcal{D}\alpha \mathcal{D}\alpha^* \, \mathrm{EXP}\left\{ i \int_t^{t'} d\tau \left[\frac{\dot{\alpha}^*(\tau)}{i} \alpha(\tau) - H \right] + \alpha^*(t)\alpha(t) \right\}} \quad \text{(eq. 78.1)}$$

aqui termina a Lecture 7 do Nastase

Para resolver esta integral precisamos pensar um pouco sobre as condições de contorno. É tentador dizer que $\alpha*$ e α estão ambos fixos nas "bordas" (t' e t), mas temos um problema, pois estes são autovalores de operadores diferentes ($\hat{a}^\dagger$ e $\hat{a}$ respectivamente) e estes dois operadores não comutam. Sabemos que, em mecânica quântica, a nossa capacidade de especificar autovalores em um mesmo estado está limitada por:

$$\sigma_A \sigma_B \geq \frac{1}{2} \left| i \langle \psi | [\hat{A}, \hat{B}] | \psi \rangle \right|$$

(Griffiths de Mec. Quant., sec 3.4)

$$\sigma_O^2 = \langle \psi | (\hat{O} - O \hat{1})^2 | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{O}^2 | \psi \rangle - \langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle^2$$

$$O = \langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle$$

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \to \sigma_q \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Como estamos no quadro de Schrödinger e os estados evoluem no tempo, não podemos especificar $\alpha*$ e α ao mesmo tempo no estado inicial e nem no final, mas podemos fazer:

$t \to \quad \alpha(t) = \alpha \quad\quad \alpha^*(t)$ é livre $\quad (\sigma_{a^\dagger} = \infty)$

$t' \to \quad \alpha^*(t') = \alpha^* \quad\quad \alpha(t)$ é livre $\quad (\sigma_a = \infty)$

Note que a equação 78.1 está na forma: $\quad F = \int \mathcal{D}\alpha \mathcal{D}\alpha^* \, e^{i\tilde{S}[\alpha, \alpha^*]}$

este objeto vai aparecer exponenciado em todas as integrais da trajet. p/ F ou Z

e portanto podemos usar o princípio da extrema ação para achar a equação de movimento para as soluções clássicas do sistema. As equações de movimento obtidas são:

$$\tilde{S} = \int_t^{t'} d\tau \left[\frac{\dot{\alpha}^*(\tau)}{i}\alpha(\tau) - H \right] + \alpha^*(t)\alpha(t) \Rightarrow \delta\alpha(\tau)\left(\frac{\delta \tilde{S}}{\delta\alpha(\tau)}\right) + \delta\alpha^*(\tau)\left(\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\alpha^*(\tau)}\right) = 0$$

$$\delta\alpha(\tau)\Big|_{\tau=t} = 0 \qquad \delta\alpha^*(\tau)\Big|_{\tau=t'} = 0$$

$$\underbrace{\int_t^{t'} d\tau \left[\frac{\dot{\alpha}^*(\tau)}{i}\alpha(\tau) - H \right] + \alpha^*(t)\alpha(t)} = \underbrace{\int_t^{t'} d\tau \left[-\frac{\alpha^*(\tau)}{i}\dot{\alpha}(\tau) - H \right]} + \underbrace{\alpha(\tau)\alpha^*(\tau)\Big|_{\cancel{t}}^{t'} + \cancel{\alpha^*(t)\alpha(t)}}_{+\alpha(t')\alpha^*(t')}$$

$$\frac{\delta S}{\delta\alpha(\tau)} = \frac{\dot{\alpha}^*(t)}{i} - \frac{\partial H}{\partial\alpha} = 0 \qquad \frac{\delta S}{\delta\alpha^*(\tau)} = -\frac{\dot{\alpha}(\tau)}{i} - \frac{\partial H}{\partial\alpha^*(\tau)} = 0$$

$$H(\alpha^*,\alpha;\tau) = \omega\alpha^*\alpha - \gamma\alpha^* - \bar{\gamma}\alpha$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\dot{\alpha}^*_{cl} - i\omega\alpha^*_{cl} + i\bar{\gamma} = 0 \\ &\dot{\alpha}_{cl} + i\omega\alpha_{cl} - i\gamma = 0 \end{aligned}}$$

(eq. 79.1)

Que tem como solução:

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha_{cl}(\tau) &= \alpha\, e^{i\omega(t-\tau)} + i\int_t^{\tau} e^{i\omega(s-\tau)}\gamma(s)\, ds \\ \alpha^*_{cl}(\tau) &= \alpha^*\, e^{i\omega(\tau-t')} + i\int_{\tau}^{t'} e^{i\omega(s-\tau)}\gamma(s)\, ds \end{aligned}}$$

(eq. 79.2)

Note que:

$$\alpha_{cl}(t) = \alpha$$

$$\alpha^*_{cl}(t') = \alpha^*$$

Usando estas soluções (ou as equações de movimento), dá para mostrar que (exercício):

$$i\int_t^{t'} d\tau \left[\frac{\dot{\alpha}^*(\tau)}{i}\alpha(\tau) - H \right] + \alpha^*(t)\alpha(t) = \alpha^*(t)\alpha(t) + i\int_t^{t'} d\tau\, \gamma(\tau)\alpha^*(\tau) =$$

$$= \alpha^*\alpha\, e^{-i\omega(t'-t)} + i\int_t^{t'} ds \left[\alpha\, e^{i\omega(t-s)}\bar{\gamma}(s) + \alpha^*\, e^{i\omega(s-t')}\gamma(s) \right] +$$

$$- \frac{1}{2}\int_t^{t'} ds \int_t^{t'} ds'\, \gamma(s)\bar{\gamma}(s')\, e^{-i\omega|s'-s|}$$

(eq. 79.3)

Compare 79.3 com 74.2: mais uma vez temos um termo indepente das fontes (que em 74.2 foi absorvido na normalização) um termo linear na fonte e um termo quadrático, de onde podemos obter o propagador. Vamos usar o mesmo método que antes, fazendo:

$$\alpha(t) = \alpha_{cl}(t) + \tilde{\alpha}(t)$$
$$\alpha^*(t) = \alpha^*_{cl}(t) + \tilde{\alpha}^*(t)$$

De novo, podemos mostrar que:

$$\tilde{S}\left[\alpha(t), \alpha^*(t); \gamma, \bar{\gamma}\right] = \tilde{S}\left[\alpha_{cl}(t), \alpha^*_{cl}(t); \gamma, \bar{\gamma}\right] + \tilde{S}\left[\tilde{\alpha}(t), \tilde{\alpha}^*(t); 0, 0\right]$$

e obter, de forma análoga a 73.4, que:

$$\tilde{Z} = \mathcal{N}\, e^{i\tilde{S}[\alpha_{cl}, \alpha^*_{cl}; \gamma, \bar{\gamma}]}$$

Para relacionar este resultado com o anterior, temos que escolher os estados iniciais e finais como o vácuo:

$$|\alpha\rangle = e^{\alpha a^\dagger}|0\rangle \rightarrow \alpha = 0 \rightarrow |\alpha\rangle = |0\rangle$$
$$\alpha^* = 0 \rightarrow \langle\alpha^*| = \langle 0|$$

E então tomamos $\begin{cases} t \rightarrow -\infty \\ t' \rightarrow +\infty \end{cases}$

De 79.3 obtemos:

$$\boxed{Z[J] \equiv \langle 0, \infty | 0, -\infty\rangle_J} = \mathcal{N}\, \mathrm{EXP}\Big\{ \alpha^*\alpha\, \cancelto{0}{e^{-i\omega(t'-t)}} + i\int_t^{t'} ds \left[\cancelto{0}{\alpha\, e^{i\omega(t-s)}}\, \bar{\gamma}(s) + \cancelto{0}{\alpha^*\, e^{i\omega(s-t')}}\, \gamma(s)\right] +$$

(funcional gerador das transições vácuo-vácuo)

$$- \frac{1}{2}\int_t^{t'} ds \int_t^{t'} ds'\, \underbrace{\gamma(s)}_{J/\sqrt{2\omega}}\, \underbrace{\bar{\gamma}(s')}_{J/\sqrt{2\omega}}\, e^{-i\omega|s'-s|}\Big\} = \boxed{\mathcal{N}\, \mathrm{EXP}\left[-\frac{1}{2} J\cdot\Delta_F\cdot J\right]}$$ (eq. 80.1)

Note que: $\boxed{\mathcal{N} = \langle 0, \infty | 0, -\infty\rangle_0}$ (eq. 80.2)

$$\boxed{\Delta_F = \frac{1}{2\omega}\, e^{-i\omega|s-s'|}}$$ (eq. 80.3)

Que é o mesmo resultado obtido na pg 75. Note também que a condição de contorno:

$\left.\begin{array}{l} \alpha(t) = 0 \\ t \rightarrow -\infty \\ \alpha^*(t) \text{ livre} \end{array}\right\} \Rightarrow$ só temos a parte de criação no passado

$\alpha^*(t)$ é autovalor de $a^\dagger$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha^*(t)=0\\ t\to+\infty\\ \alpha(t)\ \text{livre}\end{array}\right\}\Rightarrow$$ só temos a parte de aniquilação no futuro

$\alpha(t)$ é autovalor de a

Como $$q(t)=\frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left[a\,e^{-i\omega t}+a^{+}e^{i\omega t}\right]$$

verificamos que isto é o mesmo que as condições 75.1.

O que ganhamos fazendo de novo este caminho? Para começar ele é mais limpo, não houve o uso prescrição alguma. Adicionalmente vimos que o resultado final só pôde ser obtido escolhendo os estados inicial e final como o vácuo, este passo não ficou explicito no caso anterior. De fato a projeção no vácuo estava escondida no único lugar em que poderia, na prescrição de Feynman que, como já vimos, está intrinsecamente ligada a projeção no vácuo assintótico (para tempos grandes) da teoria.

Rotação de Wick para o tempo Euclideano

Até agora viemos fazendo integrais que tipicamente envolviam exponenciais do tipo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,e^{-i\alpha x^2}$$

que exige que a ou x sejam tomados ligeiramente complexos para que a integral convirja, ou seja, estas integrais só estão definidas via sua continuação analítica. Este tipo de integral aparece com frequência em teoria de campos, pois em geral podemos expandir as integrais da ação em torno da solução clássica usando a Saddle Point Approximation:

$$S=S[q_{cl}]+\frac{1}{2}\delta q_i\,S_{ij}\,\delta q_j+\mathcal{O}(\delta q^3)$$

$$\boxed{\left.\frac{\delta S}{\delta q}\right|_{q=q_{cl}}=0}$$

se a ação já é quadrática em q (e.g. no caso livre) este termo é zero e o resultado da SPA é exato.

Uma outra forma de olhar a continuação analítica é fazendo uma rotação para o Espaço Euclideano, este procedimento é também bastante instrutivo pois revela paralelos interessantes entre a Mecânica Quântica e a Mecânica Estatística. Pois bem, analisemos o seguinte caso:

$$\hat{H}|n\rangle=E_n|n\rangle$$

$$E_n>0$$

$$\hat{1}=\sum|n\rangle\langle n|$$

Uma amplitude de transição seria escrita como:

$$ {}_H\langle q',t'|q,t\rangle_H = {}_S\langle q'|\,e^{-i\hat{H}(t'-t)}\,|q\rangle_S = \sum_n\sum_m \langle q'|n\rangle \underbrace{\langle n|\,e^{-i\hat{H}(t'-t)}\,|m\rangle}_{\delta_{mn}\; e^{-iE_n(t'-t)}}\langle m|q\rangle = $$

$$ = \sum_n \langle q'|n\rangle\langle n|q\rangle\, e^{-iE_n(t'-t)} = \sum_n \psi_n(q')\,\psi_n^*(q)\, e^{-iE_n(t'-t)} $$

Que é uma função analítica em $\Delta t = (t'-t)$ e portanto admite a continuação:

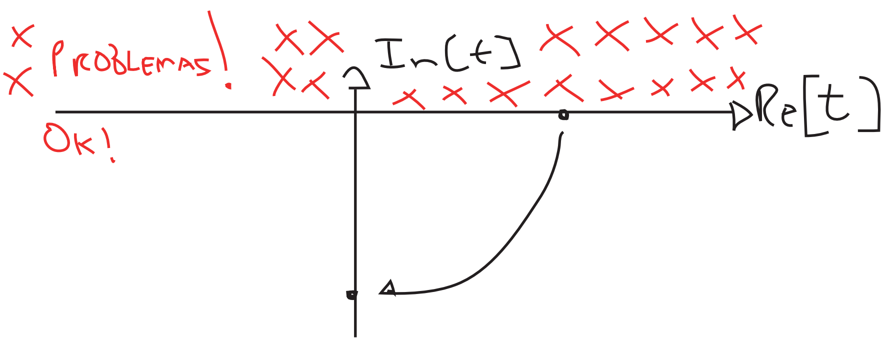
$$ \boxed{\Delta t \to -i\hbar\beta} \quad \text{Rotação de Wick} \quad \text{(eq. 82.1)} \qquad \Delta t,\ \beta \in \mathbb{R} \qquad \beta > 0 \qquad \boxed{\tau = \hbar\beta} $$

A razão pela qual "rodamos" nesta direção é a seguinte: considere o operador de evolução:

$$ U(t) = e^{-i\hat{H}t} = e^{-i\hat{H}\,Re[t]}\; \underbrace{e^{\hat{H}\,Im[t]}}_{\to \begin{cases} >1 & Im[t] > 0 \\ <1 & Im[t] < 0 \end{cases}} $$

O que acontece se fizermos a continuação analítica para o plano complexo em *t*? - *U* só é limitado para valores negativos de *Im[t]*:

$$ \langle\psi|U^\dagger U|\psi\rangle \leq c\,\langle\psi|\psi\rangle $$



Com esta rotação temos:

$$ \boxed{{}_H\langle q',\beta|q,0\rangle_H = \sum_n \psi_n(q')\,\psi_n^*(q)\, e^{-\beta E_n}} \quad \text{(eq. 82.2)} $$

Note que: $$ \int dq\; {}_H\langle q,\beta|q,0\rangle_H \underset{\int dq\,|\psi_n(q)|^2 = 1}{=} \sum_n e^{-\beta E_n} = Tr\left\{e^{-\beta\hat{H}}\right\} = Z(\beta) $$

é a função de partição canônica do sistema para uma temperatura $\underbrace{k}_{\text{também é 1 em unidades naturais}}T = 1/\beta$

Ou seja, a função de partição do sistema é obtida integrando sobre um ponto de uma trajetória fechada ($q' \equiv q(\beta) = q(0) \equiv q$) e de "comprimento" β no tempo Euclideano.

Vejamos como fica a integral de trajetória para esta mesma transição. O lagrangiano é:

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 - V(q)$$

O exponente na integral de trajetória fica:

$$q(t) \to q(-it_E) = q_E(t_E)$$

$$iS[q] = i\int_t^{t'} dt'' \left[\frac{1}{2}\left(\frac{dq}{dt''}\right)^2 - V(q)\right] = i\int_0^{\overbrace{i\Delta t}^{\beta}} (-i\, dt_E)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{dq_E}{d(-it_E)}\right)^2 - V(q_E)\right] \equiv -S_E[q_E]$$

$$① \; t'' \to t'' - t \Rightarrow \int_0^{\Delta t} dt'' \Rightarrow ② \; t_E = i t''$$

$$\therefore S_E[q_E] = \int_0^{\beta} dt_E \left[\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{dq_E}{dt_E}\right)^2 + V(q_E)}_{T+V}\right] = \int dt_E\, L_E(q_E, \dot{q}_E)$$

$T + V$ (Hamiltoniana Clássica)

Para obter então a função de partição, basta então exigir que os extremos da trajetória sejam o mesmo ponto (trajetória fechada) e incluir a integral sobre este ponto em $\mathcal{D}_q$. Na prática estamos integrando sobre todos os caminhos fechados de comprimento β.

$$\boxed{Z(\beta) = T_R\left\{e^{-\beta\hat{H}}\right\} = \int_{q_E(t_E+\beta) = q_E(t_E)} \mathcal{D}_{q_E}\, e^{-S_E[q_E]}}$$

Fórmula de Feynman-Kac

(eq. 83.1)

Podemos tirar qualquer quantidade de interesse da função de partição, uma vez que ela tem toda informação relevante do sistema. De fato a mecanica estatística de uma partícula quântica em contato com um banho térmico em temperatura T é dada pela matriz de densidade:

$$\hat{\rho}_\beta = \frac{1}{Z} e^{-\beta\hat{H}} \qquad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

fator de Boltzman

normalização

que contem as probabilidades de encontrar a partícula nos estados de energia E_n: $\frac{1}{Z} e^{-\beta E_n}$

A condição de normalização indentifica Z como a função de partição:

$$T_R[\hat{\rho}_\beta] = 1 \longleftrightarrow Z(\beta) = T_R\left[\exp(-\beta\hat{H})\right]$$