

Ou seja, a função de partição do sistema é obtida integrando sobre um ponto de uma trajetória fechada ( $q^1 \equiv q(\beta) = q(0) \equiv q^0$ ) e de "comprimento"  $\beta$  no tempo Euclidiano.

Vejamos como fica a integral de trajetória para esta mesma transição. O lagrangiano é:

$$L = \frac{1}{2} \left( \frac{dq}{dt} \right)^2 - V(q)$$

O expoente na integral de trajetória fica:

$$\lambda S[q] = \lambda \int_t^t dt'' \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{dq}{dt''} \right)^2 - V(q) \right] = \lambda \int_0^{\beta} (-i dt_E) \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{dq_E}{d(-i t_E)} \right)^2 - V(q_E) \right] \equiv -S_E[q_E]$$

$\textcircled{1} t'' \rightarrow t'' - t \Rightarrow \int_0^{\Delta t} dt'' \Rightarrow \textcircled{2} t_E = -i t''$

$$\therefore S_E[q_E] = \int_0^{\beta} dt_E \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{dq_E}{dt_E} \right)^2 + V(q_E) \right] = \int dt_E L_E(q_E, \dot{q}_E)$$

$\hookrightarrow T + V$  (Hamiltoniana Clássica)

Para obter então a função de partição, basta então exigir que os extremos da trajetória sejam o mesmo ponto (trajetória fechada) e incluir a integral sobre este ponto em  $\mathcal{D}_q$ . Na prática estamos **integrando sobre todos os caminhos fechados de comprimento  $\beta$** .

$$\mathcal{Z}(\beta) = \text{Tr} \left\{ e^{-\beta \hat{H}} \right\} = \int_{q_E(t_E + \beta) = q_E(t_E)} \mathcal{D}q_E e^{-S_E[q_E]} \quad \text{Fórmula de Feynman-Kac}$$

(eq. 83.1)

Podemos tirar qualquer quantidade de interesse da função de partição, uma vez que ela tem toda informação relevante do sistema. De fato a mecânica estatística de uma partícula quântica em contato com um banho térmico em temperatura  $T$  é dada pela **matriz de densidade**:

$$\hat{\rho}_\beta = \frac{1}{\mathcal{Z}} e^{-\beta \hat{H}} \quad \beta = \frac{1}{k_B T} \quad \text{fator de Boltzman}$$

$\hookrightarrow$  normalização

que contem as probabilidades de encontrar a partícula nos estados de energia  $E_n$ :  $\frac{1}{\mathcal{Z}} e^{-\beta E_n}$

A condição de normalização indentifica  $Z$  como a função de partição:

$$\text{Tr}[\hat{\rho}_\beta] = 1 \iff \mathcal{Z}(\beta) = \text{Tr} \left[ \exp(-\beta \hat{H}) \right]$$

O valor esperado de qualquer observável  $\hat{O}$  é dado por:

$$\langle \hat{O} \rangle_{\beta} = \text{Tr}(\hat{\rho}_{\beta} \cdot \hat{O}) \quad (\text{eq. 84.1})$$

A matriz de densidade é proporcional ao próprio operador de evolução no espaço Euclidiano:

$$U(t) = e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}} \rightarrow \hat{U}(-i\tau) = e^{-\frac{\tau}{\hbar} \hat{H}} = e^{-\beta \hat{H}} \quad \tau = \hbar \beta = \frac{\hbar}{k_B T}$$

recuperei o  $\hbar$  provisoriamente, para podermos comparar flutuações térmicas à flutuações estatísticas

$$\hat{\rho}_{\beta} = \frac{1}{Z} \hat{U}(-i\tau) \quad Z = \text{Tr}[\hat{U}(-i\tau)]$$

Vemos que a “evolução” de um sistema neste “tempo imaginário” serve para descrever as propriedades deste mesmo sistema em equilíbrio com um banho térmico.

Recapitulando:

$$\text{Partícula (quântica) em temperatura } T \rightarrow \int_{\beta} (e^{-\beta \hat{H}}), \quad Z = \text{Tr}[e^{-\beta \hat{H}}]$$

isto é tudo que preciso saber, e posso obtê-lo daqui

$$\text{Partícula (quântica) em tempo imaginário} \rightarrow \hat{U}(-i\tau)$$

(84.2)

Além disso, a métrica agora é de um espaço Euclidiano:

$$ds^2 = -dt^2 + dq^2$$

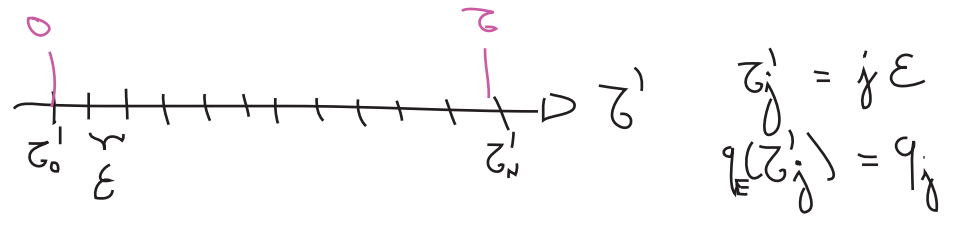
$$\downarrow t = -i\tau$$

$$ds_e^2 = d\tau^2 + dq^2 \Rightarrow \text{distância Euclidiana em } \mathbb{R}^{n+1}$$

e portanto,  $\tau$  é uma variável tipo espaço. Vejamos o que acontece se pensarmos na variável de integração  $\tau'$  como uma distância, além disso, consideraremos um sistema simples (oscilador harmônico):

$$S_E[q_E] = \frac{1}{\hbar} \int_0^{\tau} d\tau' \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{dq_E}{d\tau'} \right)^2 + V(q_E) \right] \quad V(q_E) = \frac{\omega^2}{2} q_E^2$$

Discretizando o "tempo Euclideo":



$$\int \mathcal{D}q_E \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \int_0^{\tau_0} d\tau' \left[ \frac{\dot{q}_E^2}{2} + \frac{1}{2} \omega^2 q_E^2 \right] \right\}$$

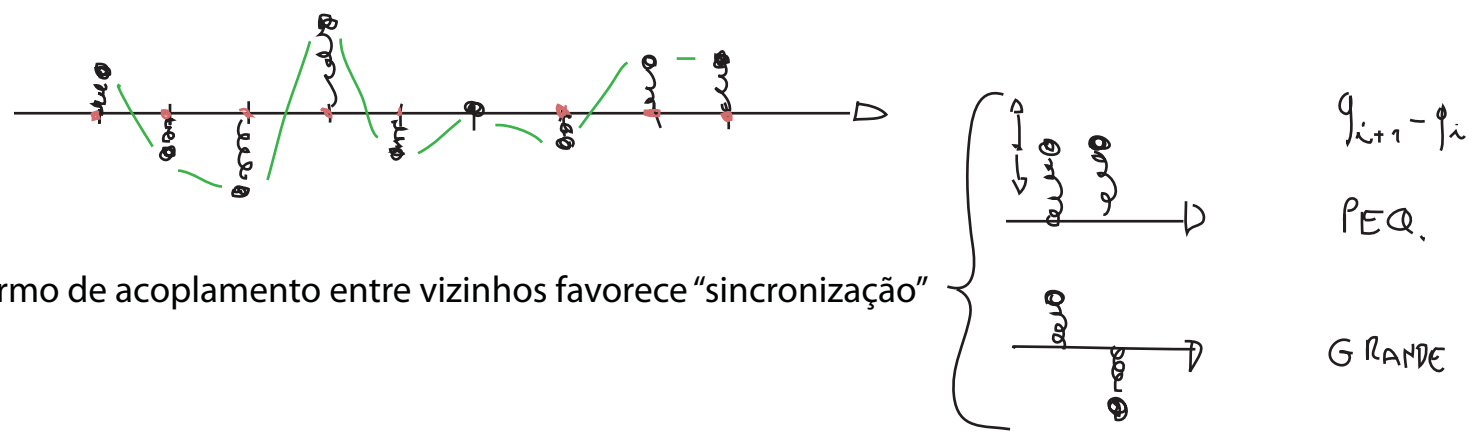
$$\downarrow$$

$$\int \prod dq_j \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \sum_j \epsilon \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{q_{j+1} - q_j}{\epsilon} \right)^2 + \frac{1}{2} \omega^2 q_j^2 \right] \right\}$$

$$Z = \underbrace{\int \prod dq_j}_{\text{"soma" todas as configurações } \{q_i\}} \underbrace{\exp}_{\frac{1}{\hbar T}} \left\{ -\frac{1}{\hbar} \sum_j \epsilon \left[ \underbrace{\frac{1}{2} \left( \frac{q_{j+1} - q_j}{\epsilon} \right)^2}_{\text{acoplamento entre vizinhos}} + \underbrace{\frac{1}{2} \omega^2 q_j^2}_{\text{energia de um oscilador}} \right] \right\}$$

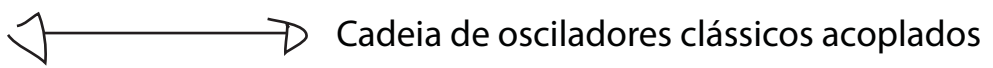
energia total

Na prática temos um sistema de osciladores:

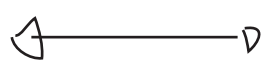


O termo de acoplamento entre vizinhos favorece "sincronização"

1 Oscilador Quântico  
(em Temp finita ou tempo imaginário)



Futuações quânticas



Futuações térmicas

$\hbar$



$k_B T_S$

temperatura do Sistema de osciladores clássicos

1 grau de liberdade  $\longleftrightarrow$  número grande graus de liberdade clássicos

Temperatura  $\longleftrightarrow$  (Comprimento da Cadeia)<sup>-1</sup>  
 $\tau^{-1}$

$$T_Q = \frac{\hbar}{k_B \tau}$$

período

temperatura de um banho térmico com o qual um oscilador Quântico está em contato

Recapitulando (de novo):

Partícula (quântica) em temperatura T  $\rightarrow \int_{\mathcal{B}} ( e^{-\beta \hat{H}} )_J, Z = \text{Tr} [ e^{-\beta \hat{H}} ]$

isto é tudo que preciso saber, e posso obtê-lo daqui

Partícula (quântica) em tempo imaginário  $\rightarrow \hat{U}(-i\tau)$   
 $Z = \text{Tr} [ \hat{U}(-i\tau) ]$

integral de trajetória sobre configurações periódicas

É também a função de partição de um sistema clássico (de fato de muitos sistemas clássicos acoplados aos "primeiros vizinhos")  $\rightarrow$  Mecânica Estatística

(86.1)

Até agora vimos a relação entre o operador de evolução e a função de partição. E os observáveis?

$\hat{A}(q)$   $\xrightarrow{(84.1)}$  quântica em T  $\langle \hat{A}(q_E) \rangle_{\beta} = \text{Tr} [ \hat{\rho}_{\beta} \cdot \hat{A}(q_E) ] = \frac{\text{Tr} [ e^{-\beta \hat{H}} \hat{A}(q_E) ]}{Z}$

$$\beta = \frac{1}{k_B T_Q} = \frac{\text{Tr} [ \hat{U}_E(\tau) \hat{A}(q_E) ]}{\text{Tr} [ \hat{U}_E(\tau) ]}$$

$$\text{Tr} [ \hat{U}(q_E) ] = \int \mathcal{D}q_E^a \langle q_E^a | \hat{U}(q_E) | q_E^a \rangle = \int \mathcal{D}q_E \mathcal{O}(q_E(\tau)) e^{-\frac{1}{\hbar} S_E[q_E]}$$

$\hat{U}(q_E) | q_E(\tau) \rangle = \mathcal{O}(q_E(\tau)) | q_E(\tau) \rangle$

$$\text{Tr} [ \hat{U}_E(\tau) ] = \int_{\mathcal{P}} \mathcal{D}q_E e^{-\frac{1}{\hbar} S_E[q_E]}$$

(em caminhos periódicos)

$$\text{Tr} [\hat{U}_E(\tau) \hat{A}(q_E)] = \int_{\mathcal{P}} \mathcal{D}q_E e^{-\frac{1}{\hbar} S_E[q_E]} A(q_E(\tau_1))$$

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{\int_{\mathcal{P}} \mathcal{D}q_E e^{-\frac{1}{\hbar} S_E[q_E]} A(q_E(\tau_1))}{\int_{\mathcal{P}} \mathcal{D}q_E e^{-\frac{1}{\hbar} S_E[q_E]}}$$

(eq. 87.1)

Notem que, pensando em  $\int \mathcal{D}q_E$  como a soma sobre as configurações de uma cadeia clássica, esta mesma definição dá o valor esperado em Mecânica Estatística para observáveis de um sistema de temperatura  $T_s = \frac{\hbar}{k_B \tau}$

O que acontece quando fazemos  $T_Q \rightarrow 0$  ?

$$T_Q \rightarrow 0 \begin{cases} \beta \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$\tau = \hbar \beta = \frac{\hbar}{k_B T_Q}$$

$$\text{Tr} [\hat{U}_E(\tau)] = \sum_n e^{-\frac{\tau}{\hbar} E_n}$$

$$\tau \rightarrow \infty \Rightarrow e^{-\frac{\tau}{\hbar} E_0} \gg e^{-\frac{\tau}{\hbar} E_1} \gg e^{-\frac{\tau}{\hbar} E_2}$$

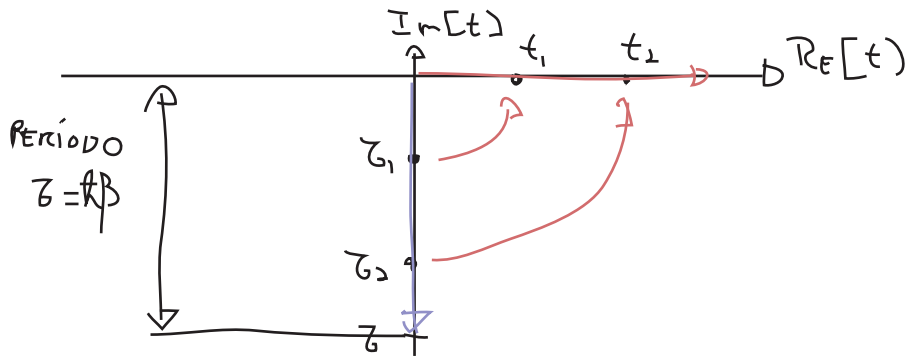
$$\text{Tr} [\hat{U}_E(\tau \rightarrow \infty)] = \langle 0 | e^{-\frac{\tau}{\hbar} H} | 0 \rangle$$

$$\text{Tr} [\hat{U}_E(\tau) \hat{A}(q_E)] = \langle 0 | \hat{A}(q_E) | 0 \rangle$$

$$\langle 0 | \hat{A}(q_E) | 0 \rangle = \langle \hat{A} \rangle_{\beta \rightarrow \infty}$$

Mandar a temperatura para zero **projeta os operadores no vácuo da teoria**. Com isso podemos entender outra forma de obter os propagadores de Feynman:

$$\Delta_F(t_1 - t_2) = \langle 0 | T \{ \hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) \} | 0 \rangle$$



Podemos obter primeiro o valor  $\langle \hat{q}_E(z_1) \hat{q}_E(z_2) \rangle_{\beta = \frac{\tau}{\hbar}} = \int_{\mathcal{P}} \mathcal{D}q_E e^{-\frac{i}{\hbar} S_E} q_E(z_1) q_E(z_2)$

$(z_1 < z_2) \Rightarrow (t_1 < t_2)$

e então voltar ao tempo real fazendo:  $z_1 \rightarrow i t_1$   
 $z_2 \rightarrow i t_2 \Rightarrow \langle \hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) \rangle_{\beta}$

Se tivéssemos calculado a mesma coisa com  $z_2 < z_1$  (note que na integral de trajetória não há diferença), teríamos voltado para:  $\langle \hat{q}(t_2) \hat{q}(t_1) \rangle_{\beta}$

ou seja, voltamos sempre no produto temporalmente ordenado:

$$\langle T \{ \hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) \} \rangle_{\beta}$$

Para projetar no vácuo basta tomar temperatura zero

$$\left. \begin{matrix} \beta \rightarrow \infty \\ T \rightarrow 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \langle 0 | T \{ \hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) \} | 0 \rangle$$

Podemos também obter uma expressão para o propagador/correlator livre em temperaturas finitas:

$$\Delta_{\text{FREE}}(z') = \langle T \{ \hat{q}(-i\tau) \hat{q}(0) \} \rangle_{\beta}$$

considerando a equação de movimento:

$$\left[ -\frac{d^2}{dt_1^2} + \omega^2 \right] \Delta_{\text{FREE}}(z_1 - z_2) = \delta(z_1, z_2) \quad (\text{eq. 88.1})$$

$$\frac{d^2}{d\tau_1^2} + \omega^2$$

1 (já podemos voltar para unidades naturais)

Lembrando que, como o espaço Euclidiano é cíclico de período  $\tau = \hbar\beta$ , vale:

$$\Delta_{\text{FREE}}(\tau \pm \beta) = \Delta_{\text{FREE}}(\tau)$$

A eq. 88.1 tem somente uma solução para  $(z_1 - z_2) \in [0, \beta]$  (provar isto está nos exercícios):

$$\Delta_{F \neq E}(\bar{z}') = \frac{1}{2\omega} \left[ (1 + n(\omega)) e^{-\omega \bar{z}'} + n(\omega) e^{\omega \bar{z}'} \right] \quad (\text{eq. 89.1})$$

onde:

$$n(\omega) = \frac{1}{e^{\beta|\omega|} - 1} \quad (\text{eq. 89.2})$$

é a distribuição de Bose-Einstein. E no limite de temperatura zero:

$$\begin{aligned} T=0 & \quad n(\omega) \rightarrow 0 \\ \beta \rightarrow \infty & \quad \Delta_{F \neq E} \rightarrow \Delta_F(\bar{z}') = \frac{e^{-\omega \bar{z}'}}{2\omega} \quad (\text{compare com 80.3}) \end{aligned}$$

### O oscilador Harmônico forçado (de novo)

Vejamos como fica o oscilador no espaço Euclidiano. Partindo da ação:

$$i S[q] = i \int dt \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{dq}{dt} \right)^2 - \frac{\omega^2}{2} q^2 + J q \right]$$

$$\begin{aligned} \text{Wick} & \left\{ \begin{array}{l} t = -i t_E \\ q(t) = q(-i t_E) = q_E(t_E) \\ J(t) = J(-i t_E) = J_E(t_E) \end{array} \right. \quad \left( \frac{dq}{dt} \right)^2 = \left( \frac{1}{-i} \right)^2 \left( \frac{dq_E}{dt_E} \right)^2 \end{aligned}$$

$$-S_E[q] = \int dt_E \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{dq_E}{dt_E} \right)^2 - \frac{\omega^2}{2} q_E^2 + J_E q_E \right]$$

Suprimindo todos os índices "E" para simplificar a notação, obtemos a seguinte função de partição:

$$Z_E[J] = \int_{\mathcal{F}} \mathcal{D}q \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int dt \left[ \left( \frac{dq}{dt} \right)^2 + \omega^2 q^2 \right] + \int dt J(t) q(t) \right\} \quad (\text{eq. 89.2})$$

A vantagem agora é que estamos fazendo esta integral em trajetórias fechadas, por isso não há problema com bordas quando integramos por partes (compare com a pg 71):

$$\begin{aligned} Z_E[J] &= \int_{\mathcal{F}} \mathcal{D}q \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{z_1}^{z_1+\beta} dt q \left[ \underbrace{\left( \frac{dq}{dt} \right)^2}_{\Delta_E^{-1}} + \omega^2 \right] q + \int_{z_1}^{z_1+\beta} dt J(t) q(t) \right\} = \\ &= N \exp \left\{ \frac{1}{2} \int ds \int ds' J(s) \Delta_E(s, s') J(s') \right\} \quad (\text{eq. 89.3}) \end{aligned}$$

$z_1 \rightarrow -\infty$   
 $z_1 + \beta \rightarrow \infty$   
 $J(t) \neq 0 \quad -T < t < T$   
 $J(t) = 0 \quad |t| > |T|$

note que este  $\Delta$  é a função de Green que soluciona o problema clássico:

$$-\frac{d^2 q_\mu}{dt^2} + \omega^2 q_\mu = J(t)$$

$$q_\mu(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \Delta_\mu(t, t') J(t')$$

que só podemos garantir finita se  $J$  estiver limitado no tempo (entre  $-T$  e  $T$ ). Esta equação para  $\Delta_E$  é válida para  $s \gg T, s' \ll -T$

$$\Delta_E(s, s') \equiv \left(-\frac{d^2}{ds^2} + \omega^2\right)^{-1}(s, s') = \int \frac{dE_E}{2\pi} \frac{e^{-i E_E (s-s')}}{E_E^2 + \omega^2} \quad (\text{eq. 90.1})$$

$$\left(-\frac{d^2}{ds^2} + \omega^2\right) \Delta_E(s, s') = \int \frac{dE_E}{2\pi} \left(-(-i E_E)^2 + \omega^2\right) \frac{e^{-i E_E (s-s')}}{E_E^2 + \omega^2} = \delta(s-s')$$

Note que a integral feita da primeira para a segunda linha de 89.3 é uma Gaussiana tradicional (nenhuma exponencial complexa por ali). Além disso o propagador Euclideano em 90.1 não tem pólos para  $E_E$  real e portanto não precisamos falar nada sobre o caminho de integração. Os polos foram movidos para o eixo complexo pela rotação de Wick:

polos de  $\Delta_E$ :  $E_E = \pm i \omega$

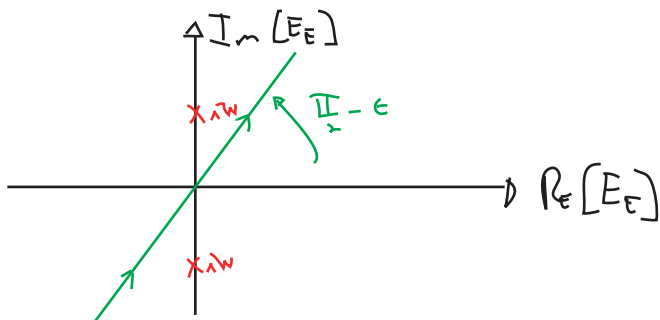
Queremos, finalmente, voltar para o espaço de Minkowski. Já sabemos que  $t = -i t_E$  mas como rodamos  $E_E$ ? Primeiramente exigimos que  $E t = E_E t_E$ , então:

$$E \approx i E_E \approx e^{i \frac{\pi}{2}} E_E \quad E t = (i E_E)(-i t_E) = E_E t_E$$

(o que é arbitrário, mas garante que ondas planas se propagem na mesma direção espacial com  $t$  ou  $t_E$  crescente, uma vez que:

$$e^{i p \cdot x} = e^{-i(E t - \vec{p} \cdot \vec{x})} = e^{-i(E_E t_E - \vec{p} \cdot \vec{x})}$$

Além disso, para que a extensão analítica seja válida, não podemos cruzar os polos, portanto não podemos rodar totalmente para  $E_E = -i E$  mas sim parar antes de chegar no polo:



$$E = e^{i(\frac{\pi}{2} - \epsilon)} E_E = i(E_E - i \epsilon')$$

ou

$$E_E = e^{-i(\frac{\pi}{2} - \epsilon)} E = -i(E + i \epsilon')$$

Com esta rotação temos:

$$(\text{eq. 90.1}) \Rightarrow \Delta_E(t_E = i t) = \int \frac{dE_E}{2\pi} \frac{e^{-i E_E t_E}}{E_E^2 + \omega^2} = \int \frac{-i dE}{2\pi} \frac{e^{-i E t}}{-E^2 + \omega^2 - i \epsilon} = \Delta_F(t)$$

$$E_E^2 = [-i(E + i \epsilon')]^2 = -(E^2 + i \epsilon' E + \omega(\epsilon'))$$

compare com 46.1 lembrando que aqui temos apenas a dim. temporal

De forma que, mais uma vez, somos levados ao propagador de Feynman.