

mente pois tratamos os estados iniciais e finais com mais detalhe (ainda que de forma heurística), como ondas planas. Veremos que na versão final da história, quando estivermos calculando espalhamentos, estes dois propagadores vão sumir (aí sim de forma rigorosa) deixando-nos com regras de Feynman idênticas às obtidas anteriormente (note também que isto nada tem a ver com diferenças entre o formalismo canônico ou de integral de trajetória, se tivéssemos, ao invés de olhar com cuidado os estados assintóticos como fizemos nas pags 63 e 64, simplesmente feito a transf. de Fourier das expressões obtidas no espaço das posições, chegaríamos no mesmo resultado)

Regras de Feynman para uma teoria Bosônica em geral

Suponha agora uma teoria mais geral composta de um número arbitrário de campos bosônicos (veremos adiante que a quantização de campos fermiônicos é mais complicada), que agruparemos usando um índice r :

$$\phi_r \quad \text{EX: } \phi = \{ \phi_1, \phi_2, \phi_3 = A_0, \phi_4 = A_1, \phi_5 = A_2, \phi_6 = A_3 \} = \{ \phi, \phi_2, A_\mu \}$$

Com a ação livre dada por:

$$S_0 = \frac{1}{2} \int d^d x \sum_{r,s} \phi_r(x) \Delta_{r,s}^{-1} \phi_s(x)$$

$$\text{EX: } \Delta^{-1} = \begin{pmatrix} -\partial_\mu \partial^\mu + m_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\partial_\mu \partial^\mu + m_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & (g_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu)_{4 \times 4} \end{pmatrix}$$

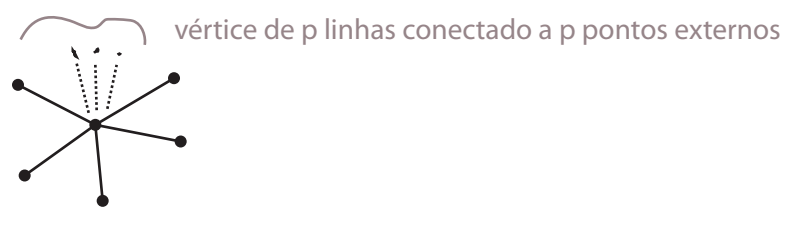
Este operador deve ser invertido para podermos encontrar os propagadores. Quando ele não é invertível, em geral existem problemas na definição dos campos. Vamos assumir que conseguimos resolver estes problema e encontrar uma base apropriada, aonde ele pode ser invertido (mais tarde veremos um exemplo específico, o campo do fóton). A interação também pode ser escrita em um forma genérica:

$$S_{r_1, \dots, r_p} = \int d^d x \underbrace{A_{r_1, \dots, r_p}}_{\substack{\text{pode conter constantes (acoplamentos) ou operadores} \\ \text{diferenciais agindo em um ou mais campos (o que torna isso} \\ \text{bem mais geral que } \phi^n)}} \underbrace{\phi_{r_1}(x) \dots \phi_{r_p}(x)}_{\substack{\text{não há soma subentendida!}}}$$

Interação envolvendo p campos (r_i e r_j são genéricos, não necessariamente iguais nem diferentes)

Independentemente da forma de $A_{\{r_i\}}$, esta interação colocará p campos agindo no mesmo ponto, o que leva a um vértice com p linhas saindo. A forma mais simples de ver a regra para o vértice

é considerar a função com p pontos externos:



Podemos então seguir o raciocínio usado para passar de 102.1 para 102.2. A generalização de 102.1, agora que temos vários campos, é:

$$G_n(\{x_1, \dots, x_n\}) = e^{\frac{1}{2} \sum_{r,s} \frac{\delta}{\delta \phi_r} \Delta_{rs} \frac{\delta}{\delta \phi_s}} \left\{ \phi_{x_1}(x_1) \dots \phi_{x_n}(x_n) e^{-\int d^d x A_{x_1 \dots x_p} \phi_{x_1} \dots \phi_{x_p}} \right\}_{\phi=0}$$

→ a função depende das coordenadas dos pontos externos mas também de qual campo age ali

Especializando para o caso com apenas um vértice ($N = 1$) e número (e tipo) de pontos externos iguais aos da interação temos ($n = p$):

$$G_p^{(1)}(\{x_1, \dots, x_p\}) = e^{\frac{1}{2} \sum_{r,s} \frac{\delta}{\delta \phi_r} \Delta_{rs} \frac{\delta}{\delta \phi_s}} \left\{ \phi_{x_1}(x_1) \dots \phi_{x_p}(x_p) (-) \int d^d x A_{x_1 \dots x_p} \phi_{x_1} \dots \phi_{x_p} \right\}_{\phi=0}$$

Agora basta lembrar que a exponencial com as derivadas deve ser expandida e o único termo que sobrevive é aquele que tem o número (e tipo) de derivadas que coincide com o que está dentro das chaves. O efeito destas chaves vai ser conectar pontos externos e internos de todas as formas possíveis, mas só estamos interessados no diagrama acima, onde cada ponto externo é conectado ao vértice. Neste caso cada par de derivadas vai produzir um propagador, assim como vimos na página 102, mas pode haver uma outra contribuição, dependendo de A . O resultado será da forma:

$$G_p^{(1)}(\{x_1, \dots, x_p\}) = \int d^d y_1 \dots d^d y_p \Delta_{rs}(x_1 - y_1) \dots \Delta_{rs}(x_p - y_p) \times$$

$$\times (-) \frac{\delta}{\delta \phi_{r_1}(y_1)} \dots \frac{\delta}{\delta \phi_{r_p}(y_p)} S_{r_1 \dots r_p}$$

estou ignorando estes índices que seriam fixados por deltas de Kronecker, assim como as deltas de Dirac fixam as coordenadas

→ Isso é o que chamamos de "regra do vértice" e no caso de teorias $\lambda \phi^p$, obtemos (veja pag 102)

$$\int d^d x \lambda \delta(y_1 - x) \dots \delta(y_p - x)$$

Mas para uma teoria mais geral pode ser mais complicado. Passando para o espaço dos momentos temos:

p linhas

$$= - \int d^d x_1 \dots d^d x_p e^{i(k_1 x_1 + \dots + k_p x_p)} \frac{\delta}{\delta \phi_{\pi_1}(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta \phi_{\pi_p}(x_p)} S_{\pi_1 \dots \pi_p}$$

(eq. 108.0)

Um exemplo trivial seria:

$$S_{\mathbb{I}} = \frac{\lambda_4}{4!} \int d^d x \phi^4(x)$$

$$\times = - \int d^d x_1 \dots d^d x_4 e^{i(k_1 x_1 + \dots + k_4 x_4)} \frac{\delta}{\delta \phi(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta \phi(x_4)} \left[\frac{\lambda_4}{4!} \int d^d x \phi^4(x) \right] =$$

$$= \frac{\lambda_4}{3!} \int d^d x \frac{\delta}{\delta \phi(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta \phi(x_4)} \phi^3(x) \delta^d(x-x_1) = \frac{\lambda_4}{2!} \int d^d x \frac{\delta}{\delta \phi(x_1)} \frac{\delta}{\delta \phi(x_2)} \phi^2(x) \delta^d(x-x_1) \delta^d(x-x_2) = \dots$$

$$= - \int d^d x_1 \dots d^d x_4 d^d x e^{i(k_1 x_1 + \dots + k_4 x_4)} \lambda_4 \delta^d(x-x_1) \delta^d(x-x_2) \delta^d(x-x_3) \delta^d(x-x_4) =$$

$$= - \lambda_4 \int d^d x e^{i x(k_1 + \dots + k_4)} = - (2\pi)^d \delta^d(k_1 + \dots + k_4) \lambda_4$$

Quantização de um campo fermiônico

(Nastase 12 e 13; Peskin 3.1-3.4 [campo clássico], 3.5 [quant. canônica], 9.5 [quant. funcional]; Ryder 6.7; Ramond 5.2-5.3)

Comecemos definindo um spinor. Vimos (pg 14) que é possível construir uma representação do grupo de Lorentz tal que:

$$\Psi'(x') = M_D(\Lambda) \Psi(x)$$

(eq. 108.1)

$$M_D(\Lambda) = e^{-\frac{i}{2} \Theta_{\mu\nu} S^{\mu\nu}}$$

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

matrizes de Dirac

(eq. 108.2)

As matrizes de Dirac satisfazem a álgebra de Clifford:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2 \eta^{\mu\nu} \hat{1} \quad (\text{eq. 108.3})$$

E as matrizes $S^{\mu\nu}$ satisfazem a álgebra de Lorentz:

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i [g^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma} J^{\nu\rho}] \quad (\text{eq. 109.1})$$

Todas as expressões acima valem para um número arbitrário de dimensões e qualquer métrica (Minkowski ou Euclideana), o que vai mudar é a forma das matrizes de Dirac. Por exemplo, em três dimensões euclidianas conseguimos satisfazer 108.3 com:

$$\gamma^i = \sigma^i \quad \leftarrow \text{Pauli}$$

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i \epsilon^{ijk} \sigma^k$$

$$\{\gamma^i, \gamma^j\} = \sigma^i \sigma^j + \sigma^j \sigma^i = 2\delta^{ij} + i \epsilon^{ijk} \sigma^k + i \epsilon^{jik} \sigma^k = 2\delta^{ij}$$

e neste caso:
$$S^{ij} = \frac{i}{4} [\underbrace{\gamma^i, \gamma^j}] = -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \sigma^k \quad (\text{eq. 109.2})$$

Note que isto é a rotação em 3D de um spin 1/2

a representação que vai nos interessa é dada por:

$$\gamma^0 = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = -i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Representação Quiral ou de Weyl} \quad (\text{eq. 109.3})$$

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} (\gamma^0)^+ &= -\gamma^0 \\ (\gamma^i)^+ &= \gamma^i \end{aligned} \right\} \text{eq. 109.4} \end{aligned}$$

E podemos definir 4-vetores, para as matrizes 2x2:

$$\begin{aligned} \sigma^\mu &= (1, \sigma^i) \\ \bar{\sigma}^\mu &= (1, -\sigma^i) \end{aligned} \quad (\text{eq. 109.5})$$

De forma a re-escrever 109.3 na forma compacta:

$$\gamma^\mu = -i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{eq. 109.6})$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = - \begin{pmatrix} \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu \end{pmatrix}$$

o "i" garante a assinatura da métrica (veja abaixo) totalmente convencional (e dif. do Peskin)

$$\left. \begin{aligned} \{\mu=0, \nu=i\} \\ \text{ou} \\ \{\nu=0, \mu=i\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow - \begin{pmatrix} -\sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix} = 0$$

$$\mu=0, \nu=0 \Rightarrow - \begin{pmatrix} 1_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -2 \hat{1}_{4 \times 4}$$

$$\mu=i, \nu=j \Rightarrow - \begin{pmatrix} -\sigma^i \sigma^j & 0 \\ 0 & -\sigma^i \sigma^j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\sigma^j \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^j \sigma^i \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \{\sigma^i, \sigma^j\} & 0 \\ 0 & \{\sigma^i, \sigma^j\} \end{pmatrix} = 2 \delta^{ij} \hat{1}_{4 \times 4}$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2 g^{\mu\nu} \hat{1}_{4 \times 4} \quad g^{\mu\nu} = \text{Diag}\{-1, 1, 1, 1\} \quad (\text{Minkowski 4D})$$

Também nos interessa definir

$$\gamma_5 = -i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \quad (\text{eq. 110.1})$$

que, nesta representação (usando eq. 109.6), é: $\gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(que de fato é o objetivo desta rep. Outra rep. popular é a em que γ^0 é diagonal ao invés de γ^5 - cuidado ao comparar livros)

O gerador $S^{\mu\nu}$ agora é um objeto mais complicado (que deve conter rotações e boosts), note que a parte puramente espacial contém as rotações 3D e:

$$S^{ij} = \frac{i}{4} [\gamma^i, \gamma^j] = -\frac{i}{4} \begin{pmatrix} -[\sigma^i, \sigma^j] & 0 \\ 0 & -[\sigma^i, \sigma^j] \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \quad (\text{eq. 110.2})$$

Note que isto é o mesmo que temos em 109.2, repetido 2 vezes (se eu aplicar isto num objeto de quatro componentes, as duas "de cima" rodam como um spin 1/2 e as duas "de baixo" também, independentemente)

O próximo passo consiste em construir invariantes de Lorentz com o campo ψ . Infelizmente a primeira opção que vem a mente:

$$\psi^\dagger \psi \rightarrow \psi^\dagger \underbrace{M_D^\dagger(\Lambda) M_D(\Lambda)} \psi \neq \psi^\dagger \psi$$

M não é unitária pois alguns elementos de S não são hermiteanos (os boosts)

no entanto não é difícil obter um invariante, definindo:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 \quad (\text{eq. 110.3})$$

cuidado aqui, a convenção mais comum nos livros é (com larga margem de vantagem): $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$

de forma que:

$$= \psi^\dagger \gamma^0 \psi \rightarrow \psi^\dagger \underbrace{\gamma^0}_{= \gamma^0 M_D^{-1}(\Lambda)} M_D^\dagger(\Lambda) M_D(\psi) = \bar{\psi} \psi$$

Também podemos provar que: $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi \rightarrow \Lambda^\nu_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$

E que, portanto, a contração dele com um vetor qualquer é invariante: $V_\nu \bar{\psi} \gamma^\nu \psi \rightarrow V_\nu \bar{\psi} \gamma^\nu \psi$

Outros invariantes podem ser obtidos como potências destes no entanto, se quisermos uma teoria renormalizável, somente aceitamos os termos com dois ψ (esta afirmação terá que aguardar o curso de TQCII para ser provada, assim como a explicação do que é "renormalização")

Com isto podemos construir uma ação:

$$\boxed{S_\psi = - \int d^4x \bar{\psi} (\gamma^\mu \partial_\mu + m) \psi} \quad (\text{eq. 111.1})$$

$$\boxed{\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu}$$

Cuja solução clássica é dada pela equação de Dirac:

$$\boxed{(\not{\partial} + m) \psi = 0} \quad (\text{eq. 111.2})$$

basta fazer a variação em relação a $\bar{\psi}$, também podemos obter a equação conjugada, para $\bar{\psi}$, variando ψ .

Espinores de Weyl e Majorana

Já vimos que, nesta representação (110.2):

$$S^{ij} = -\frac{1}{2} \epsilon^{ijkl} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}$$

Também vale que: $\boxed{S^{0i} = -S^{i0} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix}}$ Boosts de Lorentz (eq. 111.3)

o que deixa óbvio (note a estrutura bloco diagonal) que a representação de Dirac é redutível (este é o grande trunfo desta representação. Podemos definir:

$$\boxed{\Psi_D^{4 \times 1} \equiv \begin{pmatrix} \Psi_L^{2 \times 1} \\ \Psi_R^{2 \times 1} \end{pmatrix}} \quad (\text{eq. 111.4})$$

$$\Psi_L^{4 \times 1} \equiv \begin{pmatrix} \Psi_L^{2 \times 1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Psi_R^{4 \times 1} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Psi_R^{2 \times 1} \end{pmatrix}$$

$$\Psi_D^{4 \times 1} = \Psi_L^{4 \times 1} + \Psi_R^{4 \times 1}$$

cuidado com o abuso de notação, em geral fica claro na equação se estamos falando do objeto de dois componentes ou o objeto de quatro componentes, então é comum suprimir este índice.

Observe as expressões para as rotações e boosts: as duas representações obtidas tem exatamente a mesma rotação, mas os boosts tem o sinal invertido. Note também que:

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{P_L \equiv \frac{1 + \gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{P_R \equiv \frac{1 - \gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad (\text{eq. 111.5})$$

$$\therefore \Psi_L = P_L \Psi_D \quad \Psi_R = P_R \Psi_D \quad (\text{eq. 112.1})$$

$$\begin{aligned} P_L^2 &= P_L & P_R^2 &= P_R \\ P_L P_R &= P_R P_L = 0 \\ P_L + P_R &= 1 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{(operadores de projeção)} \\ \text{(eq. 112.2)} \end{array}$$

$$\Psi_L + \Psi_R = P_L \Psi_D + P_R \Psi_D = (P_L + P_R) \Psi_D = \Psi_D$$

Além destas duas representações irredutíveis, ainda temos uma terceira, definida pela propriedade:

$$\overline{\Psi} = \Psi^C \quad \text{condição de realidade} \quad (\text{eq. 112.3})$$

$$\Psi^C \equiv \Psi^T C$$

A matriz C é chamada de matriz de conjugação de carga e satisfaz as seguintes propriedades (válidas em Minkowski 4D):

$$C^T = -C \quad C \gamma^\mu C^{-1} = (-\gamma^\mu)^T \quad (\text{eq. 112.4})$$

Na representação de Weyl, satisfazer estas equações escolhendo:

$$C = \begin{pmatrix} -i\sigma^2 & 0 \\ 0 & i\sigma^2 \end{pmatrix} = -i\gamma^0\gamma^2$$

$\sigma^2^T = -\sigma^2$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma^2 \end{pmatrix} = -C$$

nesta representação $C^{-1} = C^T = -C$

Os espinores que satisfizerem esta condição são chamados **Espinores de Majorana**, e no caso deles não podemos tratar $\overline{\psi}$ como independente de ψ (os dois estão ligados pela eq 112.3) e temos que modificar a ação para obter um termo cinético canonicamente normalizado:

$$S_\psi = -\frac{1}{2} \int d^4x \overline{\psi} (\not{\partial} + m) \psi$$

Esse fator global na ação não parece ter importância, e de fato não afeta a solução clássica, mas quando quantizarmos faz toda diferença ter um fator 2 no operador que estamos invertendo (obtemos um propagador que é o dobro). Fisicamente é importante notar que a ação tem dimensão de \hbar , e que as trajetórias não clássicas são suprimidas em relação a \hbar . Isto fica escondido aqui porque $\hbar = 1$.

Representações e Fenomenologia

Qual destas representações descreve os férmions na natureza? A resposta depende de qual partícula você quer descrever. Para começar note que:

$$\bar{\psi}(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi = \frac{1}{2} \bar{\psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + \frac{1}{2} \bar{\psi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \psi_R + \frac{m}{2} \bar{\psi}_L \psi_R + \frac{m}{2} \bar{\psi}_R \psi_L$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 0 \Rightarrow P_L \gamma^\mu = \gamma^\mu P_R$$

$$\bar{\psi}_L \psi_R = i(P_L \psi)^\dagger \gamma^0 (P_R \psi) = i \psi^\dagger \underbrace{P_L^\dagger \gamma^0 P_R}_{P_L} \psi = i \bar{\psi} \underbrace{P_R^2}_{1} \psi = i \bar{\psi} \psi$$

$$\bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R = i(P_R \psi)^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu (P_R \psi) = i \psi^\dagger P_R \gamma^0 \gamma^\mu P_R \psi = i \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$$

Note que o termo de massa mistura os campos R e L (isso quer dizer que as equações de movimento para ambos vão ser acopladas). O que quer dizer que é "incomodo" descrever partículas com massa em termos de spinores de Weyl, que é bem mais útil para partículas sem massa.

Os espinores de Majorana podem ser usados para descrever partículas completamente neutras (nenhuma simetria local interna) e que são a própria antipartícula.

Soluções (Clássicas) da Equação de Dirac

Começamos notando que o operador de Dirac: $\hat{D} = \not{\partial} + m$

e seu adjunto: $\hat{D}^\dagger = \not{\partial} - m$

tem a propriedade:

$$\hat{D}^\dagger \hat{D} = (\not{\partial} + m)(\not{\partial} - m) = (\not{\partial}^2 - m^2) = \hat{D}_{KG} = \hat{D}^\dagger \hat{D}$$

$$\not{\partial} \not{\partial} = \gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu = \frac{1}{2} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \partial_\mu \partial_\nu = \gamma^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \partial^2$$

simetria

o que quer dizer que qualquer campo que satisfaça $\hat{D} \psi = 0$ ou $\hat{D}^\dagger \bar{\psi} = 0$ vai satisfazer também:

$$\hat{D}_{KG} \psi = 0$$

Ou seja, as soluções da equação de Dirac têm que ser também soluções da equação de Klein-Gordon. Isso nos diz que estas são do tipo:

$$K e^{\pm i p \cdot x} \iff p^2 + m^2 = 0$$

Onde claramente o coeficiente K deve ser uma matriz, pois estes campos se transformam sob aplicação das matrizes de Dirac. Parametrizemos primeiro as soluções de frequência positiva:

$$\psi(x) = u(p) e^{i p \cdot x} \quad \begin{matrix} p^2 + m^2 = 0 \\ p^0 > 0 \end{matrix}$$

$$(\not{\partial} + m)\psi(x) = 0 \Rightarrow (i \not{p} + m) u(p) = 0$$

\uparrow
 $p = \gamma^\mu p_\mu$