Representações e Fenomenologia

Qual destas representações descreve os férmions na natureza? A resposta depende de qual partícula você quer descrever. Para começar note que:

$$\bar{\psi}(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi = \frac{1}{2}\bar{\psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + \frac{1}{2}\bar{\psi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \psi_R + \frac{m}{2}\bar{\psi}_L \psi_R + \frac{m}{2}\bar{\psi}_R \psi_L$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0 \Rightarrow P_L \gamma^\mu = \gamma^\mu P_R$$

$$\bar{\psi}_L \psi_R = i(P_L\psi)^\dagger \gamma^0 (P_R\psi) = i\psi^\dagger \underbrace{P_L^\dagger}_{P_L} \gamma^0 P_R \psi = i\bar{\psi} \underbrace{P_R^2}_{1} \psi = i\bar{\psi}\psi$$

$$\bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R = i(P_R\psi)^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu (P_R\psi) = i\psi^\dagger P_R \gamma^0 \gamma^\mu P_R \psi = i\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

Note que o termo de massa mistura os campos R e L (isso quer dizer que as equações de movimento para ambos vão ser acopladas). O que quer dizer que é "incomodo" descrever partículas com massa em termos de spinores de Weyl, que é bem mais útil para partículas sem massa.

Os espinores de Majorana podem ser usados para descrever partículas completamente neutras (nenhuma simetria local interna) e que são a própria antipartícula.

Soluções (Clássicas) da Equação de Dirac

Comecemos notando que o operador de Dirac: $\hat{\mathcal{O}}_D = \not{\partial} + m$

e seu adjunto: $\hat{\bar{\mathcal{O}}}_D = \not{\partial} - m$

tem a propriedade:

$$\hat{\mathcal{O}}_D \hat{\bar{\mathcal{O}}}_D = (\not{\partial}+m)(\not{\partial}-m) = (\partial^2 - m^2) = \hat{\mathcal{O}}_{KG} = \hat{\bar{\mathcal{O}}}_D \hat{\mathcal{O}}_D$$

$$\not{\partial}\not{\partial} = \gamma^\mu\gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu = \frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}\partial_\mu\partial_\nu = g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = \partial^2$$

simetria

o que quer dizer que qualquer campo que satisfaça $\hat{\mathcal{O}}_D \psi = 0$ ou $\hat{\bar{\mathcal{O}}}_D \bar{\psi} = 0$ vai satisfazer também:

$$\hat{\mathcal{O}}_{KG}\psi = 0$$

Ou seja, as soluções da equação de Dirac têm que ser também soluções da equação de Klein-Gordon. Isso nos diz que estas são do tipo:

$$K e^{\pm i p\cdot x} \longleftrightarrow p^2 + m^2 = 0$$

Onde claramente o coeficiente K deve ser uma matriz, pois estes campos se transformam sob aplicação das matrizes de Dirac. Parametrizemos primeiro as soluções de frequência positiva:

$$\psi(x) = u(p)e^{ipx} \qquad p^2 + m^2 = 0, \quad p^0 > 0$$

$$(\not{\partial} + m)\psi(x) = 0 \Rightarrow (i\not{p} + m)u(p) = 0$$

$\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$

As duas soluções desta equação podem ser compactadas em:

$$s = 1,2 \Rightarrow \boxed{u^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{-p\cdot\sigma}\,\xi^s \\ \sqrt{-p\cdot\bar{\sigma}}\,\xi^s \end{pmatrix}} \quad \text{(eq. 114.1)}$$

$$\xi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \xi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{A} = B \qquad B^2 = A$$

(matrizes)

Que no referencial de repouso vira:

$$\left(\sqrt{-p\cdot\sigma} = \sqrt{m\cdot\hat{1}} \right)$$

$$\vec{p} = 0 \qquad p^0 = m$$

$$u^1(p) = \sqrt{m}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u^2(p) = \sqrt{m}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

As duas soluções de frequência negativa são

$$\psi(x) = v(p)\, e^{-ipx} \qquad p^2 + m^2 = 0 \qquad p^0 > 0$$

$$\Downarrow$$

$$(-i\not{p} + m)\, v(p) = 0$$

$$\boxed{v^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{-p\cdot\sigma}\,\eta^s \\ -\sqrt{-p\cdot\bar{\sigma}}\,\eta^s \end{pmatrix}} \quad \text{(eq. 114.2)}$$

$$\eta^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \eta^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que no referencial de repouso:

$$v^1(p) = \sqrt{m}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad v^2(p) = \sqrt{m}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

As condições de normalização (usadas para obter os ξ acima) são:

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{u}^r(p)\, u^s(p) &= 2m\,\delta^{rs} \\ \bar{v}^r(p)\, v^s(p) &= -2m\,\delta^{rs} \end{aligned}} \quad \text{(eq. 114.3)}$$

Ou, em termos de $u^\dagger$ e $v^\dagger$:

$$\boxed{\begin{aligned} u^{r\dagger}(p)\, u^s(p) &= 2E_p\,\delta^{rs} \\ v^{r\dagger}(p)\, v^s(p) &= 2E_p\,\delta^{rs} \end{aligned}} \quad \text{(eq. 114.4)}$$

E valem:

$$\boxed{\begin{aligned} &\bar{u}^r(p)\, v^s(p) = \bar{v}^r(p)\, u^s(p) = 0 \\ &u^{r\dagger}(p)\, v^s(p) \neq 0 \qquad v^{r\dagger}(p)\, u^s(p) \neq 0 \\ &u^{r\dagger}(p^0, \vec{p})\, v^s(p^0, -\vec{p}) = v^{r\dagger}(p^0, -\vec{p})\, u^s(p^0, \vec{p}) = 0 \end{aligned}} \quad \text{(eq. 114.5)}$$

Quantização do campo de Dirac

Sabemos (olhando as transformações sobre rotação em 3D) que este campo descreve partículas de spin 1/2, e que portanto devem obedecer estatística de Fermi. Em termos da quantização canônica isso significa que devemos anticomutadores ao invés de comutadores para fazer a quantização

é bastante rápido mostrar que, usando: $[\psi_a(\vec{x}), \psi_b^\dagger(\vec{y})] = \delta^3(\vec{x}-\vec{y})\,\delta_{ab}$ $\quad x^0 = y^0$

(Peskin 3.5, até eq. 3.90)

chegamos a $H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s \left(E_p\, a_p^{s\dagger} a_p^s - E_p\, b_p^{s\dagger} b_p^s \right)$

operadores de criação e aniq.

energia abitrariamente negativa!

e que isso é resolvido com a quantização correta: $\{\psi_a(\vec{x}), \psi_b^\dagger(\vec{y})\} = \delta^3(\vec{x}-\vec{y})\,\delta_{ab}$

que, consistentemente, também garante que não consigamos criar duas partículas no mesmo estado, implementando o princípio de exclusão de Pauli

A lagrangeana é:

$$\mathcal{L} = -\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi = -\psi^\dagger i\gamma^0\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi^\dagger i\gamma^0\psi =$$

$$= \underbrace{+\psi^\dagger i \underbrace{\gamma^0\gamma^0}_{1}\partial_0\psi}_{i\psi^\dagger\dot{\psi}} - \psi^\dagger i\gamma^0\gamma^i\partial_i\psi - m\psi^\dagger i\gamma^0\psi$$

$$\therefore\ \pi_\psi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} = i\psi^\dagger \qquad \mathcal{H} = \pi_\psi\dot{\psi} - \mathcal{L}$$

$$= \cancel{\pi_\psi\dot{\psi}} - \underbrace{i\psi^\dagger}_{\pi_\psi}\cancel{\dot{\psi}} + \psi^\dagger i\gamma^0\gamma^i\partial_i\psi + m\psi^\dagger i\gamma^0\psi$$

$$\boxed{H = i\int d^3x\, \psi^\dagger\left[\gamma^0\gamma^i\partial_i + m\gamma^0\right]\psi}$$ (eq. 115.1)

Quantizando: $\{\psi_\alpha(\vec{x},t), \psi_\beta^\dagger(\vec{y},t)\} = \delta^3(\vec{x}-\vec{y})\,\delta_{\alpha\beta}$

$$\{\psi_\alpha(\vec{x},t), \psi_\beta(\vec{y},t)\} = \{\psi_\alpha^\dagger(\vec{x},t), \psi_\beta^\dagger(\vec{y},t)\} = 0$$

O procedimento então é o mesmo que usamos para o campo escalar, só que agora sabemos que os coeficentes da solução geral são matrizes 4x1:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{E_p}} \left(A_i(p)\, e^{ipx} + B_i(p)\, e^{-ipx} \right)$$

$i = 1, \dots, 4$

(índices espinoriais): $(\gamma^\mu)_{ij} \psi_j$

Conhecendo a solução clássica, vou parametrizar estes coeficientes na forma:

$$A_i(p) = \sum_s a^s_{\vec{p}}\, u^s_i(p) \qquad B_i(p) = \sum_s b^{s\dagger}_{\vec{p}}\, v^s_i(p)$$

função (ou conjunto de 4 funções), carrega o índice espinorial

operador que vai dar conta das relações de comutação

Assim, expandimos o campo na forma:

$$\boxed{\begin{aligned} \psi(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s \left(a^s_{\vec{p}}\, u^s(p)\, e^{ipx} + b^{s\dagger}_{\vec{p}}\, v^s(p)\, e^{-ipx} \right) \\ \bar{\psi}(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s \left(b^s_{\vec{p}}\, \bar{v}^s(p)\, e^{ipx} + a^{s\dagger}_{\vec{p}}\, \bar{u}^s(p)\, e^{-ipx} \right) \end{aligned}}$$

(eq. 116.1)

As relações de anticomutação para os campos implicam que:

$$\{ a^r_{\vec{p}}, a^{\dagger s}_{\vec{q}} \} = \{ b^r_{\vec{p}}, b^{\dagger s}_{\vec{q}} \} = (2\pi)^3\, \delta^3(\vec{p} - \vec{q})\, \delta^{rs}$$

(qualquer outra combinação = 0)

Temos, assim como no caso bosônico, um vácuo no espaço de Fock:

$$a^s_{\vec{p}} |0\rangle = b^s_{\vec{p}} |0\rangle = 0$$

E criamos estados de uma partícula agindo com os operadores de criação neste vácuo:

$$|\vec{p}, s\rangle_a = \sqrt{2E_p}\, a^{s\dagger}_p |0\rangle$$

$$|\vec{p}, s\rangle_b = \sqrt{2E_p}\, b^{s\dagger}_p |0\rangle$$

Só que os anticomutadores implicam que: $(a^{s\dagger}_p)^2 = (b^{s\dagger}_p)^2 = 0$, o que torna impossível adicionar outra partícula com mesmo momento e spin a este estado. E também:

$$|\vec{p}, s; \vec{k}, s\rangle = N\, a^{s\dagger}_p a^{s\dagger}_k |0\rangle = -N\, a^{s\dagger}_k a^{s\dagger}_p |0\rangle = -|\vec{k}, s; \vec{p}, s\rangle$$

O operador hamiltoniano será dado por:

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s E_p \left(a^{+s}_{\vec{p}} a^s_{\vec{p}} - b^s_{\vec{p}} b^{+s}_{\vec{p}} \right) =$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s E_p \left(a^{+s}_{\vec{p}} a^s_{\vec{p}} + b^{+s}_{\vec{p}} b^s_{\vec{p}} - \{ b^{+s}_{\vec{p}}, b^s_{\vec{p}} \} \right)$$

Mais uma vez temos uma energia infinita no vácuo dada pelo último termo acima. Mais uma vez definiremos o ordenamento normal. A novidade aqui é que, para passar da primeira linha acima para a segunda o sinal do termo com 2 b's foi invertido. Então se quisermos somente descartar o efeito do vácuo de forma consistente com a estatística de Fermi, devemos fazer:

$$:a^r_{\vec{p}} a^s_{\vec{q}}: = a^r_{\vec{p}} a^s_{\vec{q}}$$

$$:a^s_{\vec{q}} a^r_{\vec{p}}: = a^s_{\vec{q}} a^r_{\vec{p}} = -a^r_{\vec{p}} a^s_{\vec{q}}$$

E o mesmo deve valer para quando o produto já não começa ordenado:

$$\boxed{:a^r_{\vec{p}} a^{s+}_{\vec{q}}: = -a^{s+}_{\vec{q}} a^r_{\vec{p}}} \quad \text{(eq. 117.2)}$$

Moral da história, o ordenamento normal para férmions carrega um sinal (para vários campos multiplicados é necessário contar quantas vezes um operador fermiônico passar por outros para sair da ordem inicial e chegar na final, e multiplicar por -1 para cada passagem).

A integral de trajetória fermiônica

Precisamos então pensar em como transportar esta anti-comutação de forma consistente para o formalismo de integral de trajetória. O problema é que neste formalismo, trocamos os operadores por funções, que comutam entre si.

Podemos pensar, que no caso bôsonico, as funções são obtidas a partir dos operadores no limite:

$$[a, a^+] = \hbar \to 0$$

Então agora, deveríamos obter

$$\{a, a^+\} = \hbar \to 0$$

que não são as funções ou números usuais, pois anticomutam (seguem a chamada Álgebra de Grassmann). Podemos dividir o conjunto destes Números de Grassmann em dois:

Parte ímpar da álgebra: $a, a^+ : \{a, a^+\} = \{a, a\} = \{a^+, a^+\} = 0$

Parte par da álgebra: $aa^+ : [aa^+, aa^+] = 0$

De forma que o produto de duas funções fermiônicas (ímpar) vai ser bosônica (par)

(e é fácil ver que [par . par = par] e [ímpar . par = ímpar])

Números de Grassmann, definições e propriedades

Precisamos de funções definindas em um espaço de números complexos que anti-comutem, o que já havia sido proposto antes por Grassmann. Os números de Grassmann satisfazem a seguinte propriedade:

$$\boxed{\{\theta,\eta\} = \theta\eta + \eta\theta = 0}$$

O que tem diversas consequências:

$$\boxed{\theta^2 = 0} \quad \text{(eq. 118.1)}$$

$$\underbrace{\eta_1\eta_2}\eta_3 = -\eta_1\eta_3\eta_2 = \eta_3\underbrace{\eta_1\eta_2}$$

um par de números de Grassmann se comporta como um número usual

$$f(\theta,\eta) = \underbrace{a_0}_{\in\mathbb{C}} + \underbrace{a_1}_{\in\mathbb{C}}\theta + \underbrace{a_2}_{\in\mathbb{C}}\eta + \underbrace{a_3}_{\in\mathbb{C}}\theta\eta + \cancel{a_4\theta^2\eta} + \cancel{a_5\theta\eta^2}$$

$$0 \qquad 0$$

$$f(\theta,\eta,\rho) = a_0 + a_1\theta + a_2\eta + a_3\rho + a_4\theta\eta + a_5\theta\rho + a_6\eta\rho$$

Há uma ambiguidade na definição de derivada (temos que decidir se ela age pela direita ou esquerda):

$$\frac{\partial^L}{\partial\theta}f(\theta,\eta) = a_1 + a_3\eta \qquad \frac{\partial^R}{\partial\theta}f(\theta,\eta) = a_1 - a_3\eta$$

$$\frac{\partial^L}{\partial\eta}f(\theta,\eta) = a_2 - a_3\theta \qquad \frac{\partial^R}{\partial\eta}f(\theta,\eta) = a_2 + a_3\theta$$

Definiremos: $\boxed{\dfrac{\partial}{\partial\eta} = \dfrac{\partial^L}{\partial\eta}}$ (quando for necessário usar a derivada pela direita indicaremos isto explicitamente)

$$\eta\frac{\partial f}{\partial\eta} = a_2\eta - a_3\eta\theta = \underbrace{a_2\eta + a_3\theta\eta}_{f}$$

$$\eta f = a_0\eta + a_1\eta\theta \Rightarrow \frac{\partial}{\partial\eta}(\eta f) = \overbrace{a_0 + a_1\theta}$$

$$\left(\eta\frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{\partial}{\partial\eta}\eta\right)f = f$$

A consequência é que a regra do produto também fica modificada:

$$\frac{\partial}{\partial\eta}(\eta f) = f - \eta\frac{\partial f}{\partial\eta}$$

E num caso mais geral:

$$\frac{\partial}{\partial \eta_j}\left(\eta_1 \eta_2 \eta_3 \cdots \eta_n\right) = \delta_{1j}\eta_2\eta_3\cdots\eta_n - \delta_{2j}\eta_1\eta_3\cdots\eta_n + \delta_{3j}\eta_1\eta_2\eta_4\cdots\eta_n - \cdots$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta_k} e^{\sum \eta_i \theta_i} = \theta_k e^{\sum \eta_i \theta_i} \qquad \frac{\partial}{\partial \theta_k} e^{\sum \eta_i \theta_i} = -\eta_k e^{\sum \eta_i \theta_i}$$

$$\boxed{\left\{\eta_i, \frac{\partial}{\partial \eta_j}\right\} = \delta_{ij}} \quad \text{(eq. 119.1)} \qquad \boxed{\left\{\frac{\partial}{\partial \eta}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right\} = 0} \quad \text{(eq. 119.2)}$$

Para definir integrais é natural assumir que os infinitesimais de Grassmann também anti-comutam:

$$\{\theta, d\eta\} = 0$$

$$\{d\theta, d\eta\} = 0$$

que resolve outra ambiguidade de sinal (se fizemos primeiro a integral de fora o sinal fica invertido)

$$\int d\theta\, d\eta\, f(\theta,\eta) \equiv \int d\theta \left[\int d\eta\, f(\theta,\eta)\right]$$

$$f(\theta,\eta) = 1 \Rightarrow \left(\int d\theta\right)^2 = \int d\theta \int d\eta = \int d\theta\, d\eta = -\int d\eta\, d\theta = -\left(\int d\theta\right)^2$$

$$\boxed{\int d\theta = 0} \quad \text{(eq. 119.3)}$$

$F(\theta) = \int d\theta\, f(\theta)$

$F(\theta)$ tem que ser linear, já que todas expansões aqui só vao até ordem 1

$$\int d\theta\, f(\theta) = \int d\theta\,(a_1 + a_2\theta) = a_2 \int d\theta\, \theta \Rightarrow \int d\theta\, \theta = ?$$

Para fixar esta parte basta notar que queremos:

$$\theta \to \theta + \eta \Rightarrow \int d\theta\, f(\theta) = \int d\theta\, f(\theta+\eta)$$

$$F(\theta) = F(\theta+\eta)$$

$$A + B\theta = A + B(\theta+\eta)$$

$$\forall \theta, \eta \Rightarrow B = 0$$

$\int d\theta\, \theta = A$ deve portanto ser par, tomaremos:

$$\boxed{\int d\theta\, \theta = 1} \quad \text{(eq. 119.4)}$$

$$\int d\theta\, f(\theta,\eta) = \int d\theta\,(a_0 + a_1\theta + a_2\eta + a_3\theta\eta) = a_1 + a_3\eta = \frac{d}{d\theta} f(\theta,\eta)$$

o que pode ser mostrado em geral, ou seja a integração e a diferenciação tem o mesmo efeito.

A função delta também pode ser definida, usando uma função par de η: $g(\eta)$

$$g(\eta) = \underbrace{a}_{+} + \underbrace{\theta\eta}_{+}$$

queremos:

$$\underbrace{\int d\eta\, \delta(\eta-\rho)\, g(\eta)} = \underbrace{g(\rho)}$$

$$\int d\eta\, \delta(\eta-\rho)[a+\theta\eta] = a\underbrace{\int d\eta\, \delta(\eta-\rho)}_{1} + \underbrace{\int d\eta\, \delta(\eta-\rho)\,\theta\eta}_{\theta\rho}$$

O que é obtido com: $\boxed{\delta(\eta-\rho) = \eta-\rho}$ (eq. 120.1)

$$\int d\eta\, \delta(\eta-\rho) = \underbrace{\int d\eta\, \eta}_{1} - \underbrace{\int d\eta\, \rho}_{0}$$

$$\int d\eta\, \delta(\eta-\rho)\theta\eta = \underbrace{\int d\eta\, \eta\theta\eta}_{0} - \underbrace{\int d\eta\, \rho\theta\eta}_{-\theta\rho}$$

A mudança de variáveis multiplicativa (por um número complexo) na integração também parece mais com uma mudança em derivadas:

$$\int dx\, x = 1 \qquad y = ax \qquad \int dy\, y = 1 = a\int dy\, x \qquad \boxed{dy = \frac{1}{a}dx}$$ (eq. 120.2)

aqui termina a lec 12 do Nastase

Para números de Grassmann complexos:

$$(\theta\eta)^* \equiv \eta^*\theta^* = -\theta^*\eta^* \quad \left\{ \int d\eta = \int d\eta^* = 0 \quad \& \quad \int d\eta\,\eta = \int d\eta^*\eta^* = 1 \right.$$