

$$e^{-\eta^* \eta} = 1 - \eta^* \eta$$

$$\int d\eta^* d\eta e^{-\eta^* \eta} = \int d\eta^* d\eta (1 - \eta^* \eta) = \int d\eta^* d\eta (1 + \eta \eta^*) = b$$

$$\int d\eta^* d\eta e^{-\eta^* \eta} = b \quad (\text{eq. 121.1})$$

$$\int d\eta^* d\eta \eta \eta^* e^{-\eta^* \eta} = \int d\eta^* d\eta \eta \eta^* (1 - \eta^* \eta) = 0$$

$$\int d\eta^* d\eta \eta \eta^* e^{-\eta^* \eta} = \frac{1}{b} \cdot b \quad (\text{eq. 121.2})$$

$$\dots \left\{ \int d\eta^* d\eta \eta \eta^* e^{-\eta^* \eta} = \frac{d}{d\eta} \int d\eta^* d\eta e^{-\eta^* \eta} \right.$$

Isto é análogo ao que teríamos obtido para integral gaussiana de variáveis complexas:

$$\int \frac{d\bar{z}}{(2\pi i)^{1/2}} \frac{dz}{(2\pi i)^{1/2}} e^{-\bar{z} \cdot b \cdot z} = \frac{1}{b} \quad (\text{eq. 121.3})$$

$$\int \frac{d\bar{z}}{(2\pi i)^{1/2}} \frac{dz}{(2\pi i)^{1/2}} \bar{z} z e^{-\bar{z} \cdot b \cdot z} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{b} \quad (\text{eq. 121.4})$$

$$\dots \left\{ \frac{d}{d\bar{z}} \int \frac{d\bar{z}}{(2\pi i)^{1/2}} \frac{dz}{(2\pi i)^{1/2}} e^{-\bar{z} \cdot b \cdot z} = \dots \right.$$

Exercício extra (incluir na lista da lecture 13): provar 121.3 e 121.4

Suponha um caso bidimensional:

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \quad \bar{\eta} = (\eta_1^* \quad \eta_2^*)$$

$$\begin{aligned} (\bar{\eta} \eta)^2 &= (\eta_1^* \eta_1 + \eta_2^* \eta_2)^2 = \eta_1^* \eta_1 \eta_2^* \eta_2 + \eta_2^* \eta_2 \eta_1^* \eta_1 = \\ &= 2 \eta_1^* \eta_1 \eta_2^* \eta_2 \end{aligned}$$

$$e^{-\bar{\eta} \eta} = 1 - \eta_1^* \eta_1 + \eta_2^* \eta_2 + \eta_1^* \eta_1 \eta_2^* \eta_2$$

$$d\bar{\eta} d\eta \equiv d\eta_1^* d\eta_1 d\eta_2^* d\eta_2$$

$$\int d\bar{\eta} d\eta e^{-\bar{\eta} \eta} = \int d\eta_1^* d\eta_1 d\eta_2^* d\eta_2 \eta_1^* \eta_1 \eta_2^* \eta_2 = 1$$

$$\int d\bar{\eta} d\eta e^{-\bar{\eta} \eta} = 1$$

(eq. 122.1)

Fazendo uma mudança de variáveis, obtemos:

$$\eta = M \alpha \quad M, N \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$$

$$\bar{\eta} = \bar{\alpha} N$$

$$\begin{aligned} \eta_1 \eta_2 &= (M_{11} \alpha_1 + M_{12} \alpha_2) (M_{21} \alpha_1 + M_{22} \alpha_2) = \\ &= (M_{11} M_{22} + M_{12} M_{21}) \alpha_1 \alpha_2 = \text{DET}[M] \alpha_1 \alpha_2 \end{aligned}$$

$$\text{Então, se queremos que: } \int d\eta_1 d\eta_2 \eta_1 \eta_2 = \int d\alpha_1 d\alpha_2 \alpha_1 \alpha_2$$

$$\text{temos que exigir: } d\eta_1 d\eta_2 = (\text{DET}[M])^{-1} d\alpha_1 d\alpha_2$$

(como já tínhamos visto na mudança de uma variável)

$$\text{da mesma forma: } d\eta_1^* d\eta_2^* = (\text{DET}[N])^{-1} d\alpha_1^* d\alpha_2^*$$

então:

$$\begin{aligned} 1 &= \int d\eta_1^* d\eta_1 d\eta_2^* d\eta_2 e^{-\bar{\eta} \eta} = \int \frac{d\alpha_1^* d\alpha_2^*}{\text{DET}[N]} \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{\text{DET}[M]} e^{-\bar{\alpha} N M \alpha} = \\ &= \frac{1}{\text{DET}[NM]} \int d\alpha_1^* d\alpha_1 d\alpha_2^* d\alpha_2 e^{-\bar{\alpha} \underbrace{NM}_A \alpha} \end{aligned}$$

$$\int d\bar{\alpha} d\alpha e^{-\bar{\alpha} \cdot A \alpha} = \text{DET}[A]$$

(eq. 122.2)

Provamos isso para 2D, mas a mesma coisa poderia ter sido feita para mais dimensões.

$$\text{compare com: } \int \frac{d^n \vec{z}^*}{(2\pi i)^n} \frac{d^n \vec{z}}{(2\pi i)^n} e^{-\vec{z}^* \cdot A \vec{z}} = (\text{DET} A)^{-1}$$

Usando derivadas em a, podemos também mostrar que:

$$\int \prod_i d\bar{\alpha}_i d\alpha_i \alpha_i \bar{\alpha}_j e^{-\bar{\alpha} \cdot A \alpha} = (A^{-1})_{ij} \mathcal{D}\epsilon_T [A] \quad (\text{eq. 123.1})$$

Podemos definir uma "função de Grassmann" como:

$$\Psi(x) = \sum_i \psi_i \phi_i(x)$$

↘ $\{\phi_i\}$ base de funções usuais
↘ coeficientes são números de Grassmann

E generalizar as integrais funcionais Gaussianas para funções deste tipo:

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-\bar{\psi} \cdot A \psi} = \mathcal{D}\epsilon_T [A] \quad (\text{eq. 123.2})$$

O Oscilador Harmônico Fermiônico

O operador hamiltoniano de um oscilador harmônico quantizado como um férmion, antes de dispensarmos a energia do vácuo, é:

$$\hat{H}_F = \omega \left(\hat{b}^\dagger \hat{b} - \frac{1}{2} \right) \quad \{ \hat{b}, \hat{b}^\dagger \} = 1$$

Consideremos, assim como no caso bosônico, o estado coerente:

$$|\beta\rangle = e^{\hat{b}^\dagger \beta} |0\rangle = (1 + \hat{b}^\dagger \beta) |0\rangle = (1 - \beta \hat{b}^\dagger) |0\rangle$$

$$\hat{b} |\beta\rangle = \left(\hat{b} + \beta \hat{b} \hat{b}^\dagger \right) |0\rangle = \beta |0\rangle = \beta (1 - \beta \hat{b}^\dagger) |0\rangle = \beta |\beta\rangle$$

Temos a relação de completeza:

$$\hat{1} = \int d\beta^* d\beta |\beta\rangle \langle \beta^*| e^{-\beta^* \beta}$$

E o hamiltoniano na presença de fontes (oscilador forçado) será escrito como:

$$H(b^\dagger, b; t) = \omega b^\dagger b - b^\dagger \eta(t) - \bar{\eta}(t) b$$

Queremos calcular a amplitude de transição:

$$F(\beta^*, t'; \beta, t) = \langle \beta^*, t' | \beta, t \rangle$$

para a qual seguimos os mesmos passos de sempre para encontrar a integral funcional:

$$F(\beta^*, t'; \beta, t) = \int \mathcal{D}\beta^* \mathcal{D}\beta \exp \left\{ i \int_t^{t'} dt \left[-i \dot{\beta}^*(t) \beta(t) - H(\beta, \dot{\beta}, t) \right] + \beta^*(t') \beta(t) \right\}$$

As equações de Hamilton na presença de fontes são:

$$\begin{aligned} \dot{\beta}^*(z) - i\omega \beta^*(z) + i\bar{\eta}(z) &= 0 \\ \dot{\beta}(z) + i\omega \beta(z) - i\eta(z) &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \beta(t) &= \beta \\ \beta^*(t') &= \beta^* \end{aligned} \quad (\text{eq. 124.1})$$

Com soluções:

$$\begin{aligned} \beta_{cl}(z) &= \beta e^{i\omega(t-z)} + i \int_t^z e^{i\omega(z-s)} \eta(s) ds \\ \beta^*_{cl}(z) &= \beta^* e^{i\omega(z-t')} + i \int_z^{t'} e^{i\omega(z-s)} \bar{\eta}(s) ds \end{aligned} \quad (\text{eq. 124.2})$$

Que podemos projetar no vácuo fazendo: $\left. \begin{aligned} \beta &= \beta^* = 0 \\ t &\rightarrow -\infty \\ t' &\rightarrow +\infty \end{aligned} \right\}$

E neste caso (exercício, mas a dedução prossegue de maneira análoga ao caso bosônico - pg 79):

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = F(0, \infty; 0, -\infty) = \langle 0 | 0 \rangle \exp \left\{ - \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} ds e^{i\omega(t-s)} \bar{\eta}(s) \eta(s) \right\} \quad (\text{eq. 124.2})$$

Generalizando para o caso de um campo (em 0+1 dim), teríamos:

$\beta \rightarrow \psi \quad \beta^* \rightarrow \bar{\psi}$

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ i \int dt \left[\underbrace{-i \dot{\bar{\psi}} \psi}_{i \bar{\psi} \dot{\psi}} - \omega \bar{\psi} \psi + \bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi \right] \right\} =$$

$$= \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ i \int dt \left[\bar{\psi} (i \dot{\psi} - \omega) \psi + \bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi \right] \right\} =$$

$\mathcal{D}_F^{-1} = -i(i \dot{\psi} - \omega)$

$$= \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ \int dt \left[-\bar{\psi} D_F^{-1} \psi \right] + \lambda \int dt \left[\bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi \right] \right\}$$

$$\therefore Z[\eta, \bar{\eta}] = Z[0, 0] \exp \left\{ - \int ds dz \bar{\eta}(s) D_F(s, z) \eta(z) \right\} \quad (\text{eq. 125.1})$$

$$D_F(s, z) = \left[-\lambda (\lambda \partial_t - \omega) \right]^{-1} = \lambda \int \frac{dE}{2\pi} \frac{e^{-iE(s-z)}}{E - \omega + i\epsilon} = \Theta(s-z) e^{-i\omega(s-z)} \quad (\text{eq. 125.2})$$

Note que: (1) Temos apenas um polo, em $E = \omega - i\epsilon$

(2) Isso significa que se fizemos a integral no hemisfério superior ($\text{Im } E > 0$) ela dá zero, e somos forçados a fazer isso se ($s < \tau$), portanto a integral é zero para ($s < \tau$). No outro hemisfério (obrigatório se $s > \tau$) pegamos o polo e obtemos o resultado não nulo acima.

$$-iE(s-z) \sim \text{Im}(E)(s-z)$$

(3) Basta substituir a última expressão em 125.1 para obter 124.2 (incluindo o limite de integração, que impõe $s > \tau$)

Passando para o espaço Euclidiano: $\tau = -i t_E$

$$Z_E[\eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ \int dt_E \bar{\psi}_E (-\partial_{t_E} - \omega) \psi_E + \int dt_E \bar{\psi}_E \eta_E + \bar{\eta}_E \psi_E \right\}$$

suprimindo o "E"

$$= Z[0, 0] \exp \left\{ \int dz ds \bar{\eta}(s) D(s, z) \eta(z) \right\}$$

$$-S_E = -\bar{\psi} \cdot D^{-1} \psi + \bar{\psi} \cdot \eta + \bar{\eta} \cdot \psi \quad (\text{eq. 125.3})$$

$$D[s, z] = (\partial_t + \omega)^{-1} = \lambda \int \frac{dE}{2\pi} \frac{e^{-iE(s-z)}}{E + i\omega} \quad (\text{eq. 125.4})$$

E rodando de volta para Minkowski com $E_E = (-i + \epsilon) E$ (para evitar o polo), voltamos ao propagador em 125.2

Agora basta aumentar o número de coordenadas espaciais para obter uma teoria de campo. A lagrangeana (em Mink.) é:

$$\mathcal{L}_F^{(M)} = -\bar{\psi} (\not{\partial} + m) \psi$$