E exigindo a normalização:

$$Tr[\Theta_i \Theta_j] = 4\delta_{ij}$$

Rigorosamente: $\Theta = \{\hat{1}, i\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma_5, \gamma^0\gamma^5, i\gamma^1\gamma^5, i\gamma^2\gamma^5, i\gamma^3\gamma^5,$
$\gamma^{01}, \gamma^{02}, \gamma^{03}, i\gamma^{12}, i\gamma^{13}, i\gamma^{23}\}$

Temos a relação de completeza:

$$\delta^{\beta}{}_{\alpha}\,\delta^{\delta}{}_{\gamma} = \frac{1}{4}(\Theta_i)^{\delta}{}_{\alpha}(\Theta_i)^{\beta}{}_{\gamma}$$

SOMADO

Que leva a uma eq. equivalente a 135.3:

$$\boxed{(\overline{\Psi}_1 A \Psi_2)(\overline{\Psi}_3 B \Psi_4) = -\frac{1}{4}(\overline{\Psi}_1 A \Theta_i B \Psi_4)(\overline{\Psi}_3 \Theta_i \Psi_2)} \quad \text{(eq. 136.1)}$$

Dada a base 135.4, não precisamos nos preocupar com "estruturas" de Dirac mais complicadas, pois podem ser escritas nessa base. Por exemplo:

$$\gamma_{[\mu\nu\rho]} \equiv \underbrace{\gamma_{[\mu}\gamma_{\nu}\gamma_{\rho]}}_{\text{produto completamente antissimétrico}} \propto \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^{\sigma}\gamma_5$$

$\mu\nu\rho - \nu\mu\rho - \mu\rho\nu + \rho\mu\nu - \rho\nu\mu + \nu\rho\mu$

$$\gamma_{[\mu\nu\rho\sigma]} \propto \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_5$$

Definindo a terminologia, dado um bilinear $\overline{\Psi}\Gamma\Psi$, chamamos:

texto

$\Gamma = \hat{1} \Rightarrow \overline{\Psi}\Psi$ escalar

$\Gamma = \gamma_5 \Rightarrow \overline{\Psi}\gamma_5\Psi$ pseudo-escalar

$\Gamma = \gamma^{\mu} \Rightarrow \overline{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi$ vetor

$\Gamma = \gamma^{\mu}\gamma_5 \Rightarrow \overline{\Psi}\gamma^{\mu}\gamma_5\Psi$ pseudo-vetor ou vetor axial

$\Gamma = \gamma^{\mu\nu} \Rightarrow \overline{\Psi}\gamma^{\mu\nu}\Psi$ tensor antissimétrico

Se ψ satisfaz a equação de Dirac, vemos que a corrente vetorial é conservada:

$$j^\mu \equiv \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \Longrightarrow \boxed{\partial_\mu j^\mu = \underbrace{(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu}_{\not\partial\bar{\psi} = m\bar{\psi}}\psi + \bar{\psi}\underbrace{\gamma^\mu\partial_\mu\psi}_{\not\partial\psi = -m\psi} = m\bar{\psi}\psi - m\bar{\psi}\psi = 0} \quad \text{(eq. 137.1)}$$

No entanto a corrente axial:

$$\partial_\mu j^{\mu 5} \equiv \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi \Rightarrow \partial_\mu j^{\mu 5} = (\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\gamma_5\psi + \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\partial_\mu\psi =$$

$$= \not\partial\bar{\psi}\gamma_5\psi - \bar{\psi}\gamma_5\not\partial\psi = 2m\bar{\psi}\gamma_5\psi$$

só é conservada se o férmion em questão não tiver massa: $\boxed{m = 0 \Rightarrow \partial_\mu j^{\mu 5} = 0}$ (eq. 137.2)

Simetrias C, P e T para férmions

Além da simetria de Lorentz (uma transformação contínua do espaço tempo) podemos ver se a nossa Lagrangeana é simetrica sobre transformações discretas do espaço tempo. Definimos:

Transformação de Paridade: $P: \quad (t, \vec{x}) \rightarrow (t, -\vec{x})$

Inversão temporal: $T: \quad (t, \vec{x}) \rightarrow (-t, \vec{x})$

Estas transformações podem ou não ser simetrias, não há nada que as exija a priori. Embora estas transformações não sejam contínuas, elas mantém $s^2 = \vec{x}^2 - t^2$ invariante e fazem parte do grupo de Lorentz, que pode ser dividido:

Transformações de Lorentz (parte contínua do grupo)

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{L}_+^\uparrow \arrow[r, leftrightarrow, "P"] \arrow[d, leftrightarrow, "T"'] & \mathbf{L}_-^\uparrow = P\mathbf{L}_+^\uparrow \arrow[d, leftrightarrow, "T"] & \text{“orthochronous”} \\
\mathbf{L}_+^\downarrow = T\mathbf{L}_+^\uparrow \arrow[r, leftrightarrow, "P"'] & \mathbf{L}_-^\downarrow = PT\mathbf{L}_+^\uparrow & \text{“nonorthochronous”} \\
\text{“proper”} & \text{“improper”} &
\end{tikzcd}$$

Podemos ainda definir uma outra transformação:

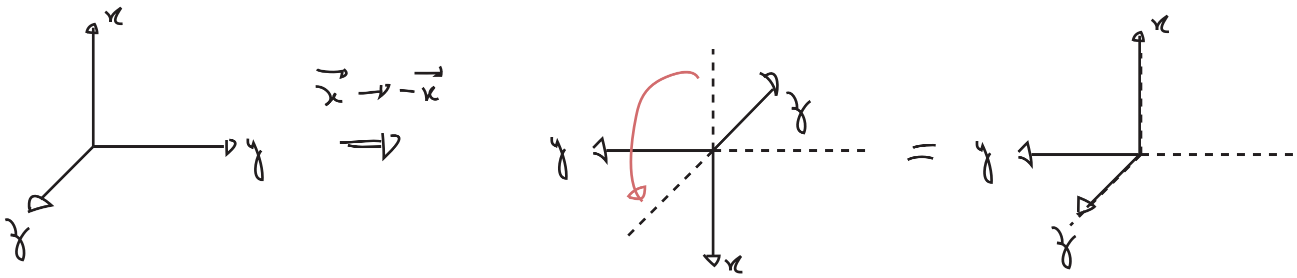
Conjugação de Carga: $C:$ PARTÍCULA $\longleftrightarrow$ ANTIPARTÍCULA

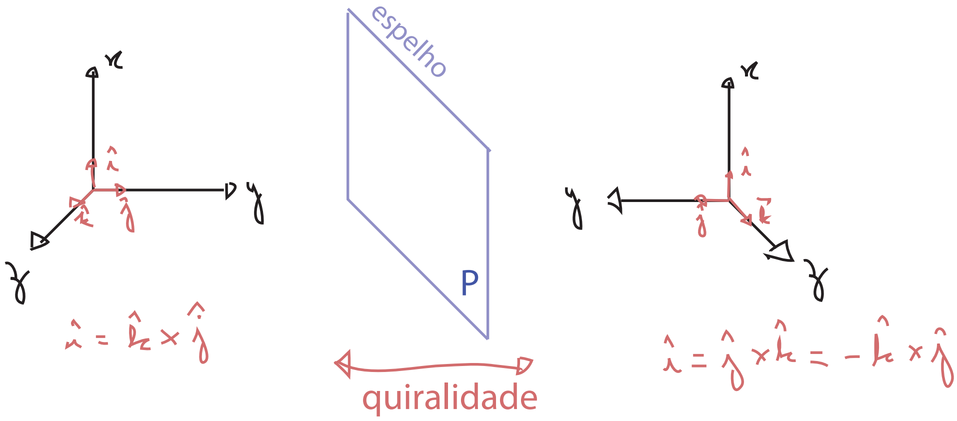
(veremos mais a frente como definir isso))

Por muito tempo acreditou-se que as simetrias C, P e T eram, SEPARADAMENTE, simetrias da física, pois tanto a gravitação quanto o eletromagnetismo (e depois as interações fortes) respeitavam esta simetria, mas aí as interações fracas vieram para estragar a alegria: as primeiras medidas indicavam que a teoria era invariante sobre transformações CP, mas não C e P separadamente (a quebra da simetria de paridade foi bastante surpreendente). Sabemos hoje que há também uma pequena violação de CP gerada pelas interações fracas e esperamos uma violação ainda maior proveniente de alguma teoria além do modelo padrão, pois esta é necessária para explicar a assimetria entre matéria e antimatéria. A simetria sobre transformações CPT no entanto deve ser respeitada (segundo o Teorema CPT, que assume uma série de coisas "sensatas": invariancia de Lorentz da teoria e do vácuo, energia tem um mínimo global, comutatividade das coordenadas espaciais, localidade, unitariedade - uma prova do teorema e mais referências podem ser encontradas na seção 5.8 do Weinberg) o que implica uma violação de T. Vamos encontrar representações destas transformações:

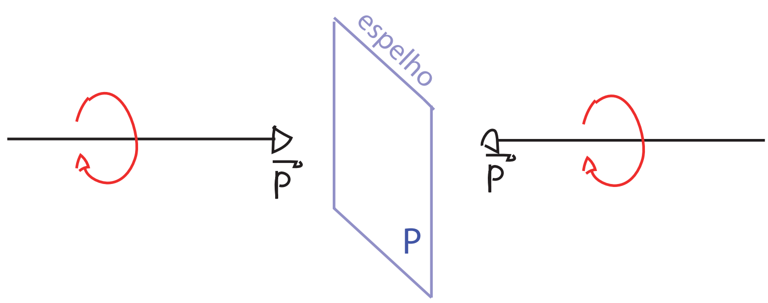
Paridade:

Primeiramente note que P é o mesmo que ocorre em uma reflexão no espelho:





Isso quer dizer, dado uma partícula com spin (ou helicidade ou qualquer momento angular), cuja projeção da direção do momento é representada por uma rotação em torno do eixo definido por este, sofrerá a seguinte transformação:



Note que o momento é invertido mas não o spin.

Se codificarmos toda a ação de P como um operador unitário agindo sobre os outros operadores da teoria (os de criação e aniquilação), isto implica que:

$$P a^s_{\vec{p}} P^{-1} = \underbrace{\eta_a}_{} a^s_{-\vec{p}} \qquad P b^s_{\vec{p}} P^{-1} = \underbrace{\eta_b}_{\text{possíveis fases}} b^s_{-\vec{p}} \qquad \text{(eq. 138.1)}$$

Aplicar P duas vezes deveria nos trazer de volta ao sistema original, logo: $\boxed{P^2 = \mathbb{1}}$ (eq. 139.1)

$$P^\dagger \underset{\text{unitária}}{=} \boxed{P^{-1} = P}$$ (eq. 139.2)

$\therefore\ \eta_a^2 = \eta_b^2 = \pm 1$ (sinal que sempre vai sumir em bilineares)

definindo: $\tilde{p} = (p^0, -\vec{p})$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \gamma^0 = -i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{-p\cdot\sigma}\,\xi \\ \sqrt{-p\cdot\bar{\sigma}}\,\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{-\tilde{p}\cdot\bar{\sigma}}\,\xi \\ \sqrt{-\tilde{p}\cdot\sigma}\,\xi \end{pmatrix} = i\gamma^0 u(\tilde{p})$$

$$\begin{aligned}\bar{\sigma} &= (1, -\vec{\sigma}) \\ \sigma &= (1, \vec{\sigma})\end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} p\cdot\sigma = -p^0\sigma^0 + \vec{p}\cdot\vec{\sigma} = \tilde{p}\cdot\bar{\sigma} \\ p\cdot\bar{\sigma} = -p^0\sigma^0 - \vec{p}\cdot\vec{\sigma} = \tilde{p}\cdot\sigma \end{cases}$$

$$v(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{-p\cdot\sigma}\,\xi \\ -\sqrt{-p\cdot\bar{\sigma}}\,\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{-\tilde{p}\cdot\bar{\sigma}}\,\xi \\ -\sqrt{-\tilde{p}\cdot\sigma}\,\xi \end{pmatrix} = -i\gamma^0 v(\tilde{p})$$

então:

Note que P só agiu sobre a e b

$$P\psi(x)P^\dagger = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}}\sum_s \left(\eta_a\, a^s_{-\vec{p}}\, u^s(p)\, e^{ipx} + \eta_b^*\, b^{s\dagger}_{-\vec{p}}\, v^s(p)\, e^{-ipx}\right) =$$

$$\boxed{= \int \frac{d^3\tilde{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}}\sum_s \left(\eta_a\, a^s_{\vec{p}}\, i\gamma^0 u^s(\tilde{p})\, e^{i\tilde{p}(t,-\vec{x})} - \eta_b^*\, b^{s\dagger}_{\vec{p}}\, i\gamma^0 v^s(\tilde{p})\, e^{-i\tilde{p}(t,-\vec{x})}\right)}$$

(note que a transformação de x saiu como esperado) (eq. 139.3)

texto

Para que a integral acima seja outro campo ψ, ou seja, para que $\psi(x)|0\rangle$ tenha paridade bem definida, exigimos:

$\eta_b^* = -\eta_a$ (estamos escolhendo uma representação ao fazer isso)

neste caso: $\boxed{P\psi(x)P = \eta_a\, i\gamma^0\,\psi(t,-\vec{x})}$ (eq. 139.4)

$$(P\psi(x)P)^\dagger = P\psi^\dagger(x)P = -i\eta_a^*\,\psi^\dagger(t,-\vec{x})\underbrace{\gamma^{0\dagger}}_{-\gamma^0} = i\eta_a^*\,\psi^\dagger(t,-\vec{x})\gamma^0$$

$$\therefore\ \boxed{P\bar{\psi}(x)P} = (P\psi(x)P)^\dagger i\gamma^0 \boxed{= i\eta_a^*\,\bar{\psi}(t,-\vec{x})\gamma^0}$$ (eq. 139.5)

Vejamos agora as propriedades dos bilineares. O escalar de fato se comporta como tal:

$$\boxed{\bar\psi\psi} \xrightarrow{P} P\bar\psi\psi P = P\bar\psi \underbrace{PP}_{1}\psi P = -\underbrace{|\eta_a|^2}_{1}\,\bar\psi(t,-\vec{x})\underbrace{(\gamma^0)^2}_{-1}\psi(t,-\vec{x}) = \boxed{(\bar\psi\psi)(t,-\vec{x})}$$

(eq. 140.1)

já o pseudo-escalar (daí o “pseudo”):

$$\boxed{\bar\psi\gamma_5\psi} \xrightarrow{P} P\bar\psi P\gamma_5 P\psi P = -\bar\psi(t,-\vec{x})\,\gamma^0\underbrace{\gamma_5\gamma^0}_{-1}\psi(t,-\vec{x}) = \boxed{-(\bar\psi\gamma_5\psi)(t,-\vec{x})}$$

(eq. 140.2)

e:

$$\boxed{\bar\psi\gamma^\mu\psi} \xrightarrow{P} -\bar\psi(t,-\vec{x})\underbrace{\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0}\psi(t,-\vec{x}) = \boxed{(-1)^\mu(\bar\psi\gamma^\mu\psi)(t,-\vec{x})}$$

(eq. 140.3)

$\mu=0 \Rightarrow -\gamma^0$

$\mu=i \Rightarrow +\gamma^i$

$$(-1)^\mu = \begin{cases} 1 & \mu = 0 \\ -1 & \mu \neq 0 \end{cases}$$

(a parte espacial inverte de sinal e a temporal não, exatamente o que esperávamos de um vetor sob uma transformação de paridade)

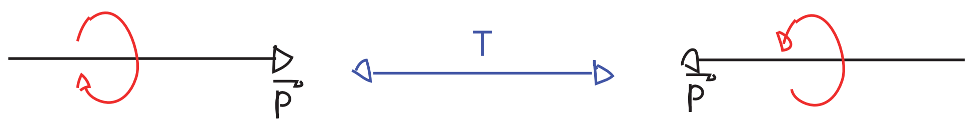
$$\boxed{\bar\psi\gamma^\mu\gamma_5\psi} \xrightarrow{P} -\bar\psi(t,-\vec{x})\,\gamma^0\gamma^\mu\underbrace{\gamma_5}_{\text{sinal extra}}\gamma^0\psi(t,-\vec{x}) = \boxed{-(-1)^\mu(\bar\psi\gamma^\mu\psi)(t,-\vec{x})}$$

(eq. 140.4)

(como um vetor, mas com sinal errado, daí o pseudo-vetor)

Inversão Temporal:

A inversão temporal reverte na direção do tempo, isso significa que vamos inverter o momento e o sentido das rotações (e do spin):



queremos então: $\begin{cases} \vec{p} \longrightarrow -\vec{p} \\ (t,\vec{x}) \longrightarrow (-t,\vec{x}) \end{cases}$

Mas já vimos acima que a inversão do momento, por meio de um operador linear, inverte o sinal da posição e não do tempo. Este aparente beco sem saída aparece porque T não pode ser implementada como um operador linear (tem uma prova disso na pg 67 do Peskin) mas sim por um operador antilinear:

$$T\underbrace{z}_{\text{C-NUMBER}} = z^* T$$

e então:

$$\boxed{T a^s_{\vec{p}} T = a^{-s}_{-\vec{p}}} \quad \boxed{T b^s_{\vec{p}} T = -b^{-s}_{-\vec{p}}}$$

(eq. 140.5)

A antilinearidade implica em:

$$T a^s_{\vec{p}}\, u^s(p)\, e^{ipx}\, T = a^{-s}_{-\vec{p}}\, [u^s(p)]^* e^{-ipx}$$

$$T b^{s\dagger}_{\vec{p}}\, v^s(p)\, e^{-ipx}\, T = -(b^{-s}_{-\vec{p}})^\dagger\, [v^s(p)]^* e^{ipx}$$

Considere uma base de spin mais geral do que $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, com a orientação do spin dada por dois ângulos θ e ϕ em relação ao eixo z:

$$\xi(\uparrow) = R(\theta,\phi)\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{\hat{z}} = \begin{pmatrix}\cos(\theta/2)\\ e^{i\phi}\,\mathrm{sen}(\theta/2)\end{pmatrix}$$

$$\xi(\downarrow) = R(\theta,\phi)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-e^{i\phi}\,\mathrm{sen}(\theta/2)\\ \cos(\theta/2)\end{pmatrix}$$

$$\xi^s \begin{cases} \xi^1 = \xi(\uparrow) \\ \xi^2 = \xi(\downarrow)\end{cases} \qquad \xi^s = (\xi(\uparrow), \xi(\downarrow))$$

preciso achar ξ^{-s}

dado que: $\vec{\sigma}\,\sigma_2 = \sigma_2\,(-\vec{\sigma}^*)$

Se escolhermos um eixo $\vec{n}$ tal que: $\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\,\xi^+ = +\xi^+$ então $(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\underbrace{(-i\sigma_2\xi^*)}_{\xi^-} =$

operador proj. de spin

$\vec{n} = (0,0,1)$

$\vec{n}\cdot\vec{\sigma} = \sigma^3 = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

$$= \cancel{-}i\sigma_2\underbrace{(\cancel{-}\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^*\xi^*}_{(\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\,\xi)^* \;=\; +\xi} = i\sigma_2\,\xi^* =$$

$$= -\underbrace{(-i\sigma_2\,\xi^*)}_{\xi^-}$$

$$\boxed{\xi^{-s} = -i\sigma_2(\xi^s)^*}$$ (eq. 141.1)

$$-i\sigma_2 = \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} -i\sigma_2\,\xi(\uparrow) = \xi(\downarrow) \\ -i\sigma_2\,\xi(\downarrow) = -\xi(\uparrow) \\ -i\sigma_2(-\xi(\uparrow)) = -\xi(\downarrow) \\ -i\sigma_2(-\xi(\downarrow)) = \xi(\uparrow) \end{cases}$$

quatro inversões para chegar no orginal

duas inversões resultam em um sinal (-)

$$\xi^{-s} = (\xi(\downarrow), -\xi(\uparrow))$$

ou

Lembrando que $a^s_{\vec{p}}$ está ligado a aniquilação de um estado com função de onda: $u^s_{\vec{p}}\, e^{ipx}$ → ξ^s

$$\left(b^s_{\vec{p}} \longleftrightarrow v^s_{\vec{p}}\, e^{ipx} \rightarrow \xi^{-s} \text{ aqui}\right)$$

e que $a^{-s}_{\vec{p}}$ deve fazer o mesmo para o spin invertido, trocando ξ^s por ξ^{-s} na função de onda, definimos:

$$\boxed{a^{-s}_{\vec{p}} = \left(a^2_{\vec{p}}, -a^1_{\vec{p}}\right) \qquad E \qquad b^{-s}_{\vec{p}} = \left(b^2_{\vec{p}}, -b^1_{\vec{p}}\right)} \quad \text{(eq. 142.1)}$$

Para os espinores temos:

$$u^{-s}(\tilde{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{-\tilde{p}\cdot\sigma}\,\left(-i\sigma^2\xi^{s*}\right) \\ \sqrt{-\tilde{p}\cdot\bar{\sigma}}\,\left(-i\sigma^2\xi^{s*}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sigma^2\sqrt{-p\cdot\sigma^*}\,\xi^{s*} \\ -i\sigma^2\sqrt{-p\cdot\bar{\sigma}^*}\,\xi^{s*} \end{pmatrix} =$$

$\sigma^2\sqrt{-\tilde{p}\cdot\sigma^*}$

(basta expandir a raiz em p)

$$= -i\begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}\left[u^s(p)\right]^* = \gamma^1\gamma^3\left[u^s(p)\right]^*$$

$$\left[u^s(p)\right]^* = -\gamma^1\gamma^3 u^{-s}(\tilde{p})$$

Juntando tudo em ψ temos:

$$T\psi(t,\vec{x})T = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_s T\left(a^s_{\mathbf{p}}u^s(p)e^{-ipx} + b^{s\dagger}_{\mathbf{p}}v^s(p)e^{ipx}\right)T =$$

$$= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_s\left(a^{-s}_{-\mathbf{p}}\left[u^s(p)\right]^* e^{ipx} - b^{-s\dagger}_{-\mathbf{p}}\left[v^s(p)\right]^* e^{-ipx}\right) =$$

$$= (-\gamma^1\gamma^3)\int\frac{d^3\tilde{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\tilde{p}}}}\sum_s\Big(a^{-s}_{\tilde{p}}u^{-s}(\tilde{p})e^{\overbrace{i\tilde{p}(t,-\vec{x})}^{-i\tilde{p}(-t,\vec{x})}}$$

$$+ b^{-s\dagger}_{\tilde{p}}v^{-s}(\tilde{p})e^{-i\tilde{p}(t,-\vec{x})}\Big)$$

$$= (-\gamma^1\gamma^3)\psi(-t,\vec{x}).$$

$$v^{-s}(\tilde{p}) = -\gamma^1\gamma^3\left[v^s(p)\right]^*$$

$$\left[v^s(p)\right]^* = \gamma^1\gamma^3 v^{-s}(\tilde{p})$$

Para os bilineares precisamos de: $T\bar{\psi}T = T\psi^\dagger i\gamma^0 T = T\psi^\dagger T\left(i\gamma^0\right)^* = \bar{\psi}(-t,\vec{x})\gamma^1\gamma^3$

E obtemos: $T\bar{\psi}\psi T = \left(\bar{\psi}\psi\right)(-t,\vec{x})$

$$T\bar{\psi}\gamma_5\psi T = -\left(\bar{\psi}\gamma_5\psi\right)(-t,\vec{x})$$

$$T\bar{\psi}\gamma^\mu\psi T = (-1)^\mu\left(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right)(-t,\vec{x})$$

Conjugação de Carga:

Esta é diferente das anteriores, pois não é uma transformação do espaço tempo mas aje diretamente sobre os operadores de campo de forma a levar partículas em anti-partículas (e vice versa). Vamos ver como podemos definí-la: