e que $a^{-s}_{\vec{p}}$ deve fazer o mesmo para o spin invertido, trocando ξ^s por ξ^{-s} na função de onda, definimos:

$$\boxed{a^{-s}_{\vec{p}} = \left(a^2_{\vec{p}}\,,\, -a^1_{\vec{p}}\right) \qquad E \qquad b^{-s}_{\vec{p}} = \left(b^2_{\vec{p}}\,,\, -b^1_{\vec{p}}\right)} \qquad \text{(eq. 142.1)}$$

Para os espinores temos:

$$u^{-s}(\tilde{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{-\tilde{p}\cdot\sigma}\,(-i\sigma^2\xi^{s*}) \\ \sqrt{-\tilde{p}\cdot\bar{\sigma}}\,(-i\sigma^2\xi^{s*}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sigma^2\sqrt{-p\cdot\sigma^*}\,\xi^{s*} \\ -i\sigma^2\sqrt{-p\cdot\bar{\sigma}^*}\,\xi^{s*} \end{pmatrix} =$$

$\sigma^2\sqrt{-\tilde{p}\cdot\sigma^*}$

(basta expandir a raiz em p)

$$= -i\begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}[u^s(p)]^* = \gamma^1\gamma^3[u^s(p)]^*$$

$$[u^s(p)]^* = -\gamma^1\gamma^3 u^{-s}(\tilde{p})$$

Juntando tudo em ψ temos:

$$T\psi(t,\vec{x})T = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_s T\left(a^s_{\mathbf{p}}u^s(p)e^{-ipx} + b^{s\dagger}_{\mathbf{p}}v^s(p)e^{ipx}\right)T =$$

$$= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_s\left(a^{-s}_{-\mathbf{p}}[u^s(p)]^*e^{ipx} - b^{-s\dagger}_{-\mathbf{p}}[v^s(p)]^*e^{-ipx}\right) =$$

$$v^{-s}(\tilde{p}) = -\gamma^1\gamma^3[v^s(p)]^*$$

$$[v^s(p)]^* = \gamma^1\gamma^3 v^{-s}(\tilde{p})$$

$$= (-\gamma^1\gamma^3)\int\frac{d^3\tilde{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\tilde{p}}}}\sum_s\Big(a^{-s}_{\tilde{p}}u^{-s}(\tilde{p})\underbrace{e^{i\tilde{p}(t,-\vec{x})}}_{\color{red}{-i\tilde{p}(-t,\vec{x})}}$$

$$+ b^{-s\dagger}_{\tilde{p}}v^{-s}(\tilde{p})e^{-i\tilde{p}(t,-\vec{x})}\Big)$$

$$= (-\gamma^1\gamma^3)\psi(-t,\vec{x}).$$

Para os bilineares precisamos de: $T\bar{\psi}T = T\psi^\dagger i\gamma^0 T = T\psi^\dagger T\,(i\gamma^0)^* = \bar{\psi}(-t,\vec{x})\,\gamma^1\gamma^3$

E obtemos: $T\bar{\psi}\psi T = (\bar{\psi}\psi)(-t,\vec{x})$

$$T\bar{\psi}\gamma_5\psi T = -(\bar{\psi}\gamma_5\psi)(-t,\vec{x})$$

$$T\bar{\psi}\gamma^\mu\psi T = (-1)^\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)(-t,\vec{x})$$

Conjugação de Carga:

Esta é diferente das anteriores, pois não é uma transformação do espaço tempo mas aje diretamente sobre os operadores de campo de forma a levar partículas em anti-partículas (e vice versa). Vamos ver como podemos defini-la:

Começamos notando que, dado que: $\psi \sim a^s_{\vec{p}}\, u^s(p)\, e^{ipx} + b^s_{\vec{p}}\, v^s(p)\, e^{-ipx}$

e: $H \sim \omega(\underbrace{a^\dagger a}_{\text{criam e aniquilam partículas}} + \underbrace{b^\dagger b}_{\text{criam e aniquilam antipartículas}})$

Logo, o operador que queremos deve ligar: $a^\dagger|0\rangle \xleftrightarrow{C} b^\dagger|0\rangle$

$\langle 0|a \longleftrightarrow \langle 0|b$

Definimos portanto:

$$\boxed{C\, a^s_{\vec{p}}\, C^{-1} = b^s_{\vec{p}}}$$

$$\boxed{C\, b^s_{\vec{p}}\, C^{-1} = a^s_{\vec{p}}} \qquad \text{(eq. 143.1)}$$

(poderiam haver fases, que tomamos como 1 - uma discussão mais completa sobre fases em conjugação de carga está feita na seção 3.3 do Weinberg, especialmente na pg 131 - a leitura vale ainda que você não se preocupe em entender a notação)

$C^2 = \hat{1} \qquad C = C^\dagger = C^{-1}$

Então, usando o fato de que (queremos relacionar *u* e *v*):

$$v^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{-p\cdot\sigma}\;\eta^s \\ -\sqrt{-p\cdot\bar{\sigma}}\;\eta^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{-p\cdot\sigma}\;(-i\sigma_2\xi^{s*}) \\ -\sqrt{-p\cdot\bar{\sigma}}\;(-i\sigma_2\xi^{s*}) \end{pmatrix}$$

$\eta^s = \xi^{-s}$ (pg 114)

$$(v^s(p))^* = \begin{pmatrix} \sqrt{-p\cdot\sigma}\;(-i\sigma_2\xi^{s*}) \\ -\sqrt{-p\cdot\bar{\sigma}}\;(-i\sigma_2\xi^{s*}) \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} -i\sigma_2\sqrt{-p\cdot\bar{\sigma}^*}\;\xi^{s*} \\ +i\sigma_2\sqrt{-p\cdot\sigma^*}\;\xi^{s*} \end{pmatrix}^* = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}}_{\gamma^2}\underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{-p\cdot\sigma}\;\xi^s \\ \sqrt{-p\cdot\bar{\sigma}}\;\xi^s \end{pmatrix}}_{u^s(p)}$$

$\bar{\sigma}\sigma^2 = \sigma^2(-\bar{\sigma}^*)$

$\sigma\sigma^2 = \sigma^2\bar{\sigma}^*$

$(i\sigma_2)^* = i\sigma_2$

$$(v^s(p))^* = \gamma^2 u^s(p) \Rightarrow \qquad (\gamma^2)^2 = \hat{1}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u^s(p) &= \gamma^2 (v^s(p))^* \\ v^s(p) &= \gamma^2 (u^s(p))^* \end{aligned}} \qquad \text{(eq. 143.2)}$$

Como o operador C é linear, fica fácil obter o efeito sobre o campo

$$C\,\psi(x)\,C = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\sum_s \Big(b^s_{\vec{p}}\,\underbrace{u^s(p)}_{\gamma^2(v^s(p))^*}\,e^{ipx} + a^{s\dagger}_p\,\underbrace{v^s(p)}_{\gamma^2(u^s(p))^*}\,e^{-ipx} \Big) =$$

$$= \gamma^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\sum_s \Big(\underbrace{b^s_p}_{(b^{s\dagger}_p)^*}(v^s(p))^*\,e^{ipx} + \underbrace{a^{s\dagger}_p}_{a^{s\dagger}_p = a^{s*}_p}(u^s(p))^*\,e^{-ipx} \Big) = \gamma^2\,\psi^*(x)$$

$$\therefore \boxed{C\,\psi(x)\,C = \gamma^2 \psi^*(x) = \gamma^2 (\psi^\dagger)^T}$$ (eq. 144.1)

$$\hookrightarrow C\,\psi(x)\,C = \gamma^2 (\underbrace{\psi^\dagger i\gamma^0}_{\bar\psi} (-i\gamma^0))^T = -i\gamma^2\gamma^0\,\bar\psi^T = -i(\bar\psi\gamma^0\gamma^2)^T$$

$(\gamma^0)^T = \gamma^0$

$$(C\psi C)^\dagger = \psi^T(x)\gamma^2 = (\gamma^2\psi(x))^T$$

$$C\,\bar\psi\, C = \overbrace{C\,\psi^\dagger C}\, i\gamma^0 = (\gamma^2\psi(x))^T i\gamma^0 = i(\gamma^0\gamma^2\psi)^T$$

Assim:

$$\boxed{C\,\bar\psi\psi\, C = (\gamma^0\gamma^2\psi)^T(\bar\psi\gamma^0\gamma^2)^T = (\bar\psi\gamma^0\gamma^2\gamma^0\gamma^2\psi)^T = (\bar\psi\psi)^T = \bar\psi\psi}$$ (eq. 144.2)

$(\gamma^0)^2 = -1 \quad (\gamma^2)^2 = 1$

Analogamente:

$$\boxed{\begin{aligned} C\,\bar\psi\gamma_5\psi\, C &= \bar\psi\gamma_5\psi \\ C\,\bar\psi\gamma^\mu\psi\, C &= -\bar\psi\gamma^\mu\psi \\ C\,\bar\psi\gamma^\mu\gamma_5\psi\, C &= \bar\psi\gamma^\mu\gamma_5\psi \end{aligned}}$$ (eq. 144.3)

Podemos resumir tudo na seguinte tabela:

	P	T	C	CPT
$\bar\psi\psi$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$
$\bar\psi\gamma_5\psi$	-1	-1	$+1$	$+1$
$\bar\psi\gamma^\mu\psi$	$(-1)^\mu$	$(-1)^\mu$	-1	-1
$\bar\psi\gamma^\mu\gamma_5\psi$	$-(-1)^\mu$	$(-1)^\mu$	$+1$	-1
$\bar\psi\gamma^{\mu\nu}\psi$	$(-1)^\mu(-1)^\nu$	$-(-1)^\mu(-1)^\nu$	-1	$+1$
∂_μ	$(-1)^\mu$	$-(-1)^\mu$	$+1$	-1

coeficientes na tabela

$P: \ \hat{O}(\vec{x},t) \to C\ \hat{O}(-\vec{x},t)$

$T: \ \hat{O}(\vec{x},t) \to C\ \hat{O}(\vec{x},-t)$

Quantização de Campos de Gauge

(Nastase 16, Peskin 9.4, Ryder 7.1)

Voltaremos agora ao "mundo bosônico" para lidar com um tipo bastante especial de bóson, os Bósons de Gauge. Estes campos vetoriais são introduzidos em teorias toda vez que assumimos a existência de alguma simetria contínua e local (simetria de Gauge), em geral postulando que o conteúdo de matéria da teoria (escalares e férmions) se transformem sobre alguma representação de um grupo de Lie (embora seja também comum pensar em teorias de puro Gauge, onde temos apenas os campos vetoriais, comumente chamadas de teorias de Yang-Mills).

Neste caso, o campo vetorial deve, para manter a invariância da ação sobre as transformações do grupo em questão, se transformar da seguinte forma:

$$A_\mu(x) \longrightarrow A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu \lambda(x)$$

(no caso de uma simetria U(1), abeliana)

constantes de acoplamento

$$A^a_\mu(x) \longrightarrow A^a_\mu(x) + \frac{1}{g}\partial_\mu \lambda^a(x) + f^{abc} A^b_\mu \lambda^c(x)$$

$a, b, c \to$ indices da representação adjunta do grupo (vão de 1 até #Geradores do Grupo)

constantes de estrutura do grupo

(no caso de uma simetria não-abeliana)

Vamos nos restringir ao caso abeliano, por enquanto, e comecemos tentando o caminho ingênuo, análogo ao que fizemos no campo escalar:

$$Z[J] = N\int D\phi \; e^{i\int(\mathcal{L} + J\phi)\,d^4x} = \frac{1}{N}\int D\phi \; e^{-i\int d^4x\left[\frac{1}{2}\phi(\Box + m^2)\phi - \phi J\right]} =$$

$$= \exp\left[-\frac{i}{2}\int d^4x\, d^4y\; J(x)\,\Delta_F(x-y)\,J(y)\right]$$

No caso do campo eletromagnético (sem interação com a matéria):

$$Z[J] = N\int DA_\mu \; e^{i\int(\mathcal{L} + J^\mu A_\mu)\,d^4x}$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$$

$$\int d^4x\,(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) = \cancelto{0}{\int d^4x\,\partial_\mu(A_\nu\partial^\mu A^\nu)} - \int d^4x\, A_\nu\partial_\mu\partial^\mu A^\nu = -\int d^4x\; g_{\mu\nu}A^\mu\Box A^\nu$$

$$\int d^4x\,(\partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu) = \cancelto{0}{\int d^4x\,\partial_\nu(A_\mu\partial^\mu A^\nu)} - \int d^4x\, A_\mu\partial_\nu\partial^\mu A^\nu = -\int d^4x\, A^\mu\partial_\nu\partial_\mu A^\nu$$

$$\boxed{\mathcal{L}} = -\frac{1}{4}\Big(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu + \partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu\Big) =$$

$$= \boxed{\frac{1}{2} A^\mu \left(g_{\mu\nu} \Box - \partial_\nu \partial_\mu\right) A^\nu} \qquad \text{(eq. 146.1)}$$

$$\left(g_{\mu\nu} \Box - \partial_\mu \partial_\nu\right) A^\nu = 0 \qquad \text{(eq. de Maxwell)}$$

Em princípio só precisaríamos inverter este operador, mas aí esbarramos em um problema: imagine uma configuração de campo específica (estamos somando sobre TODAS ELAS):

$$A^\mu(x) = \partial^\mu \alpha(x)$$

$$\left(g_{\mu\nu} \Box - \partial_\nu \partial_\mu\right) \partial^\mu \alpha = \left(\Box \partial_\nu - \partial_\nu \Box\right) \alpha = 0$$

O operador tem autovalores zero, e portanto é singular. De fato, a integral:

$$\int \mathcal{D}A_\mu \; \exp\left\{\frac{i}{2} \int d^4x \; A_\mu(x) \left(g^{\mu\nu} \partial^2 - \partial^\mu \partial^\nu\right) A_\nu(x)\right\}$$

vai receber uma contribuição igual a "1" cada vez que considerarmos uma contribuição deste tipo. É divergente. Podemos ver que esta divergência é transmitida para o que seria a função de Green:

$$\left(g_{\mu\nu} \Box - \partial_\mu \partial_\nu\right) D^{\nu\lambda}(x-y) = \delta^\lambda_\mu \, \delta^4(x-y)$$

$$\partial^\mu \downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow \partial^\mu$$

$$(0 \cdot \partial_\nu) \underbrace{D^{\nu\lambda}}_{\text{(tem que ser realmente grande para satizfazer isto)}}(x-y) = \partial^\lambda \delta^4(x-y)$$

A raiz do problema está na invariância de gauge. Quando somamos sobre diversas configurações de A_μ, somamos inclusive aquelas equivalentes (ligadas por uma transformação de gauge) o que é uma forma de "multipla contagem".

$$A_\mu \longleftrightarrow \cancel{A_\mu + \partial_\mu \alpha_1}$$
$$ \longleftrightarrow \cancel{A_\mu + \partial_\mu \alpha_2}$$
$$ \longleftrightarrow \cancel{A_\mu + \partial_\mu \alpha_3} \; \ldots$$

já incluimos esta configuração

não devemos incluir estas

Temos que forçar a nossa integral de trajetória a considerar somente estados inequivalentes por uma transformação de gauge. Uma forma óbvia de fazê-lo é fixar o gauge, mas como fazemos isto em uma integral de trajetória?

Comecemos a discussão escolhendo qual fixação de Gauge será mais conveniente para a quantização da teoria. A equação de movimento clássica:

$$\Box A^\nu - \partial^\nu\left(\partial^\mu A_\mu\right) = 0$$

é bastante difícil de resolver, no Gauge de Lorenz (proposta por Ludvig Lorenz que não é o Hendrik Lorentz) ou Gauge Covariante a solução é bem mais simples:

Gauge Covariante

$$\boxed{\partial^\mu A_\mu = 0} \Rightarrow \Box A_\mu = 0 \longleftrightarrow \begin{cases} A_\mu \sim \underbrace{\epsilon_\mu(k)}_{\text{o coeficiente carrega o índice vetorial e a informação sobre o momento angular (spin / polarização)}} e^{\pm i k \cdot x} \\ k^2 = 0 \quad \text{(pois a massa é zero na eq. KG)} \end{cases}$$

(eq. 147.1) (Klein-Gordon, para m = 0)

$$\partial^\mu A_\mu(x) = 0 \Rightarrow \int d^4x \, e^{ipx} \partial^\mu A_\mu(x) = 0$$

$$\int d^4x \, e^{ipx} \partial^\mu \int \frac{d^4k}{N_k} \epsilon_\mu(k) e^{\pm ikx} = 0$$

$$\int \frac{d^4k}{N_k} k^\mu \cdot \epsilon_\mu(k) \delta^4(p \pm k) = 0 \Rightarrow \boxed{\pm p^\mu \epsilon_\mu(\pm p) = 0} \quad \text{(eq. 147.2)}$$

esta fixação, no entanto, não fixa completamente o Gauge. Note que, dadas duas configurações de campo fisicamente equivalentes, ligadas pela transformação de Gauge a seguir:

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \lambda \quad \text{com} \quad \lambda \,/\, \Box \lambda = 0$$

ambas podem satisfazer a condição de fixação (sem exigir $A = A'$): $\partial^\mu A'_\mu = \partial^\mu A_\mu = 0$

Poderíamos aprimorar a nossa fixação exigindo também $\boxed{A_0 = 0}$ (eq. 147.3)

(ainda mantendo a condição 147.1)

o que equivale a: $\partial_0 \lambda = -A_0$

E não causa nenhum problema com a condição 147.1, uma vez que:

$$\Box A_0 = 0 \Rightarrow \Box \partial_0 \lambda = 0 \Rightarrow \partial_0 \underbrace{\Box \lambda}_{\Box\lambda = 0 \text{ já era permitido}} = 0$$

A combinação de 147.1 e 147.2 nos leva a: $\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0}$ (eq. 147.4)

Note que esta condição não é condizente com a presença de correntes (fontes) externas, que produziriam um $A_0 \neq 0$, portanto este formalismo só é útil para radiação no vácuo. Em suma, usaremos:

$$\boxed{A_0 = 0 \quad \& \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0} \quad \text{(eq. 147.5)}$$

Gauge de Radiação ou de Coulomb

$\epsilon_0(p) = 0$

147.2 $\rightarrow$ $\vec{p} \cdot \vec{\epsilon}^{(\lambda)}(p) = 0$

Sabemos do eletromagnetismo que, neste Gauge, só temos dois modos que se propagam no campo, correspondendo a duas polarizações transversais. Por isso ele é um Gauge Físico.

A solução clássica é:

$$\boxed{\vec{A}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\sqrt{2E_k}} \sum_{\lambda=1,2} \vec{\epsilon}^{(\lambda)}(k)\left[a^{(\lambda)}(k)\, e^{ik\cdot x} + a^{(\lambda)\dagger}(k)\, e^{-ikx}\right]}$$ (eq. 148.1)

$$k^2 = 0 \qquad \vec{k}\cdot\vec{\epsilon}^{(\lambda)}(k) = 0$$

É também conveniente escolher os dois vetores de polarização $\vec{\epsilon}^{(\lambda)}$ de forma que sejam ortogonais:

$$\boxed{\vec{\epsilon}^{(\lambda)}(\vec{k})\cdot\vec{\epsilon}^{(\lambda')}(\vec{k}) = \delta^{\lambda\lambda'}}$$ (eq. 148.2)

Quantização no Gauge Físico:

(não explicitaremos todos os detalhes, ver: Bjorken & Drell, "Relativistic Quantum Fields", cap 14)

Queremos agora impor as condições 147.5 uma vez que o campo tenha se tornado um operador. A condição para o componente zero é trivial, estamos de fato removendo um grau de liberdade do sistema, já a condição $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ deve ser vista como uma condição para operadores. Ou seja:

$$\vec{\nabla}\cdot\langle\vec{A}\rangle = 0 \qquad \& \qquad \vec{\nabla}\cdot[\vec{A}, \hat{\mathcal{O}}] = 0$$

Note então que, definindo o momento conjugado:

$$\Pi^i = F^{0i} = E^i$$

Poderíamos, inocentemente, impor:

$$[A^i(\vec{x},t), E^j(\vec{x}',t)] = i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \delta^{ij}\, e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')} = i\,\delta^{ij}\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')$$

Mas veja que, se aplicamos $\vec{\nabla}_{x,i}$ neste comutador NÃO temos: $\vec{\nabla}\cdot[\vec{A}(\vec{x},t), E^i(\vec{x}',t)] = 0$

$$\vec{\nabla}_{x,i}[A^i(\vec{x},t), E^j(\vec{x}',t)] = i\frac{\partial}{\partial x^i}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \delta^{ij}\, e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')} = -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, k_j\, e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')}$$

A lição aqui é que vínculos (e a fixação de Gauge é um vínculo sobre as variáveis dinâmicas do sistema) tornam a prescrição de quantizar simplesmente trocando os brackets de Poison por comutadores (ou anticomutadores) inválida. Dirac achou uma forma de generalizar a prescrição para sistemas com vínculo mas não exploraremos isto aqui (veja as notas do prof. Nastase lec 15 e a referência lá dada para o original de Dirac), para nossos fins basta notar que a generalização:

$$\boxed{\delta^{ij} \longrightarrow \Delta^{ij} = \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{k^2}\right)}$$ (eq. 148.3)

Fornece a seguinte relação de comutação:

$$[A^i(\vec{x},t), E^j(\vec{x}',t)] = i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Delta^{ij} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')} = i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\Big(\delta^{ij} - \underbrace{\frac{k^i k^j}{k^2}}_{\frac{\partial^i\partial^j}{(\vec{\nabla})^2}}\Big) e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')}$$

$$= i\left(\delta^{ji} - \frac{\partial^i\partial^j}{(\vec{\nabla})^2}\right)\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')$$

que, por sua vez, satisfaz $\vec{\nabla}[\vec{A}, E^i] = 0$ uma vez que

$[A,A] = [E,E] = 0$

$$k_i \Delta^{ij} = k_j - k_i\frac{k^i k^j}{k^2} = 0$$

Substituindo a decomposição de A no comutador acima obtemos a relação usual:

$$\boxed{[a^{(\lambda)}(k), a^{(\lambda')+}(k')] = (2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^3(\vec{k}-\vec{k}')}$$ (eq. 149.1)

$[a,a] = [a^+, a^+] = 0$

$$H = \frac{1}{2}\int d^3x\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right) = \sum_\lambda \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{k^0}{2}\left[a^{(\lambda)+}(k)a^{(\lambda)}(k) + a^{(\lambda)}(k)a^{(\lambda)+}(k)\right]$$

(exercício)

$$\boxed{:H: = \sum_\lambda \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} k^0 a^{(\lambda)+}(k)\, a^{(\lambda)}(k)}$$ (eq. 149.2)

Esta escolha de Gauge é conveniente pois só temos dois graus de liberdade, que coincidem com os graus físicos. No entanto a invariancia de Lorentz explícita está perdida, e para ter certeza de que correções quânticas (loops) não a quebram seria necessário testá-la explicitamente a cada passo da teoria de perturbação. Uma alternativa a isto seria escolher o Gauge Covariante (que mantém a estrutura de Lorentz explícita) e pagar o preço de ter polarizações não físicas na teoria, é o que faremos a seguir.

Quantização no Gauge Covariante

(mais detalhes: Mandl e Shaw, secs 5.1 e 5.2)

Neste caso, a única condição de fixação é a da eq. 147.1: $\partial_\mu A^\mu = 0$

A solução clássica é: $$A_\mu = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\sqrt{2E_k}} \underbrace{\sum_{\lambda=0}^{3}}_{\text{4 polarizações}} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(k)\left[a^{(\lambda)}(k)\, e^{ikx} + a^{(\lambda)+}(k)\, e^{-ikx}\right]$$

$k^2 = 0 \xrightarrow{E_k = k}$

Podemos escolher um sistema de coordenadas tomando o 3 eixo na direção de k: $k^\mu = (k, 0, 0, k)$