

Se pensarmos em um campo sem massa ($m = 0$) e cuja fonte externa é uma carga pontual

$$J(x) = \delta^3(\vec{x})$$

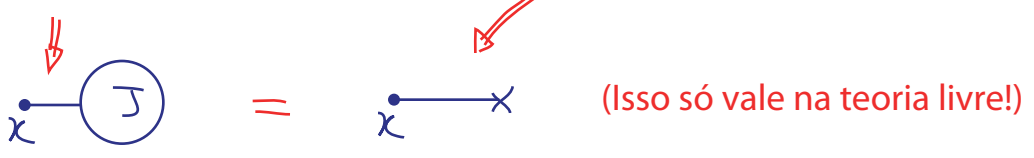
temos que $\phi(x) = \phi(\vec{x})$ é justamente $1/|\vec{x}|$ (o Laplaciano agindo em $\phi(x)$ tem produzir a delta) e portanto temos a lei de Coulomb:

$$\Delta(\vec{x} - \vec{y}) = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|}$$

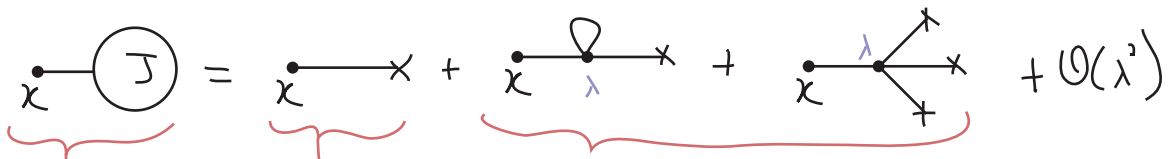
Por outro lado, para esta teoria livre sabemos que (eq. 94.1): $Z_0[J] = e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J}$

$$\therefore W_0[J] = -L_N(Z[J]) = -\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J$$

Então, $\phi_a[J] = \frac{\delta(-W_0[J])}{\delta J(x)} = (\Delta \cdot J)(x)$ (que coincide com a solução obtida via princípio da mínima ação)



Se tivéssemos ligado a interação, teríamos:

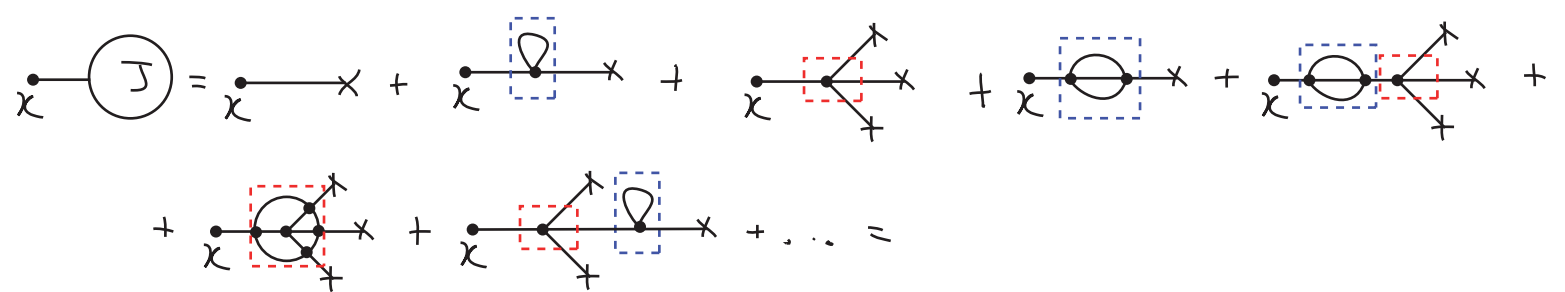


Correções quânticas (só possíveis na presença de interações)

Campo "clássico - clássico!" vem do princ. da extrema ação na presença de fonte

Campo "clássico" significa "pouco relativístico", não há energia o suficiente para produzir partículas (vácuo da TQC), mas as correções quânticas estão incluídas. Este é o nosso $\phi_a[J]$

Vamos tentar agora reorganizar esta soma, para encontrar a função geradora dos diagramas 1PI (não é óbvio que ela deveria vir daí, mas aguarde até o fim), coloquemos mais alguns termos:



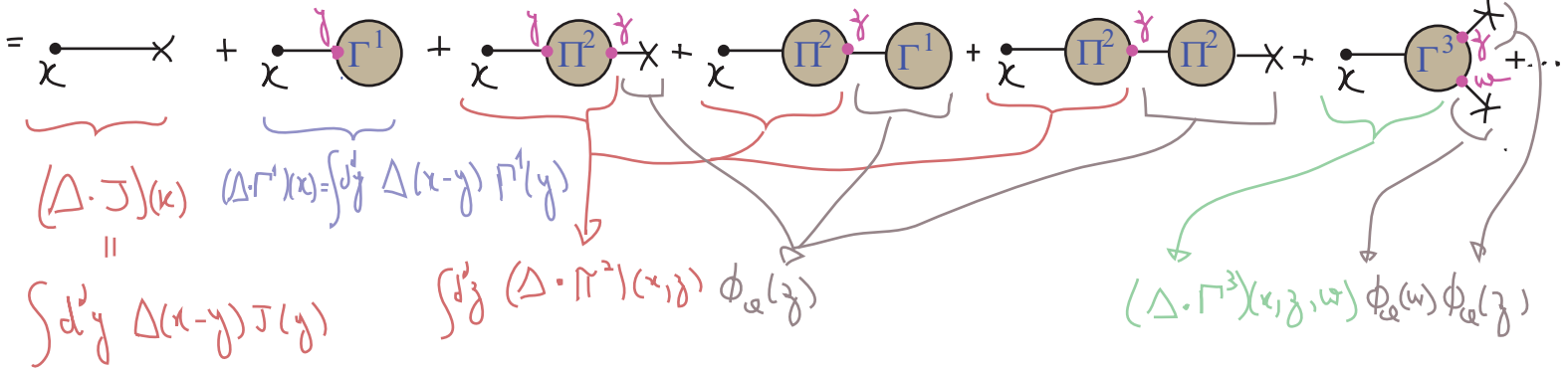
$$= \chi \text{---} \chi + \chi \text{---} \Gamma^1 + \chi \text{---} \Pi^2 \text{---} \chi + \chi \text{---} \Pi^2 \text{---} \Gamma^1 + \chi \text{---} \Pi^2 \text{---} \Pi^2 \text{---} \chi + \chi \text{---} \Gamma^3$$

mais a frente deixarei claro porque a 1PI de dois pontos ficou outro nome

$\Gamma^n =$ função 1PI com n linhas saindo

pensando agora em uma teoria mais geral, que pode ter isso, ex: $\lambda\phi^3 \rightarrow \chi \text{---} \text{circle}$

Aí basta notar que:



$(\Delta \cdot J)(x) \equiv \int d^d y \Delta(x-y) J(y)$
 $(\Delta \cdot \Gamma^1)(x) = \int d^d y \Delta(x-y) \Gamma^1(y)$
 $(\Delta \cdot \Pi^2)(x, \delta) = \int d^d z \Delta(x-y) \Pi^2(y, \delta) \phi_\alpha(z)$
 $(\Delta \cdot \Gamma^3)(x, \delta, \omega) = \int d^d z \int d^d \omega \Delta(x-y) \Gamma^3(y, \delta, \omega) \phi_\alpha(z) \phi_\alpha(\omega)$

Ou seja:

$$\phi_\alpha(x) = \int d^d y \Delta(x-y) \left\{ J(y) - \left[\Gamma^1(y) + \int d^d \delta \Pi^2(y, \delta) \phi_\alpha(\delta) + \frac{1}{2} \int d^d \delta \int d^d \omega \Gamma^3(y, \delta, \omega) \phi_\alpha(\delta) \phi_\alpha(\omega) + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \int d^d \delta_1 \dots d^d \delta_{n-1} \Gamma^n(y, \delta_1, \dots, \delta_{n-1}) \phi_\alpha(\delta_1) \dots \phi_\alpha(\delta_{n-1}) + \dots \right] \right\}$$

(eq. 164.1)

que é uma equação auto-consistente para o campo clássico (ressomei toda série perturbativa). Podemos então definir o funcional gerador:

$$\hat{\Gamma}[\phi_\alpha] \equiv \int d^d y \Gamma^1(y) \phi_\alpha(y) + \frac{1}{2} \int d^d y \int d^d \delta \Pi^2(y, \delta) \phi_\alpha(y) \phi_\alpha(\delta) + \frac{1}{3!} \int d^d y \int d^d \delta_1 \int d^d \delta_2 \int d^d \omega \Gamma^3(y, \delta_1, \delta_2, \omega) \phi_\alpha(y) \phi_\alpha(\delta_1) \phi_\alpha(\delta_2) \phi_\alpha(\omega) + \dots$$

(eq. 164.2)

Tal que:

$$\Gamma^n(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta^n}{\delta \phi_\alpha(x_1) \dots \delta \phi_\alpha(x_n)} \hat{\Gamma}[\phi_\alpha] \Big|_{\phi_\alpha = 0}$$

(eq. 164.3)

Para n = 2 vale:

$$\Pi^2(x_1, x_2) = \frac{\delta^2}{\delta \phi_\alpha(x_1) \delta \phi_\alpha(x_2)} \hat{\Gamma}[\phi_\alpha] \Big|_{\phi_\alpha = 0}$$

(eq. 164.4)

Com estas definições podemos re-escrever 164.1 na forma:

$$-\frac{\delta W}{\delta J(x)} \equiv \phi_\alpha(x) = \int d^d y \Delta(x-y) \left(J(y) - \frac{\delta \hat{\Gamma}[\phi_\alpha]}{\delta \phi_\alpha(y)} \right)$$

que pode ser invertida:

$$\Delta_x^{-1} \phi_\alpha(x) = J(x) - \frac{\delta \hat{\Gamma}[\phi_\alpha]}{\delta \phi_\alpha(x)}$$

$\Delta_x^{-1} \Delta(x-y) = \delta^d(x-y)$

$$\mathcal{J}(x) = \Delta_x^{-1} \phi_a(x) + \frac{\delta \hat{\Gamma}[\phi_a]}{\delta \phi_a(x)} = \frac{\delta}{\delta \phi_a(x)} \left[\hat{\Gamma}[\phi_a] + \frac{1}{2} \phi_a \cdot \Delta^{-1} \phi_a \right]$$

$\int d^d y \phi_a(y) \Delta_y^{-1} \phi_a(y) = \int d^d y \Delta_y^{-1} \phi_a(y) \phi_a(y) + \text{surperf.}$
↳ 2 deriv.

Definimos então a **Ação Efetiva**:

$$\Gamma[\phi_a] = \hat{\Gamma}[\phi_a] + \frac{1}{2} \phi_a \cdot \Delta^{-1} \phi_a \quad (\text{eq. 165.1})$$

$$\int d^d y \phi_a(y) \int d^d z \delta^d_{yz}$$

Para a qual vale:

$$\frac{\delta}{\delta \phi_a(x)} \Gamma[\phi_a] = \mathcal{J}(x) \quad (\text{eq. 165.2})$$

↳ O que é muito parecido com o que vale para a ação, via a equação de movimento CLÁSSICA:
 $\frac{\delta S}{\delta \phi} - \mathcal{J} = 0 \Rightarrow \frac{\delta S}{\delta \phi} = \mathcal{J}$

daí o nome "ação efetiva". Da mesma forma que o campo ϕ_{cl} é o que vemos a baixas energias com correções quânticas já incluídas, a ação efetiva é a ação que de fato dita o comportamento deste campo (incluindo em si as flutuações quânticas).

Definimos ainda:

$$\Gamma[\phi_a] = \sum_{N \geq 1} \frac{1}{N!} \Gamma^N \underbrace{\phi_a \cdot \phi_a \cdot \dots \cdot \phi_a}_N \quad (\text{eq. 165.3})$$

N campos

Cuja única diferença para as definições 164.3 e 164.4 está no segundo termo:

$$\Gamma^2(x, y) = \frac{\delta^2}{\delta \phi_a(x) \delta \phi_a(y)} \Gamma[\phi_a] \Big|_{\phi_a=0} = \frac{\delta^2}{\delta \phi_a(x) \delta \phi_a(y)} \underbrace{\hat{\Gamma}[\phi_a]}_{\Pi^2(x, y)} + \frac{\delta^2}{\delta \phi_a(x) \delta \phi_a(y)} \left[\frac{1}{2} \phi_a \cdot \Delta^{-1} \phi_a \right]$$

$$\frac{\delta}{\delta \phi_a(y)} \frac{1}{2} \int d^d z \phi_a(z) \Delta_z^{-1} \phi_a(z) = \Delta_y^{-1} \phi_a(y) \quad \frac{\delta}{\delta \phi_a(x)} \Delta_y^{-1} \phi_a(y) = \Delta_y^{-1} \delta(x-y)$$

$$\Gamma^2(x, y) = \Pi^2(x, y) + \Delta_y^{-1} \delta(x-y) \quad (\text{eq. 165.4})$$

↳ lembrando que só essa parte é a função 1PI de dois pontos
 ↳ é possível mostrar que esta função é a inversa do propagador completo da teoria:

$$\int d^4z \Gamma^2(x, z) \underbrace{\Delta_F^c(z-y)}_{\text{propagador incluindo TODAS as correções perturbativas}} \sim \delta^4(x-y) \quad (\text{eq. 166.1})$$



mas para fazer isso precisamos primeiro definir o propagador completo:

Função conectada de dois pontos

Já definimos a equação conectada de 1 ponto (eq 162.3), façamos o mesmo para a de dois pontos:

$$G_2^c(x, y)_J = - \frac{\delta}{\delta J(x)} \frac{\delta}{\delta J(y)} W[J] = \frac{\delta \phi_c(y)}{\delta J(x)} \quad (\text{eq. 166.2})$$

Substituindo ϕ_c pela equação auto-consistente (164.1):

$$G_2^c(x, y)_J = \Delta(y-x) - (\Delta \cdot \Pi^2 \cdot \frac{\delta \phi_c(y)}{\delta J(x)}) + \dots$$

estes termos somem desde que $\phi_c(J=0) = 0$

$$\int d^4z_2 \delta(y-z_2) G_2^c(z_2, x) - \int d^4z_1 d^4z_2 \Delta(y-z_1) \Pi^2(z_1, z_2) \frac{\phi_c(z_2)}{\delta J(x)}$$

$$G_2^c(x, y)_{J=0} = \Delta(y-x) - \int d^4z_1 d^4z_2 \Delta(y-z_1) \Pi^2(z_1, z_2) G_2^c(z_2, x)_{J=0} \quad (\text{eq. 166.3})$$

$$\int d^4z_2 \left[\delta(y-z_2) + \int d^4z_1 \Delta(y-z_1) \Pi^2(z_1, z_2) \right] G_2^c(z_2, x) = \Delta(y-x) \quad (\times \Delta_y^{-1})$$

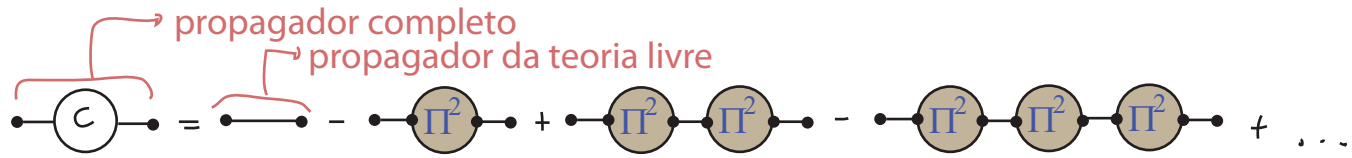
$$\int d^4z_2 \left[\Delta_y^{-1} \delta(y-z_2) + \Pi^2(y, z_2) \right] G_2^c(z_2, x) = \delta(y-x) \quad (\hat{1} + \Delta \cdot \Pi^2) \cdot G_2 = \Delta$$

o que prova 166.1 e identifica G_2^c como o tal propagador completo, que é justamente o que queríamos (o propagador livre mais a soma de todos os diagramas conectados de dois pontos). Notemos que:

$$(\hat{1} + \Delta \cdot \Pi^2) \cdot G_2 = \Delta \implies G_2 = (\hat{1} + \Delta \cdot \Pi^2)^{-1} \cdot \Delta$$

$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$

$$G_2 = (\hat{1} - \Delta \Pi^2 + \Delta \Pi^2 \Delta \Pi^2 - \Delta \Pi^2 \Delta \Pi^2 \Delta \Pi^2 + \dots) \Delta = \Delta - \Delta \Pi^2 \Delta + \Delta \Pi^2 \Delta \Pi^2 \Delta - \dots$$



Com isso já obtivemos um funcional, a Ação Efetiva, que gera as funções 1PI. Resta agora mostrar que podemos obter a ação efetiva como uma transformada de Legendre da energia livre (sem isso não conseguimos calcular a ação efetiva, já que foi definida como uma soma de infinitos termos). Queremos mostrar que:

$$\int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi] + J \cdot \phi} = e^{-W[J]} = e^{-\Gamma[\phi_{cl}] + J \cdot \phi_{cl}}$$

ou: $\Gamma[\phi_{cl}] = W[J] + J \cdot \phi_{cl}$ (eq. 167.1)

// Demonstração //

$$\frac{\delta \Gamma[\phi_{cl}]}{\delta \phi_{cl}(x)} = \frac{\delta W[J]}{\delta \phi_{cl}(x)} + \frac{\delta J}{\delta \phi_{cl}(x)} \cdot \phi_{cl} + J(x) = J(x)$$

$$\int \int \gamma \underbrace{\frac{\delta W[J]}{\delta J(\gamma)}}_{-\phi_{cl}(\gamma)} \frac{\delta J(\gamma)}{\delta \phi_{cl}(x)} = -\phi_{cl} \cdot \frac{\delta J}{\delta \phi_{cl}(x)}$$

Que é a equação 165.2 novamente, mostrando que o RHS da equação 167.1 também é a ação efetiva

Ação clássica como geradora dos diagramas em "nível árvore" (sem loops)

Uma das formas de pensar o limite $\hbar \rightarrow 0$ é notar que na eq.

$$\int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi] + J \cdot \phi} = e^{-\Gamma[\phi_{cl}] + J \cdot \phi_{cl}}$$

$$e^{-\frac{1}{\hbar}(S + J \cdot \phi)}$$

podemos ignorar todas as trajetórias não clássicas do lado esquerdo e aí a ação efetiva e a clássica são o mesmo. Sabemos que a ação efetiva gera certos diagramas (os diagramas 1PI) então podemos nos perguntar se a ação clássica também funciona como funcional gerador de algum diagrama e, se sim, quais são eles. Para obter a resposta, tomemos uma teoria simples como exemplo:

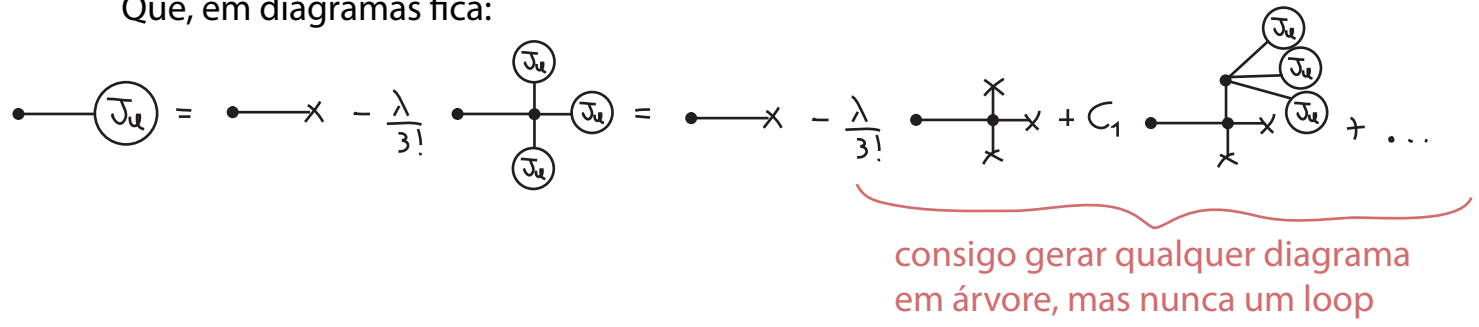
$$S[\phi] = \frac{1}{2} \phi \cdot \Delta^{-1} \phi + \int \phi^3(x)$$

$$\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(x)} = J(x) \Rightarrow (\Delta^{-1} \cdot \phi)(x) + \frac{\lambda}{3!} \phi^3(x) = J(x)$$

$$\phi(x) = (\Delta \cdot J)(x) - \frac{\lambda}{3!} (\Delta \cdot \phi^3)(x)$$

(eq. 167.1)

Que, em diagramas fica:



Isso quer dizer que os diagramas em nível árvore são "clássicos" (no sentido mais geral da palavra)? Não. De fato se calculamos estes diagramas usando propagadores e no fim interpretarmos todos os resultados como amplitudes de probabilidade, teremos, como esperado, efeitos já conhecidos de mecânica quântica, tal como interferências entre canais alternativos. O que estamos perdendo então? Os efeitos quânticos intrínsecos de uma *teoria de campo*, que são codificados nos loops da expansão perturbativa. Estes efeitos serão melhor abordados em TQCII, mas consistem essencialmente no fato de uma excitação do campo (uma partícula) acabar interagindo com o próprio campo, com várias consequências (o propagador completo tem um polo que não coincide com a massa na lagrangiana, running das constantes de acoplamento, etc...)

Equações de Dyson-Schwinger e identidades de Ward

(Nastase 18, Peskin 9.6)

A nível clássico vale:

$$\frac{\delta S[J]}{\delta \phi(x)} - J(x) = 0$$

Queremos o equivalente quântico disso. Considere a identidade:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{d}{dx} f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(\pm\infty) = 0$$

Podemos generalizar isto para a integral de trajetória e, no caso do espaço Euclidiano nem precisamos que o campo vá a zero, a ciclicidade da integral já garante isso:

$$\int \mathcal{D}\phi \frac{\delta}{\delta \phi(x)} e^{-S[\phi] + J \cdot \phi} = 0$$

$$= \int \mathcal{D}\phi \left[-\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(x)} + J(x) \right] e^{-S[\phi] + J \cdot \phi} = 0$$

$$= \left[-\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(x)} \Big|_{\phi = \frac{\delta J}{\delta J}} + J(x) \right] Z[J] = 0$$

$\left\langle -\frac{\delta S}{\delta \phi(x)} + J(x) \right\rangle$
 leia-se: (1) agimos com a deriva em ϕ na exponencial; (2) no resultado de (1), troco todos os ϕ por derivadas em J ; (3) tiro isso da integral