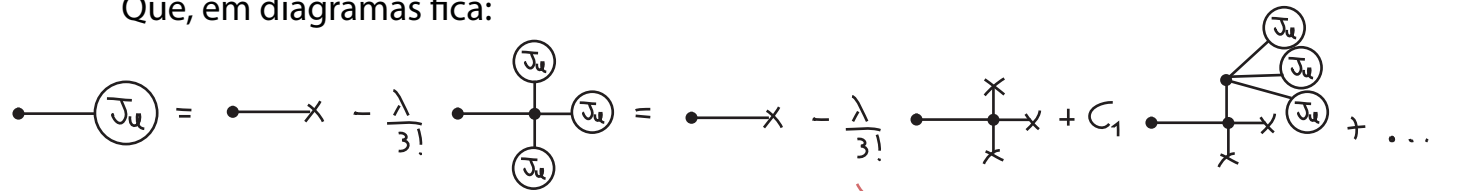


Que, em diagramas fica:



consigo gerar qualquer diagrama em árvore, mas nunca um loop

Isso quer dizer que os diagramas em nível árvore são "clássicos" (no sentido mais geral da palavra)? Não. De fato se calculamos estes diagramas usando propagadores e no fim interpretarmos todos os resultados como amplitudes de probabilidade, teremos, como esperado, efeitos já conhecidos de mecânica quântica, tal como interferências entre canais alternativos. O que estamos perdendo então? Os efeitos quânticos intrínsecos de uma *teoria de campo*, que são codificados nos loops da expansão perturbativa. Estes efeitos serão melhor abordados em TQCII, mas consistem essencialmente no fato de uma excitação do campo (uma partícula) acabar interagindo com o próprio campo, com várias consequências (o propagador completo tem um polo que não coincide com a massa na lagrangiana, running das constantes de acoplamento, etc...)

Equações de Dyson-Schwinger e identidades de Ward

(Nastase 18, Peskin 9.6)

A nível clássico vale:

$$\frac{\delta S[J]}{\delta \phi(x)} - J(x) = 0$$

Queremos o equivalente quântico disso. Considere a identidade:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{d}{dx} f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(\pm\infty) = 0$$

Podemos generalizar isto para a integral de trajetória e, no caso do espaço Euclideo não precisamos que o campo vá a zero, a ciclicidade da integral já garante isso:

$$\int \mathcal{D}\phi \frac{\delta}{\delta \phi(x)} e^{-S[\phi] + J \cdot \phi} = 0$$

$$= \int \mathcal{D}\phi \left[-\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(x)} + J(x) \right] e^{-S[\phi] + J \cdot \phi} = 0$$

$$= \left[-\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(x)} \Big|_{\phi = \frac{\delta J}{\delta \phi}} + J(x) \right] Z[J] = 0$$

leia-se: (1) agimos com a deriva em ϕ na exponencial; (2) no resultado de (1), troco todos os ϕ por derivadas em J ; (3) tiro isso da integral

$$\left[-\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(x)} \Big|_{\phi=\frac{\delta}{\delta J}} + J(x) \right] Z[J] = 0$$

Equação de Schwinger-Dyson

(eq. 169.1)

(em sua versão mais compacta e geral)

$$\rightarrow \left\langle \frac{\delta S}{\delta \phi(x)} - J(x) \right\rangle = 0$$

Este resultado parece óbvio e trivial de deduzir, mas isto foi graças ao formalismo de integral de trajetórias. Historicamente este resultado foi obtido em termos de diagramas de Feynman, e é interessante ver como isto é feito pois ele implica **relações** nada triviais **entre diagramas**.

Vamos assumir uma teoria bosônica com termo cinético quadrático e uma interação qualquer:

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \phi \cdot \Delta^{-1} \phi + S_I[\phi] \quad \left\{ \int d^4x \Delta(x-y) \frac{\delta}{\delta \phi(x)} = \left(\Delta \cdot \frac{\delta}{\delta \phi} \right) (y) \right\}$$

$$\frac{\delta}{\delta \phi(x)} S[\phi] = (\Delta^{-1} \phi)(x) + \frac{\delta}{\delta \phi(x)} S_I[\phi]$$

$$\left(\Delta \cdot \frac{\delta S}{\delta \phi} \right) (y) = \phi(y) + \left(\Delta \cdot \frac{\delta S_I}{\delta \phi} \right) (y)$$

Substituindo isso em 169.1 (onde primeiro aplicamos Δ):

$$\left[-\frac{\delta}{\delta J(x)} - \left(\Delta \cdot \frac{\delta S_I}{\delta \phi} \right) (x) \Big|_{\phi=\frac{\delta}{\delta J}} + (\Delta \cdot J)(x) \right] Z[J] = 0$$

de onde obtemos a equação de Schwinger-Dyson para Z:

$$\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = (\Delta \cdot J)(x) Z[J] - \left(\Delta \cdot \frac{\delta S_I}{\delta \phi} \right) (x) \Big|_{\phi=\frac{\delta}{\delta J}} Z[J] \quad (\text{eq. 169.2})$$

$$\langle \phi(x) \rangle = \langle (\Delta \cdot J)(x) \rangle - \left\langle \left(\Delta \cdot \frac{\delta S_I}{\delta \phi} \right) (x) \right\rangle$$

Uma vez que tenhamos a equação para Z podemos obter a equação para qualquer função de n-pontos, mas precisamos especificar uma interação. Por exemplo:

$$\int \mathcal{L}_I(\phi(y)) = \frac{g_3}{3!} \phi^3(y) + \frac{g_4}{4!} \phi^4(y)$$

(eq. 169.2)

$$\begin{aligned} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} &= (\Delta \cdot J)(x) Z[J] - \int d^4y \Delta(x-y) \int d^4z \delta(y-z) \left(\frac{g_3}{2!} \frac{\delta^2}{\delta J(y) \delta J(y)} + \frac{g_4}{3!} \frac{\delta^3}{\delta J(y) \delta J(y) \delta J(y)} \right) Z[J] \\ &= (\Delta \cdot J)(x) Z[J] - \int d^4z \Delta(x-z) \left(\frac{g_3}{2!} \frac{\delta^2}{\delta J(y) \delta J(y)} + \frac{g_4}{3!} \frac{\delta^3}{\delta J(y) \delta J(y) \delta J(y)} \right) Z[J] \end{aligned}$$

Chamemos $x = x_i$ na equação acima e então tomemos mais $(n-1)$ derivadas: $\frac{\delta}{\delta J(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta J(x_n)}$

$$\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} = G^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$$

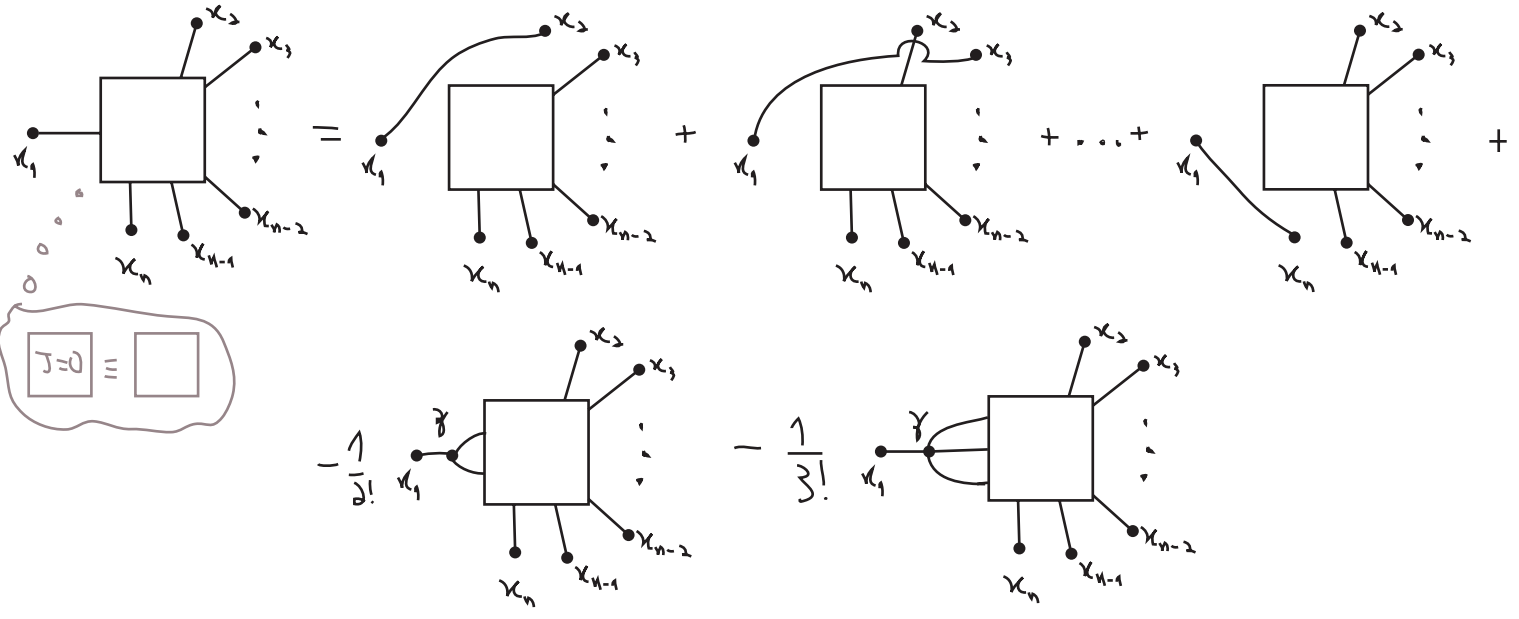
$$\frac{\delta^{n-1} (\Delta \cdot J)(x) Z[J]}{\delta J(x_2) \dots \delta J(x_n)} = \Delta(x_1 - x_2) G^{(n-2)}(x_3, \dots, x_n) + \Delta(x_1 - x_3) G^{(n-2)}(x_2, x_1, \dots, x_n) + \dots$$

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \Delta(x_1 - x_2) G^{(n-2)}(x_3, \dots, x_n) + \dots + \Delta(x_1 - x_n) G^{(n-2)}(x_2, \dots, x_{n-1}) +$$

$$- \int d^d z \Delta(x_1 - z) \left[\frac{g_3}{2!} G^{(n+1)}(z, z, x_2, \dots, x_n) + \frac{g_4}{3!} G^{(n+2)}(z, z, z, x_2, \dots, x_n) \right] \quad (\text{eq. 170.1})$$

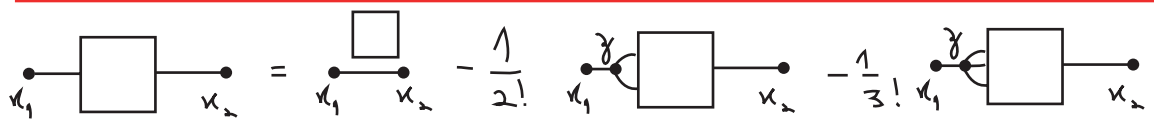
(note que estas são as funções de Green completas, essa relação é verdade independentemente de teoria de perturbação)

Vamos expressar esta equação em termos de diagramas (note que a equação é sempre escrita em função de um **ponto especial** escolhido, neste caso x_1):



Podemos reiterar a equação de DS para obter a expansão perturbativa. Tome, por exemplo, a função de dois pontos da teoria acima:

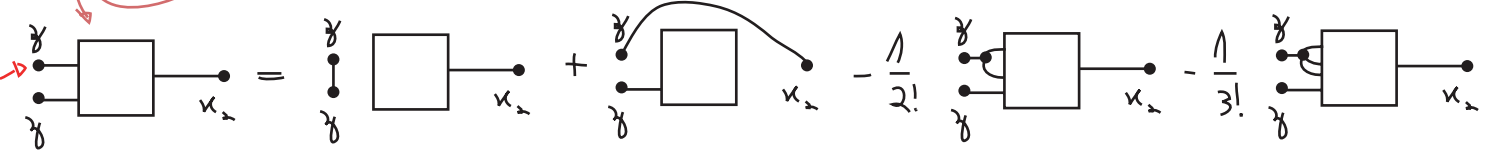
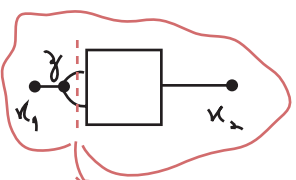
$$G^{(2)}(x_1, x_2) = \Delta(x_1 - x_2) G^{(0)} - \int d^d z \Delta(x_1 - z) \left[\frac{g_3}{2!} G^{(3)}(z, z, x_2) + \frac{g_4}{3!} G^{(4)}(z, z, z, x_2) \right] \quad (\text{eq. 170.2})$$



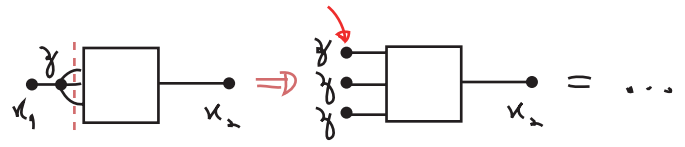
Se usarmos novamente a equação de DS para $G^{(3)}$ e $G^{(4)}$, temos:

$$G^{(3)}(z, z, x_2) = \Delta(z - z) G^{(1)}(x_2) + \Delta(z - x_2) G^{(1)}(z) - \frac{g_3}{2!} \int d^d w \Delta(z - w) G^{(4)}(w, w, z, x_2) - \frac{g_4}{3!} \int d^d w \Delta(z - w) G^{(5)}(w, w, w, z, x_2)$$

Ponto escolhido para escrever a equação



$$G^{(4)}(\phi, \phi, \phi, x_2) = 2\Delta(\phi - \phi) G^{(2)}(\phi, x_2) + \Delta(\phi - x_2) G^{(2)}(\phi, \phi) - \frac{g_2}{2!} \int d^4\omega \Delta(\phi - \omega) G^{(5)}(\omega, \omega, \phi, \phi, x_2) + \dots$$



Voltando com estas expressões em 170.2, temos:

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = \Delta(x_1 - x_2) G^{(0)} - \frac{g_3}{2!} \int d^4\phi \Delta(x_1 - \phi) \left[\Delta(\phi - \phi) G^{(1)}(x_2) + \Delta(\phi - x_2) G^{(1)}(\phi) - \frac{g_2}{2!} \int d^4\omega \Delta(\phi - \omega) G^{(4)}(\omega, \omega, \phi, x_2) - \frac{g_4}{3!} \int d^4\omega \Delta(\phi - \omega) G^{(6)}(\omega, \omega, \omega, \phi, x_2) \right] + \dots$$

O que podemos continuar iterando para obter termos com potências ainda maiores de g_3 e g_4 . Suponha que estivéssemos interessados no termos **CONECTADOS** de ordem $(g_3)^0(g_4)^1$: para começar podemos esquecer completamente o primeiro colchete, pois tudo ali é proporcional a g_3 . Além disso, para nos livrarmos das bolhas no vácuo, devemos dividir tudo por $G^{(0)}$ (o que acontece mesmo em observáveis). Aí só restam os dois primeiros termos do segundo colchete, pois os outros tem potências a mais de g_3 ou g_4 . Como:

$$G^{(2)}(\phi, x_2) = \Delta(\phi - x_2) G^{(0)} + \mathcal{O}(g_3, g_4) \rightarrow \text{já temos uma potência de } g_4 \text{ multiplicando tudo}$$

$$G^{(2)}(x_1, x_2) \stackrel{\mathcal{O}(g_3, g_4)}{=} \Delta(x_1 - x_2) - \frac{g_4}{3!} \int d^4\phi \Delta(x_1 - \phi) \Delta(\phi - \phi) \Delta(\phi - x_2) = \Delta(x_1 - x_2) - \frac{3g_4}{3!} \int d^4\phi \Delta(x_1 - \phi) \Delta(\phi - \phi) \Delta(\phi - x_2) = \text{diagramas}$$

fator de simetria ok!

Simetrias e as Identidades de Ward

Como já vimos dada uma simetria sobre a transformação (global):

$$\phi^{i'} = \phi^i + \underbrace{\epsilon^a (T^a)_{ij}}_{\delta\phi^i} \phi^j$$

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \int d^4x \left\{ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^i} \delta \phi^i + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi^i)} \partial_\mu \delta \phi^i \right\} = \\ &= \int d^4x \left\{ \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^i} - \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi^i)} \right) \right] \delta \phi^i + \partial_\mu \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi^i)} \delta \phi^i \right] \right\} \end{aligned}$$

se as equações de movimento CLÁSSICAS forem satisfeitas o primeiro colchete é zero, e temos (usando o $\delta\phi^i$ acima):

$$(\delta S)^\alpha = \lambda \epsilon^a \partial_\mu \underbrace{\left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi^i)} (T^a)_{ij} \phi^j \right]}_{j_\mu^a} = 0 \quad \text{(corrente de Noether)}$$

Note a importância da equação de movimento clássica. Por isso dizemos que a corrente é conservada classicamente ou **on-shell** (nome que ficará mais claro adiante). Suponha agora que estejamos pensando nas trajetórias ou configurações não clássicas da teoria (**off-shell**), ainda temos $\delta S = 0$, só que:

$$\delta S = 0 = \lambda \epsilon^a (T^a)_{ij} \left\{ \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^i} - \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi^i)} \right) \right] \phi^j + \partial_\mu \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi^i)} \phi^j \right] \right\}$$

Suponha agora que nós tornemos a simetria mais geral tornando-a local $\epsilon^a \rightarrow \epsilon^a(x)$. A ação que era invariante sob a transformação global não vai ser obrigatoriamente invariante sobre a transformação local, a variação agora será:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \lambda \epsilon^a(x) (T^a)_{ij} \left\{ \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^i} - \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi^i)} \right) \right] \phi^j + \partial_\mu \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi^i)} \phi^j \right] \right\} + \\ &+ \lambda \int d^4x (\partial_\mu \epsilon^a) (T^a)_{ij} \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi^i)} \phi^j \right] = \\ &= \lambda \int d^4x (\partial^\mu \epsilon^a(x)) j_\mu^a(x) = -\lambda \int d^4x \epsilon^a(x) \partial^\mu j_\mu^a(x) \quad \text{(eq. 172.1)} \end{aligned}$$

↳ assumindo que ϵ vai a zero no infinito

Esta equação 172.1 vale off-shell, portanto podemos usá-la dentro de integrais de trajetória. Acharmos um jeito de expressar a corrente off-shell de uma ação classicamente invariante sob uma transformação global: basta olhar a variação da mesma ação sob a versão local da transformação, o coeficiente de $\delta^\mu \epsilon^\alpha(x)$ é a corrente.

O que queremos agora é muito semelhante à eq. 169.1 (Dyson-Schwinger), que era uma versão quântica das equações de movimento. Queremos a versão quântica da conservação da corrente:

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \implies \langle \partial_\mu j^\mu = 0 \rangle$$

Aqui, no entanto, a passagem não é garantida, pois podem aparecer **anomalias quânticas**: quando as correções quânticas não respeitam a simetria

Considere: $\delta \phi^\alpha(x) = \lambda \epsilon^\alpha(x) T_{ij}^a \phi^i$ $\phi' = \phi + \delta\phi$

sempre vale que: $\int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} = \int \mathcal{D}\phi' e^{-S[\phi']}$ (só estou mudando o nome da variável de integração)

No entanto, se a mudança de ϕ para ϕ' for tal que o jacobiano seja $\hat{1}$, então $\mathcal{D}\phi' = \mathcal{D}\phi$ e aí:

$$\int \mathcal{D}\phi (e^{-S[\phi']} - e^{-S[\phi]}) = 0 = \int \mathcal{D}\phi \delta(e^{-S[\phi']}) = -\int \mathcal{D}\phi \delta S[\phi] e^{-S[\phi]}$$

$\therefore \langle \delta S \rangle = 0$ (eq. 173.1)

As anomalias entram justamente aí, pois teorias anômalas modificam o jacobiano fazendo justamente que ele seja diferente da identidade. Este assunto será abordado em TQCII, portanto aqui assumiremos simplesmente que a teoria não é anômala. Substituindo 172.1 em 173.1 temos:

$$\int \mathcal{D}\phi \left(-\lambda \int d^4x \epsilon^\alpha(x) \partial^\mu j_\mu^\alpha(x) \right) e^{-S[\phi]} = 0$$

$$\underbrace{\int d^4x \lambda \epsilon^\alpha(x)}_{\text{arbitrário}} \int \mathcal{D}\phi \partial^\mu j_\mu^\alpha(x) e^{-S[\phi]} = 0$$

$\int \mathcal{D}\phi \partial^\mu j_\mu^\alpha(x) e^{-S[\phi]} = 0$ **Identidade de Ward**
(eq. 173.2)

$\langle \partial^\mu j_\mu^\alpha \rangle = 0$

Podemos obter outras identidades deste tipo generalizando o operador que está sendo variado:

$$\delta \mathcal{V}(\phi, \lambda) = \int d^4x \frac{\delta \mathcal{V}(\phi, \lambda)}{\delta \epsilon^a(x)} \epsilon^a(x)$$

e obtemos:

$$0 = \int \mathcal{D}\phi \delta \left[e^{-S[\phi]} \mathcal{V}(\phi, \lambda) \right] = i \int d^4x \epsilon^a(x) \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \left[\partial^\mu \tilde{j}_\mu^a(x) \mathcal{V} - i \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta \epsilon^a(x)} \right]$$

De forma que temos as **Identidades de Ward** Generalizadas:

$$\int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} (\partial^\mu \tilde{j}_\mu^a(x)) \mathcal{V}(\phi, \lambda) = i \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \frac{\delta \mathcal{V}(\phi, \lambda)}{\delta \epsilon^a(x)} \quad (\text{eq. 174.1})$$

Que pode ser usada para, por exemplo, explorar o caso com fontes: $\mathcal{V} = e^{\phi \cdot J}$

$$0 = \int \mathcal{D}\phi \delta \left[e^{-S[\phi] + \phi \cdot J} \right] = \int d^4x \epsilon^a(x) \int \mathcal{D}\phi \frac{\delta}{\delta \epsilon^a(x)} \left[e^{-S[\phi] + \phi \cdot J} \right]$$

$$0 = \int \mathcal{D}\phi \frac{\delta}{\delta \epsilon^a(x)} \left[e^{-S[\phi] + \phi \cdot J} \right] = i T_{ij}^a \int \mathcal{D}\phi \left[-\frac{\delta S}{\delta \phi^i} \phi^j + J_i \phi^i \right] e^{-S + \phi \cdot J}$$

$$\phi(x) \rightarrow \frac{\delta}{\delta J(x)} \quad \frac{\delta S}{\delta \epsilon^a} = \frac{\delta S}{\delta \phi^i} \frac{\delta \phi^i}{\delta \epsilon^a} = i T_{ij}^a \frac{\delta S}{\delta \phi^i} \phi^j$$

$$(i T_{ij}^a) \left[-\frac{\delta S}{\delta \phi^i(x)} \right]_{\phi = \frac{\delta}{\delta J}} + J_i(x) \left[\frac{\delta}{\delta J_j(x)} \right] Z[J] = 0 \quad (\text{eq. 174.2})$$

O que nos dá uma identidade de Ward para Z e pode facilmente ser usada para obter identidades para as funções de Green.

Veremos que a versão local desta história (note que em nenhuma das passagens acima a ação era invariante sobre a transformação local) leva a relações semelhantes (chamadas de Ward-Takahashi) que colocam forte restrições sobre as funções de Green. Um resultado importante é, por exemplo:

$$k^\mu \Pi_{\mu\nu}^{(2)} = 0 \quad \rightarrow \quad \Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k) = (k^2 \delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \Pi^{(2)}(k^2)$$

↳ Função 1PI de dois pontos para o fóton.

É esta restrição que mantém o fóton sem massa mesmo sob correções radiativas (loops).