

$$\delta \mathcal{V}(\phi, \lambda) = \int d^4x \frac{\delta \mathcal{V}(\phi, \lambda)}{\delta \epsilon^a(x)} \epsilon^a(x)$$

e obtemos:

$$0 = \int \mathcal{D}\phi \delta \left[e^{-S[\phi]} \mathcal{V}(\phi, \lambda) \right] = i \int d^4x \epsilon^a(x) \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \left[\partial^\mu \tilde{j}_\mu^a(x) \mathcal{V} - i \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta \epsilon^a(x)} \right]$$

De forma que temos as **Identidades de Ward Generalizadas**:

$$\int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} (\partial^\mu \tilde{j}_\mu^a(x)) \mathcal{V}(\phi, \lambda) = i \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \frac{\delta \mathcal{V}(\phi, \lambda)}{\delta \epsilon^a(x)} \quad (\text{eq. 174.1})$$

Que pode ser usada para, por exemplo, explorar o caso com fontes: $\mathcal{V} = e^{\phi \cdot J}$

$$0 = \int \mathcal{D}\phi \delta \left[e^{-S[\phi] + \phi \cdot J} \right] = \int d^4x \epsilon^a(x) \int \mathcal{D}\phi \frac{\delta}{\delta \epsilon^a(x)} \left[e^{-S[\phi] + \phi \cdot J} \right]$$

$$0 = \int \mathcal{D}\phi \frac{\delta}{\delta \epsilon^a(x)} \left[e^{-S[\phi] + \phi \cdot J} \right] = i T_{ij}^a \int \mathcal{D}\phi \left[-\frac{\delta S}{\delta \phi^i} \phi^j + J_i \phi^i \right] e^{-S + \phi \cdot J}$$

$$\phi(x) \rightarrow \frac{\delta}{\delta J(x)} \quad \frac{\delta S}{\delta \epsilon^a} = \frac{\delta S}{\delta \phi^i} \frac{\delta \phi^i}{\delta \epsilon^a} = i T_{ij}^a \frac{\delta S}{\delta \phi^i} \phi^j$$

$$(i T_{ij}^a) \left[-\frac{\delta S}{\delta \phi^i(x)} \right]_{\phi = \frac{\delta}{\delta J}} + J_i(x) \left[\frac{\delta}{\delta J_j(x)} \right] Z[J] = 0 \quad (\text{eq. 174.2})$$

O que nos dá uma identidade de Ward para Z e pode facilmente ser usada para obter identidades para as funções de Green.

Veremos que a versão local desta história (note que em nenhuma das passagens acima a ação era invariante sobre a transformação local) leva a relações semelhantes (chamadas de Ward-Takahashi) que colocam forte restrições sobre as funções de Green. Um resultado importante é, por exemplo:

$$k^\mu \Pi_{\mu\nu}^{(2)} = 0 \quad \rightarrow \quad \Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k) = (k^2 \delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \Pi^{(2)}(k^2)$$

↳ Função 1PI de dois pontos para o fóton.

É esta restrição que mantém o fóton sem massa mesmo sob correções radiativas (loops).

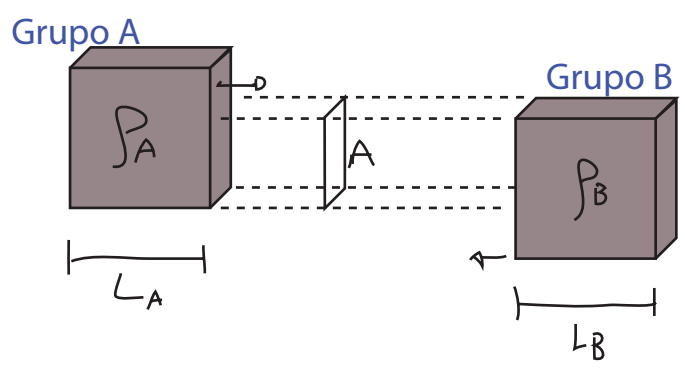
Seções de Choque e Matriz S

(Nastase 19; Peskin 4.5)

Chegamos em fim ao ponto em que formalizaremos a conexão entre as funções de n-pontos das teorias de campos com espalhamentos envolvendo estados assintóticos com n partículas. Começamos com a idéia por trás do que esperamos observar em experimentos envolvendo partículas ou quasi-partículas:

Seção de Choque

A situação que temos em mente é um espalhamento entre dois "amontoados" de partículas (ou quasi-partículas, enfim, excitações do campo), quer seja um projétil atirado em um alvo ou a colisão de dois objetos (o que é o mesmo, dependendo de referencial). Cada um destes grupos tem um número grande de partículas e dimensões finitas:



$\rho_A, \rho_B \rightarrow$ densidade numéricas
 $A \rightarrow$ área de impacto
 $L_A, L_B \rightarrow$ comprimento ao longo da direção do impacto

Assumindo que ambos os grupos são rarefeitos e que as interações internas são desprezíveis, é razoável dizer que o número total de colisões (eventos) é proporcional a todas as grandezas definidas acima:

$$\# \text{EVENTOS} \propto \rho_A L_A \rho_B L_B A$$

A esta "constante" de proporcionalidade damos o nome de **seção de choque**:

$$\sigma \equiv \frac{\# \text{EVENTOS}}{\rho_A L_A \rho_B L_B A} \quad (\text{eq. 175.1})$$

Que tem dimensão de área: $[\sigma] = \frac{1}{L^{-3} L L^{-3} L L^2} = L^2$

E pode ser interpretada como o "tamanho de interação" da partícula, ou seja, a área em torno do "alvo" na qual um "projétil" seria espalhado (note, no entanto, que isto depende também do projétil). Outra forma de ver como devemos definir a seção de choque é pensando em um modelo clássico, o espalhamento por um potencial $V(r) = \frac{Ze^2}{r}$

Neste caso temos apenas um alvo, pontual, produzindo o potencial. Se temos um feixe de partículas sendo lançado neste alvo o número de espalhamentos por unidade de tempo é proporcional ao fluxo:

Fluxo $\phi_0 = \frac{\Delta N_{in}}{A \cdot \Delta t}$

- ΔN_{in} \rightarrow # partículas incidentes
- Δt \rightarrow unidade. de tempo
- A \rightarrow unidade. de área

$\Delta N_{EV} \leftrightarrow$ # partículas espalhadas (eventos)

$$\frac{\Delta N_{EV}}{\Delta t} \propto \phi_0$$

E a proporcionalidade entre os dois vai ser, de novo, a seção de choque:

$$\sigma = \frac{\Delta N_{EV} / \Delta t}{\phi_0} = \frac{\Delta N_{EV}}{\underbrace{\Delta N_{IN} / A}_{n_B \text{ densidade por área}}} = \frac{\Delta N_{EV}}{n_B} \quad (\text{eq. 176.1})$$

(unidades de área, consistentemente)

Também podemos escrever:

$$\phi_0 = \frac{\Delta N_{IN}}{A \cdot \Delta t} = \frac{\rho_B (\underbrace{v \Delta t}_{\text{velocidade relativa}}) A}{A \cdot \Delta t} = \rho_B \cdot v$$

(volume incidente em um tempo Δt)

Podemos então considerar o caso de N alvos independentes onde $N = \int_A L_A A$ então a seção de choque **por alvo** (e essa é a definição de seção de choque) é:

$$\sigma = \frac{\Delta N_{EV} / \Delta t}{\phi_0 N} = \frac{\Delta N_{EV}}{\underbrace{\rho_B (v \Delta t)}_{L_B} \rho_A L_A A} = \frac{\Delta N_{EV}}{\rho_B L_B \rho_A L_A A} \quad \text{como vimos antes}$$

A seção do choque definida acima é chamada de **Seção de Choque Total**, pois mede a intensidade do espalhamento sem levar em conta a energia das partículas espalhadas nem o seu momento (o que inclui a direção em que foram espalhadas). Tipicamente tanto a energia quanto o momento (ou no mínimo a direção) são medidos em experimentos e muita informação física pode ser tirada daí sobre a interação que está gerando os espalhamentos. Para um dado modelo estamos interessados em saber por exemplo, qual é a taxa de espalhamentos em uma certa direção, ou para estados finais com energia e momento acima de um certo valor. A grandeza que nos permite obter estas distribuições é a **Seção de Choque Diferencial**:

$$\frac{d\sigma}{d^3p_1 \dots d^3p_n}$$

↪ momentos dos estados finais

O exemplo mais útil é o espalhamento $2 \rightarrow 2$ (duas partículas iniciais e duas finais, elástico ou inelástico). Nesse caso temos dois estados finais, logo dois **tri-momentos**¹. Tenho quatro deltas de Dirac (da conservação total de momento e energia), o que me deixa com duas variáveis independentes, que posso escolher como sendo dois ângulos θ (de 0 a π em relação ao momento inicial / direção do feixe) e ϕ (azimutal, vai de 0 a 2π em torno do momento inicial). Estes dois ângulo definem um ângulo sólido Ω , e é comum definir: $\frac{d\sigma}{d\Omega}$

¹Está embutida a suposição (razoável) de que os estados finais estão on-shell, vale a relação relativística entre momento e energia, de forma que a energia não é livre uma vez que conhecemos o momento. Ainda precisamos provar que os estados assintóticos na nossa teoria têm essa propriedade.

Taxa de Decaimento

Outro exemplo de interesse é o de processos $1 \rightarrow n$, onde começamos com uma partícula

instável que decaí em um numero maior de outras partículas. Dado uma mostra de partículas deste tipo, o número de decaimentos por unidade de tempo vai ser proporcional ao número de partículas na amostra: (mais uma vez assumindo que a amostra seja rarefeita ou com pouca interação, para evitar reações em cadeia)

$$\frac{\# \text{DECAIMENTOS}}{\Delta t} \propto \# \text{PARTICULAS}$$

Definimos então:

$$\Gamma \equiv \frac{\# \text{DECAIMENTOS}}{\Delta t \# \text{PARTICULAS}} = \frac{dN}{N dt}$$

Taxa (ou Largura) de Decaimento
(eq. 177.1)

Uma mesma partícula pode ter vários decaimentos possíveis, como larguras diferentes em cada um destes canais. A vida média da partícula, neste caso, é dada por:

$$\tau = \frac{1}{\sum_i \Gamma_i}$$

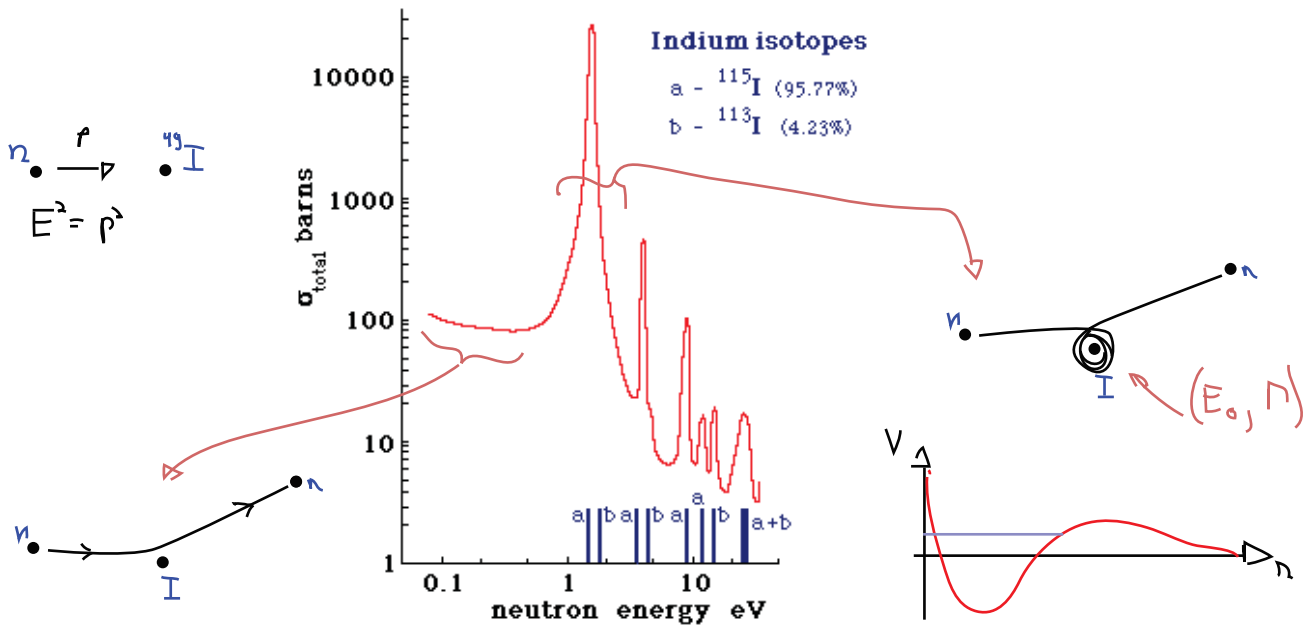
(eq. 177.2)
soma sobre os canais

Sabemos que estados atômicos ou nucleares instáveis (ressonâncias) aparecem, segundo a MQ não relativística, como distribuições de Breit-Wigner no espalhamento, cuja amplitude é:

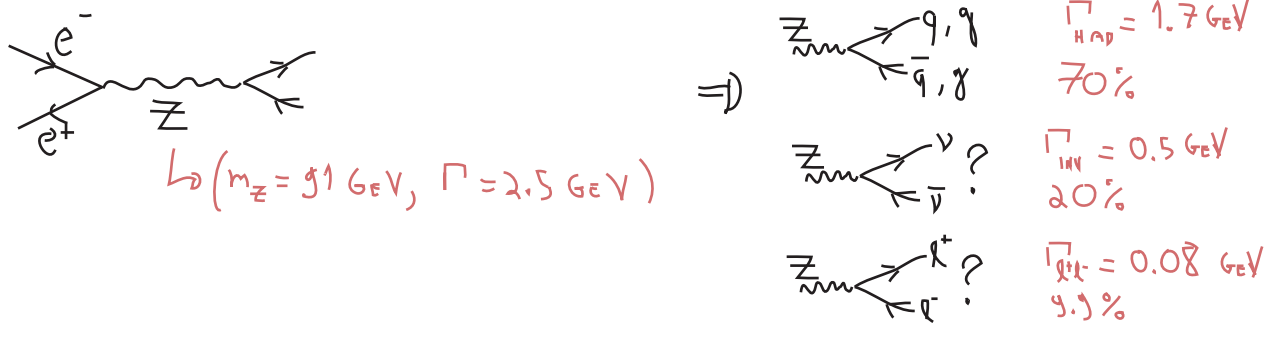
$$f(E) \propto \frac{1}{E - E_0 + i\Gamma/2}$$

e (densidade de) probabilidade: $\sigma \propto \frac{1}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$ (eq. 177.3) Distribuição de Breit-Wigner

energia do espalhamento no centro de massa Pico da distribuição Largura



Em espalhamentos relativísticos o mesmo ocorre, as partículas iniciais podem se combinar para formar estados instáveis, que então decaem em outros, por exemplo:



Na amplitude de espalhamento isso vai aparecer como uma generalização relativística da distribuição de Breit-Wigner, lembrando que uma partícula em movimento relativístico vai ter uma taxa de decaimento (por conta da dilatação temporal): $\frac{m}{E_p} \Gamma$

$$\frac{1}{p^2 + m^2 - i m \Gamma} \approx \frac{-1}{2 E_p \left(p^0 - E_p + \frac{i m}{E_p} \frac{\Gamma}{2} \right)}$$

$p^2 \sim -m^2$
 $p^0 \sim E_p$ distribuição perto do pico

$$p^2 + m^2 = -(p^0)^2 + \frac{|\vec{p}|^2 + m^2}{E_p^2} = \underbrace{(E_p + p^0)}_{\sim 2 E_p} (E_p - p^0)$$

A matriz S

Começamos o cálculo do espalhamento definindo os estados inicial e final.

Estados iniciais: consideramos um número finito de pacotes que, em $t = -\infty$, estão isolados entre si e tem momento definido. Estes estados, definidos na representação de Heisenberg, são chamados de **in-states**:

$$|\{ \vec{p}_i \} \rangle_{in}$$

Para tempos finitos $-T < t < +T$, estes pacotes de onda vão se sobrepor e interagir (elastica ou inelasticamente) dando origem a um outro conjunto de pacotes de onda que se afastam e acabam por ficar mutuamente isolados. Definiremos estes estados em $t = +\infty$, e os chamamos de **out-states**:

$$|\{ \vec{p}_i \} \rangle_{out}$$

O conjunto de todos possíveis estados in (out) é completo:

$$\sum_{in} |\{ \vec{p}_i \} \rangle_{in} \langle \{ \vec{p}_i \} |_{in} = \sum_{out} |\{ \vec{p}_i \} \rangle_{out} \langle \{ \vec{p}_i \} |_{out} = 1$$

O que quer que podemos expandir um destes estados em função do conjunto de outros.

O que queremos saber é (duas partículas iniciais, n finais):

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots | \vec{k}_A, \vec{k}_B \rangle_{\text{in}} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots; T | \vec{k}_A, \vec{k}_B; -T \rangle_{\text{H}} = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots | e^{-iHT} | \vec{k}_A, \vec{k}_B \rangle_{\text{S}} \end{aligned} \quad (\text{eq. 179.1})$$

(podemos tomar T como o tempo em que os dois quadros são iguais)

Com isso, definimos a **matriz S**:

$$\langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots | S | \vec{k}_A, \vec{k}_B \rangle \equiv \langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots | \vec{k}_A, \vec{k}_B \rangle_{\text{in}} \quad (\text{eq. 179.2})$$

Vamos então, definir os pacotes de onda. O caso de uma partícula é trivial, pois ela está sempre isolada, então:

$$|\vec{p}\rangle_{\text{in}} = |\vec{p}\rangle_{\text{out}} = |\vec{p}\rangle = \sqrt{2E_p} \alpha_p^+ |0\rangle$$

↳ teoria livre apenas

$$|\phi\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \phi(\vec{k}) |\vec{k}\rangle$$

$$\left. \begin{aligned} \langle \phi | \phi \rangle &= 1 \\ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |\phi(\vec{k})|^2 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

E podemos escolher a distribuição de momentos, por ex.: $\phi(\vec{k}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$

No caso de duas partículas temos que tomar cuidado com a possibilidade de que, mesmo que elas "colidam" (interajam), os centros das duas distribuições espaciais nunca tenham se encontrado.

$$|\phi_A \phi_B\rangle_{\text{in}} = \int \frac{d^3k_A}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k_B}{(2\pi)^3} \frac{\phi_A(\vec{k}_A) \phi_B(\vec{k}_B)}{\sqrt{2E_A} \sqrt{2E_B}} e^{-i\vec{k}_A \cdot \vec{k}_B} |\vec{k}_A, \vec{k}_B\rangle_{\text{in}} \quad (\text{eq. 179.3})$$

↳ para deixar a possível separação \vec{b} entre os pacotes explícita. \vec{b} , transversa a direção do impacto, é o **parâmetro de impacto**

Os estados finais são definidos da forma usual:

$$\langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots | = \prod_k \int \frac{d^3p_k}{(2\pi)^3} \frac{\phi_k(p_k)}{\sqrt{2E_k}} \langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots | \quad (\text{eq. 179.4})$$

Os elementos da matriz S serão dados por: $S_{\alpha\beta} = \langle \beta_{\text{out}} | \alpha_{\text{in}} \rangle$

As equações 179.1 e 179.2 mostram que S é um operador de evolução, portanto:

$$S S^\dagger = S^\dagger S = 1$$

Mas em S está também contida a possibilidade das partículas iniciais não interagirem, de forma que os estado final seja igual ao inicial, ou seja S contém a identidade. Para separar esses eventos dos espalhamentos propriamente ditos, definimos:

$$S \equiv 1 + i T \quad (\text{eq. 180.1})$$

↳ puramente convencional

Além disso, sabemos que o momento e a energia totais se conservam, implementado por meio de uma delta de Dirac, definimos então o **Elemento de Matriz Invariante**:

$$\langle p_1 p_2 \dots | i T | k_A, k_B \rangle \equiv (2\pi)^4 \delta^4(k_A + k_B - \sum p_k) i \mathcal{M}(k_A, k_B \rightarrow p_k) \quad (\text{eq. 180.2})$$

Fórmula de Redução de LSZ

A formula que relaciona os elementos da matriz S (o que queremos calcular) com as funções de Green da teoria (o que sabemos calcular) é chamada de Fórmula de Redução de LSZ. Ela será provada em TQCII, aqui nos limitaremos a enunciá-la. Dada a função de Green no espaço dos momentos:

$$\tilde{G}_{n+m}(p_i^N, k_j^N) = \int \prod_{i=1}^n d^4x_i e^{-i p_i x_i} \int \prod_{j=1}^m d^4y_j e^{-i k_j y_j} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \phi(y_1) \dots \phi(y_m) \} | \Omega \rangle$$

↳ # partículas iniciais
↳ # partículas finais

temos:

$$\langle \{ p_i \}_n | \{ k_j \}_m \rangle_{in} = \lim_{\substack{p_i^2 \rightarrow -m_i^2 \\ q_j^2 \rightarrow -m_j^2}} \frac{1}{(-i\sqrt{Z})^{m+n}} \prod_{i=1}^n (p_i^2 + m_i^2 - i\epsilon) \prod_{j=1}^m (k_j^2 + m_j^2 - i\epsilon) \tilde{G}_{n+m}(p_i^N, k_j^N)$$

(eq. 180.3)

lembrando que as funções de Green no espaço dos momentos tinham um propagador para cada linha externa. Estes serão cancelados por estes termos entre parênteses, que nada mais são que os inversos dos propagadores (no espaço dos momentos). Essencialmente vemos que o elemento da matriz S se trata do resíduo da função de Green quando todos os momentos estão em seus polos.

Note que esta expressão é para a função de Green completa, com todos os termos da expansão perturbativa somados, em TQCII veremos que este fator Z que aparece aí está ligado as correções em loop para o propagador. As massas também não são as mesmas que aparecem na Lagrangeana e sim as massas corrigidas pela interação do campo (massas físicas). A função de Green completa de 2 pontos, próximo ao polo, tem a forma:

$$G_2^c(p) = \int d^4x e^{-i p x} \langle \Omega | T \{ \phi(x), \phi(y) \} | \Omega \rangle \sim \frac{-i Z}{p^2 + m^2 - i\epsilon}$$

Em contraste com o propagador da teoria livre:

$$G_2(p) = \frac{-i}{p^2 + \underbrace{m_0^2}_{\text{massa "nua" (a que aparece na Lagrangeana)} - i\epsilon}$$

O que significa que, a nível árvore: $\begin{cases} \geq -1 \\ m = m_0 \end{cases}$

Com esta fórmula conseguimos obter os elementos \mathcal{M} a partir das funções de Green. Resta saber como obtemos σ . A probabilidade de, dado um estado inicial $|\phi_A \phi_B\rangle$, produzirmos n partículas com momentos no intervalo $d^3p_1 \dots d^3p_n$ é:

$$P(A, B \rightarrow 1, 2, \dots, n) = \left(\frac{\prod_{i=1}^n d^3p_i}{f (2\pi)^3 dE_f} \right) \left| \langle \underbrace{p_1, p_2, \dots, p_n}_{\text{normalização}} | \phi_A \phi_B \rangle_{\text{IN}} \right|^2$$

Suponha que tenhamos apenas uma partícula A (alvo) e um monte de partículas B, com n_B partículas por unidade de área transversa, e diferentes parâmetros de impacto b . O número de partículas espalhadas é:

$$\Delta N_{ev} = \sum_{i=\text{partículas B incidentes}} P_i = \int d^2b n_B P(\vec{b}) = n_B \int d^2b P(\vec{b})$$

distribuição uniforme

Então, de 176.1, temos:

$$d\sigma = \frac{\Delta N_{ev}}{n_B} = \int d^2b P(\vec{b}) \quad (\text{eq. 181.1})$$

porque estamos considerando a versão infinitesimal

$$\langle \{p_f\} | \phi_A \phi_B \rangle \langle \{p_f\} | \phi_A \phi_B \rangle^*$$

$\int d^3k_A d^3k_B \quad \int d^3\bar{k}_A d^3\bar{k}_B$

$$d\sigma = \int d^2b \left(\frac{\prod_{i=1}^n d^3p_i}{f (2\pi)^3 dE_f} \right) \left| \langle \{p_f\} | \phi_A \phi_B \rangle_{\text{IN}} \right|^2 =$$

$$\int d^2b \left(\frac{\prod_{i=1}^n d^3p_i}{f (2\pi)^3 dE_f} \right) \prod_{i=A, B} \int \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3} \frac{\phi_i(\vec{k}_i)}{\sqrt{2E_i}} \int \frac{d^3\bar{k}_i}{(2\pi)^3} \frac{\phi_i^*(\vec{k}_i)}{\sqrt{2E_i}} e^{i\vec{b} \cdot (\vec{k}_B - \vec{k}_B)}$$

(eq. 179.3)

$$\times \langle \{p_f\} | \{k_i\} \rangle_{\text{IN}} \langle \{p_f\} | \{\bar{k}_i\} \rangle_{\text{IN}}^* =$$

(eq. 181.2)

Podemos fazer a integral no parâmetro de impacto:

$$\int d^2b e^{i\vec{b} \cdot (\vec{k}_B - \vec{k}_B)} = (2\pi)^2 \delta^{(2)}(\vec{k}_B^\perp - \vec{k}_B^\perp)$$

$\hookrightarrow \vec{b} = \vec{b}^\perp$