Em contraste com o propagador da teoria livre:

$$G_2(p) = \frac{-i}{p^2 + \underbrace{m_0^2}_{\text{massa "nua" (a que aparece na Lagrangeana)}} - i\epsilon}$$

O que significa que, a nível árvore: $\begin{cases} Z = 1 \\ m = m_0 \end{cases}$

Com esta fórmula conseguimos obter os elementos $\mathcal{M}$ a partir das funções de Green. Resta saber como obtemos σ. A probabilide de, dado um estado inicial $|\phi_A \phi_B\rangle$, produzirmos n partículas com momentos no intervalo $d^3p_1 \dots d^3p_n$ é:

$$P(AB \to 12\dots n) = \Big(\prod_f \underbrace{\frac{d^3p_f}{(2\pi)^3\, 2E_f}}_{\text{normalização}}\Big) \left| {}_{OUT}\langle p_1 p_2 \dots p_n | \phi_A \phi_B \rangle_{IN} \right|^2$$

Suponha que tenhamos apenas uma partícula A (alvo) e um monte de partículas B, com n_B partículas por unidade de área transversa, e diferentes parâmetros de impacto b. O número de partículas espalhadas é:

$$\Delta N_{ev} = \sum_{\substack{i = \text{partículas B} \\ \text{incidentes}}} P_i = \int d^2b\, \underbrace{n_B}_{\text{distribuição uniforme}} P(\vec{b}) = n_B \int d^2b\, P(\vec{b})$$

Então, de 176.1, temos:

$$\boxed{\underbrace{d\sigma}_{\text{porque estamos considerando a versão infinitesimal}} = \frac{\Delta N_{ev}}{n_B} = \int d^2b\, P(\vec{b})} \quad \text{(eq. 181.1)}$$

$$\cdots \langle \{p_f\} | \underbrace{\phi_A \phi_B}_{d^3k_A\, d^3k_B} \rangle \langle \{p_f\} | \underbrace{\phi_A \phi_B}_{d^3\bar{k}_A\, d^3\bar{k}_B} \rangle^*$$

$$\boxed{\begin{aligned} d\sigma &= \int d^2b \Big(\prod_f \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3\, 2E_f}\Big) \left| {}_{OUT}\langle \{p_f\} | \phi_A \phi_B \rangle_{IN} \right|^2 = \\ &\overset{\text{(eq. 179.3)}}{=} \int d^2b \Big(\prod_f \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3\, 2E_f}\Big) \prod_{i=A,B} \int \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3} \frac{\phi_i(\vec{k}_i)}{\sqrt{2E_i}} \int \frac{d^3\bar{k}_i}{(2\pi)^3} \frac{\phi_i^*(\vec{\bar{k}}_i)}{\sqrt{2\bar{E}_i}}\, e^{i\vec{b}(\vec{\bar{k}}_B - \vec{k}_B)} \times \\ &\times {}_{OUT}\langle \{p_f\} | \{k_i\} \rangle_{IN}\; {}_{OUT}\langle \{p_f\} | \{\bar{k}_i\} \rangle_{IN}^* = \end{aligned}}$$

(eq. 181.2)

Podemos fazer a integral no parâmetro de impacto:

$$\int d^2b\, e^{i\vec{b}\cdot(\vec{\bar{k}}_B - \vec{k}_B)} = (2\pi)^2 \delta^{(2)}(k_B^\perp - \bar{k}_B^\perp)$$

$$\vec{b} = b^\perp$$

E usar a definição dos elementos de matriz:

$$ {}_{OUT}\langle\{p_f\}|\{k_i\}\rangle_{IN} = i\,\mathcal{M}(k_A,k_B\to\{p_f\})(2\pi)^4\,\delta^{(4)}\left(\sum k_i-\sum p_f\right) $$

só queremos a parte não trivial ($\neq \hat{1}$)

$$ {}_{OUT}\langle\{p_f\}|\{\bar{k}_i\}\rangle^*_{IN} = -i\,\mathcal{M}^*(\bar{k}_A,\bar{k}_B\to\{p_f\})(2\pi)^4\,\delta^{(4)}\left(\sum \bar{k}_i-\sum p_f\right) $$

A integral nos $\bar{k}$, fica (levando em conta as deltas vindo da integração no parâmetro de impacto e do elemento de matriz):

$$ \int\frac{d^3\bar{k}_A}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3\bar{k}_B}{(2\pi)^3}(2\pi)^4\,\delta^{(4)}\left(\sum\bar{k}_i-\sum p_f\right)(2\pi)^2\,\delta^{(2)}\left(k_B^\perp-\bar{k}_B^\perp\right)= $$

$$ d^3k_i = d^2k_i^\perp\, dk_i^z \qquad \delta^{(4)}\left(\sum\bar{k}_i-\sum p_f\right)=\delta^{(2)}\left(\bar{k}_A^\perp+\bar{k}_B^\perp-\sum p_f^\perp\right)\delta\left(\bar{k}_A^z+\bar{k}_B^z-\sum p_f^z\right)\delta\left(E_A+E_B-\sum E_f\right) $$

$$ =\int d^2\bar{k}_A^\perp\, d\bar{k}_A^z\, d\bar{k}_B^z\;\delta^{(2)}\Big(\bar{k}_A^\perp+\underbrace{k_B^\perp-\sum p_f^\perp}_{k_A^\perp}\Big)\,\delta\left(\bar{k}_A^z+\bar{k}_B^z-\sum p_f^z\right)\delta\left(\bar{E}_A+\bar{E}_B-\sum E_f\right)\Big|_{k_B^\perp=\bar{k}_B^\perp}= $$

(imposto pela outra delta, de ${}_{OUT}\langle\{p_f\}|\{k_i\}\rangle_{IN}\propto\delta^{(4)}\left(\sum k_i-\sum p_f\right)$)

$$ =\int d\bar{k}_A^z\, d\bar{k}_B^z\,\delta\left(\bar{k}_A^z+\bar{k}_B^z-\sum p_f^z\right)\delta\left(\bar{E}_A+\bar{E}_B-\sum E_f\right)\Big|_{k_i^\perp=\bar{k}_i^\perp}=\int d\bar{k}_A^z\,\delta\Big(\underbrace{\sqrt{\bar{k}_A^2+m_A^2}}+\underbrace{\sqrt{\bar{k}_B^2+m_B^2}}-\sum E_f\Big)\Big|_{\substack{k_i^\perp=\bar{k}_i^\perp\\ \bar{k}_B^z=\sum p_f^z-\bar{k}_A^z}}= $$

$$ \frac{d\bar{E}_A}{d\bar{k}_A^z}=\frac{\bar{k}_A^z}{\bar{E}_A} \qquad \frac{d\bar{E}_B}{d\bar{k}_B^z}=\frac{\bar{k}_B^z}{\bar{E}_B}\underset{\bar{k}_B^z=\sum p_f^\perp-\bar{k}_A^z}{=}-\frac{d\bar{E}_B}{d\bar{k}_A^z} $$

$$ \delta\left(\bar{E}_A+\bar{E}_B-\sum E_f\right)=\left|\frac{d}{d\bar{k}_A^z}\left(\bar{E}_A+\bar{E}_B\right)\right|^{-1}_{\bar{E}_A+\bar{E}_B=\sum E_f}=\Bigg|\underbrace{\frac{\bar{k}_A^z}{\bar{E}_A}}_{v_A}-\underbrace{\frac{\bar{k}_B^z}{\bar{E}_B}}_{v_B}\Bigg|^{-1}_{\bar{E}_A+\bar{E}_B=\sum E_f} $$

$$ =\frac{1}{|v_A-v_B|}\Bigg|_{\substack{\bar{E}_A+\bar{E}_B=\sum E_f\\ k_i^\perp=\bar{k}_i^\perp\\ \bar{k}_B^z=\sum p_f^z-\bar{k}_A^z}} $$

Lembrando que em todo resto do integrando temos que impor as três condições obtidas:

(1) $\bar{E}_A+\bar{E}_B=\sum E_f$ (2) $k_i^\perp=\bar{k}_i^\perp$ (3) $\bar{k}_B^z=\sum p_f^z-\bar{k}_A^z$

E que ainda temos outra delta de Dirac:

$$ \delta^{(4)}\left(\sum k_i-\sum p_f\right)=\delta\Big(\underbrace{k_A^z+k_B^z-\sum p_f}_{(4)}\Big)\delta^{(2)}\left(k_A^\perp+k_B^\perp-\sum p_f^\perp\right)\delta\Big(\underbrace{E_A+E_B}_{(5)}-\sum E_f\Big) $$

vemos que de fato (unindo as condições (1) a (3) com a delta acima):

$$(3)+(4) \Rightarrow k_A^z + k_B^z = \overline{k_A^z} + \overline{k_B^z} \Rightarrow (6)\ \overline{k_B^z} = k_A^z + k_B^z - \overline{k_A^z}$$

$$(1)+(5) \Rightarrow \bar{E}_A + \bar{E}_B = E_A + E_B$$

$$\sqrt{k_A^{z\,2} + \underbrace{k_A^{\perp\,2} + m_A^2}_{A^2}} + \sqrt{k_B^{z\,2} + \underbrace{k_B^{\perp\,2} + m_B^2}_{B^2}} = \sqrt{\overline{k_A^z}^2 + \underbrace{\overset{(2)}{k_A^{\perp\,2}} + m_A^2}_{A^2}} + \sqrt{\overline{k_B^z}^2 + \underbrace{\overset{(2)}{k_B^{\perp\,2}} + m_B^2}_{B^2}}$$

$$(6) \Rightarrow (6b)\ \overline{k_B^z}^2 = k_A^{z\,2} + k_B^{z\,2} + \overline{k_A^z}^2 + 2k_A^z k_B^z - 2k_A^z \overline{k_A^z} - 2k_B^z \overline{k_A^z}$$

$$(E_A + E_B)^2 = (\bar{E}_A + \bar{E}_B)^2$$

$$k_A^{z\,2} + \cancel{A^2} + k_B^{z\,2} + \cancel{B^2} + 2E_A E_B = \overline{k_A^z}^2 + \overset{(6b)}{\overline{k_B^z}^2} + \cancel{A^2} + \cancel{B^2} + 2\bar{E}_A \bar{E}_B \quad \underbrace{\ldots + \overline{k_A^z}\,\overline{k_B^z} + A\overline{k_B^z}}_{}\ (6)$$

$$2\sqrt{(k_A^{z\,2}+A^2)(k_B^{z\,2}+B^2)} = 2\overline{k_A^z}^2 + 2k_A^z k_B^z - 2k_A^z\overline{k_A^z} - 2k_B^z\overline{k_A^z} + 2\sqrt{(\overline{k_A^z}^2+A^2)(\overline{k_B^z}^2+B^2)}$$

$$2(B-A)\,k_A^z = 2(B-A)\,\overline{k_A^z} \xrightarrow{\forall B,A} \boxed{k_A^z = \overline{k_A^z}}\ (7)$$

$$(7)+(6) \Rightarrow \boxed{k_B^z = \overline{k_B^z} \qquad \bar{E}_A = E_A \qquad \bar{E}_B = E_B}\ (8)$$

Voltando a $d\sigma$:

$$\boxed{d\sigma = \left(\prod_f \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3\, 2E_f}\right)\prod_{i=A,B}\int \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3}\frac{|\phi_i(\vec{k}_i)|^2}{2E_i}\frac{1}{|v_A - v_B|}\left|\mathcal{M}(k_A,k_B\to\{p_f\})\right|^2 (2\pi)^4\delta^{(4)}\Big(\sum_{A,B} k_i - \sum p_f\Big)}$$

(eq. 183.1)

Especializando para o caso em que as distribuições de momento são estreitas:

$$|\phi_A(\vec{k}_A)|^2 \sim (2\pi)^3\delta^3(\vec{k}_A - \vec{p}_A^{\,0})$$

$$|\phi_B(\vec{k}_B)|^2 \sim (2\pi)^3\delta^3(\vec{k}_B - \vec{p}_B)$$

(na verdade uma distribuição estreita, mas de largura finita)

temos:

$$\boxed{d\sigma = \frac{1}{2E_A\, 2E_B\, |v_A - v_B|}\left(\prod_f \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3\, 2E_f}\right)\left|\mathcal{M}(p_A,p_B\to\{p_f\})\right|^2(2\pi)^4\delta^{(4)}\Big(p_A+p_B-\sum p_f\Big)}$$

(eq. 183.2)

Note que a razão pela qual essa última expressão é útil consiste no fato de que, experimentalmente, tanto os estados que preparamos para a colisão quanto aqueles que medimos, se parecem muito com estados de momento bem determinado, mas não são ondas planas. Isso ocorre porque tanto na produção quanto na medida temos uma certa precisão FINITA na determinação do momento. Isso significa que sobra uma pequena incerteza no momento e o pacote não fica totalmente delocalizado. "Estreito" na definição acima quer dizer "menor que a precisão experimental".

Das grandezas em 183.2, todas abaixo são invariantes me Lorentz (desde que integremos nos momentos):

$$\left(\int\prod_f \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3\, 2E_f}\right) \quad \& \quad \mathcal{M}(p_A,p_B\to\{p_f\}) \quad \& \quad (2\pi)^4\delta^{(4)}\Big(p_A+p_B-\sum p_f\Big)$$

De fato chamamos:

$$\boxed{\int d\Pi_n = \left(\int \prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3\, 2E_f}\right)(2\pi)^4\, \delta^{(4)}\!\left(p_A + p_B - \sum p_f\right)}$$ (eq. 184.1)

de Espaço de Fase Invariante para *n* corpos. No entanto temos um fator que muda sobre boosts:

$$\frac{1}{E_A E_B |v_A - v_B|} = \frac{1}{|E_B p_A^z - E_A p_B^z|} = \frac{1}{|\epsilon_{\mu x y \nu}\, p_A^\mu\, p_B^\nu|} = A^{xy}$$

(área transversa a z, e se transforma como tal. Invariante a boosts na direção z)

Se $\vec{p}_A \,/\!/\, \vec{p}_B$ (referencial do centro de massa ou do laboratório, que de fato é o que assumimos até agora, por exemplo na integral em b) podemos escrever:

$$\frac{1}{E_A E_B |v_A - v_B|} = \frac{1}{F}$$ Fator de fluxo invariante de Møller

$$F^2 = (p_A \cdot p_B)^2 - m_A^2 m_B^2 = |E_A \vec{p}_B - E_B \vec{p}_A|^2 - |\vec{p}_1 \times \vec{p}_2|^2$$

O que nos fornece uma expressão invariante de Lorentz para a seção de choque total (note que a seção de choque diferencial não é invariante em geral, embora possamos definir algumas que são, a chamada rapidity é um exemplo):

$$\boxed{\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(p_A\cdot p_B)^2 - m_A^2 m_B^2}} \left(\int \prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3\, 2E_f}\right) \left|\mathcal{M}(p_A, p_B \to \{p_f\})\right|^2 (2\pi)^4\, \delta^{(4)}\!\left(p_A + p_B - \sum p_f\right)}$$ (eq. 184.2)

esta integral exige cuidado quando temos partículas idênticas no estado final, para que não contemos multiplas vezes o mesmo estado temos que dividir por 1/n! (onde n é o # de partículas ident.)

Um caso específico bastante relevante é o espalhamento 2 → 2, no referencial do centro de massa ($\vec{p}_{TOT} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$), o espaço de fase fica:

$$\int d\Pi_2 = \int \frac{d^3 p_1\, d^3 p_2}{(2\pi)^6\, 4E_1 E_2} (2\pi)^4\, \delta^{(3)}\!\big(\underbrace{\vec{p}_A + \vec{p}_B}_{0} - \sum \vec{p}_f\big)\, \delta\big(\overbrace{E_A + E_B}^{E_{cm}} - E_1 - E_2\big) =$$

$\to \vec{p}_1 = -\vec{p}_2$

$$d^3 p_1 = dp_1\, p_1^2\, d\Omega$$

$$= \int \frac{dp_1\, p_1^2\, d\Omega}{16\pi^2 E_1 E_2}\, \underbrace{\delta(E_{cm} - E_1 - E_2)}_{\text{mesma coisa que fizemos na pg 182}} \Bigg|_{\vec{p}_1 = -\vec{p}_2} = \int \frac{d\Omega\, p_1^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \frac{1}{\left|\frac{p_1}{E_1} + \frac{p_1}{E_2}\right|}\Bigg|_{\substack{\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \\ E_1 + E_2 = E_{cm}}} =$$

$$= \boxed{\int \frac{d\Omega\, p_1}{16\pi^2 E_{cm}}}$$ (eq. 184.3)

$$\therefore \boxed{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} = \frac{1}{2E_A\, 2E_B |v_A - v_B|} \frac{|\vec{p}_1|}{16\pi^2 E_{cm}} \left|\mathcal{M}(p_A, p_B \to p_1, p_2)\right|^2}$$ (eq. 184.4)

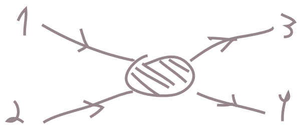
Se todas as partículas tiverem massas idênticas, então:

$$E_A = E_B = E_{cm}/2 \qquad |\vec{p}_A| = |\vec{p}_B| = |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = |\vec{p}\,|$$

$$E_A E_B |v_A - v_B| = |E_A p_B - p_A E_B| = E_{cm} |\vec{p}\,|$$

$$\boxed{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{cm}^2}} \quad \text{(eq. 185.1)}$$

Espalhamento com quatro estados de massa idêntica



$m_i = m$
$i = 1, \dots, 4$

Decaimento

Também podemos especializar as contas acimas para o caso de uma partícula inicial decaindo (o caso 1 → n), basta voltar na eq. 181.2 e remover todas as integrais em k_B e $\bar{k}_B$ (além do parâmetro de impacto):

$$d\Gamma = \left(\prod_f \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3\, 2E_f}\right)\int \frac{d^3k_A}{(2\pi)^3}\frac{\phi_A(\vec{k}_A)}{\sqrt{2E_A}}\int \frac{d^3\bar{k}_A}{(2\pi)^3}\frac{\phi_A^*(\vec{\bar{k}}_A)}{\sqrt{2\bar{E}_A}}\; {}_{OUT}\langle\{p_f\}|\{k_A\}\rangle_{IN}\; {}_{OUT}\langle\{p_f\}|\{\bar{k}_A\}\rangle_{IN}^*$$

o que significa que obteremos:

$$\int d\bar{k}_A^z\, \delta\left(\bar{k}_A^z - \sum p_f^z\right)\delta\left(\bar{E}_A - \sum E_f\right) = \delta\left(\bar{E}_A - \sum E_f\right)\Big|_{\bar{k}_A^z = \sum p_f^z}$$

(o que também implicará: $\bar{k}_A^z = k_A^z,\ \bar{E}_A = E_A$)

ao invés do fator $|v_A - v_B|$ obtido na pg 182. Esta é de fato a única mudança. Assumindo de novo que o estado inicial é um pacote estreito e indo para o referencial do centro de massa (que neste caso coincide com o referencial de repouso da partícula inicial, que é onde definimos Γ de qualquer forma):

$$\boxed{d\Gamma = \frac{1}{2m_A}\left(\prod_f \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3\, 2E_f}\right)|\mathcal{M}(m_A \to \{p_f\})|^2\, (2\pi)^4\delta\left(p_A - \sum p_f\right)} \quad \text{(eq. 185.2)}$$

Aonde cabe a ressalva de que, uma vez que não é possível pensar em uma partícula INSTÁVEL no passado infinito, o que estamos assumindo aqui é que o tempo da vida τ, é tal que:

$$\tau \gg T$$
$$\Downarrow$$
$$\Delta E \simeq \frac{1}{T} \gg \frac{1}{\tau}$$

tempo que mandamos para infinito

energia total envolvida (neste caso ~ massa)

lembrando que estas duas grandezas estão ligadas pelo princípio da incerteza

ou seja, quando a largura é pequena em relação a massa (estado estreito) ou de vida longa.

Diagramas de Feynman para a Matriz S

(Nastase 20; Peskin 4.6)

Agora queremos calcular a matriz S da mesma forma que fizemos para as funções de Green, passando para o quadro de interação e expandindo perturbativamente, de forma que obtenhamos diagramas de Feynman. Partindo de (179.1 e 179.2):

$$\boxed{\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \ldots | S | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle = \lim_{T\to\infty} \underbrace{\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \ldots |}_{\text{estados da teoria completa}} e^{-iH(2T)} | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle} \quad \text{(eq. 186.1)}$$

Queremos os estados da teoria livre, vimos que (eq. 52.1):

$$|\Omega\rangle = \lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)} \left(e^{-iE_0 T} \langle \Omega | 0 \rangle \right)^{-1} e^{-iHT} |0\rangle$$

$$= \lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)} \left(e^{-iE_0 T} \langle \Omega | 0 \rangle \right)^{-1} U_I(0,-T) |0\rangle$$

Faremos agora:

$$|\vec{k}_A \vec{k}_B \rangle \propto \lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)} e^{-iHT} \underbrace{|\vec{k}_A \vec{k}_B \rangle_0}_{\text{estado livre, mas não é o vácuo}}$$

(estamos deixando a constante de proporcionalidade em aberto, pois ela pode ser bem complicada)

O lado direito de 186.1 fica:

$$\lim_{T\to\infty} \underbrace{\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \ldots |}_{{}_0\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \ldots | e^{-iHT}} e^{-iH(2T)} \underbrace{| \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle}_{e^{-iHT} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0} \propto \lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)} {}_0\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \ldots | \underbrace{e^{-iH(2T)}}_{U_I(T,-T)} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 =$$

pacotes estreitos

$$= \lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)} {}_0\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \ldots | T \left\{ \exp\left[-i \int_{-T}^{T} dt\, H_I(t) \right] \right\} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0$$

$$\therefore \quad S_{fi} \propto \langle f | U_I(+\infty, -\infty) | i \rangle$$

No caso das funções de Green a constante de proporcionalidade se cancela usando a normalização (passagem entre as eqs. 54.1 e 54.2) e aqui acontece o mesmo. Provar isso envolve provar a fórmula LSZ e não faremos isso neste curso. O resultado obtido fazendo a normalização correta e usando a fórmula de LSZ é dado por:

curioso? Veja as notas de TQCII (2013), pgs 6 a 15

$$\boxed{\langle \vec{p}_1 \ldots \vec{p}_n | iT | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle = \left(\sqrt{Z}\right)^{n+2} \lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)} \left({}_0\langle p_1 \ldots p_n | T \left(\exp\left[-i \int_{-T}^{T} dt\, H_I(t) \right] \right) | p_A p_B \rangle_0 \right)_{\substack{\text{conectado} \\ \text{amputado}}}} \quad \text{(eq. 186.2)}$$