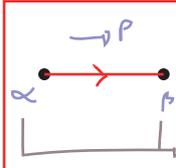
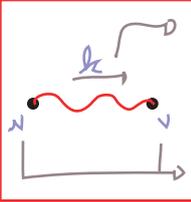


Regras de Feynman no espaço dos momentos (Euclideano):

propagador do férmion:  = $\left(\frac{1}{i\not{p} + m} \right)_{\alpha\beta} = \frac{(-i\not{p} + m)_{\alpha\beta}}{p^2 + m^2}$ (Euclid.) (eq. 193.1)

índices espinoriais ($\alpha, \beta=1\dots 4$)

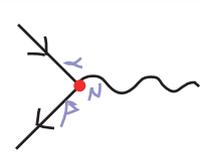
propagador do fóton:  = $\frac{1}{k^2} \left(\delta_{\mu\nu} - (1-\alpha) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right)$ (Euclid.) (eq. 193.2)

o sentido do momento não importa

índices de Lorentz

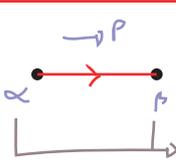
vértice: a interação é dada por parte da derivada covariante: $S_{\text{I}} = -i e \int d^4x \bar{\Psi}_\alpha (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} A_\mu \Psi_\beta$

então basta derivar nos campos para obter (segundo a eq 108.0):

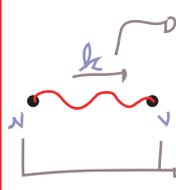
 = $i e (\gamma^\mu)_{\alpha\beta}$ (Euclid.) (eq. 193.3)

Regras de Feynman para a matriz S (Minkowski / Momentos):

As linhas externas on-shell, necessárias para o cálculo da matriz S, só podem ser obtidas no espaço físico, então re-escrevemos as regras fazendo a habitual rotação de volta:

 = $\frac{-(\not{p} + im)_{\alpha\beta}}{p^2 + m^2 - i\epsilon}$ (Mink.) (eq. 193.4)

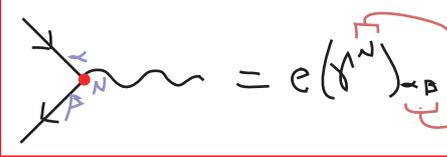
índices espinoriais ($\alpha, \beta=1\dots 4$)

 = $-\frac{i}{k^2 - i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} - (1-\alpha) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - i\epsilon} \right)$ (Mink.) (eq. 193.5)

o sentido do momento não importa

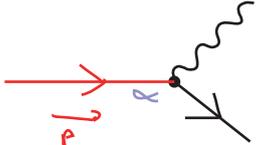
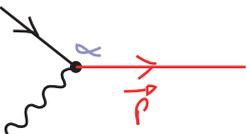
índices de Lorentz

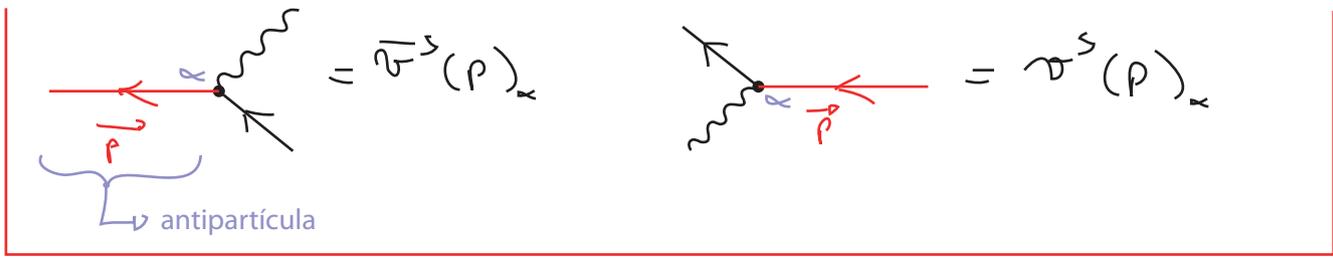
Para o vértice basta rodar S_1 antes de derivar nos campos:

 = $e (\gamma^\mu)_{\alpha\beta}$ (Mink.) (eq. 193.6)

note que os índices nos vértices tem que estar contraídos com os índices das linhas externas ou propagadores que entram neles

As linhas externas para os férmions foram obtidas nas pgs 131-132 (eq 132.1):

 = $u^s(p)_\alpha$  = $\bar{u}^s(p)_\alpha$ (Mink.)



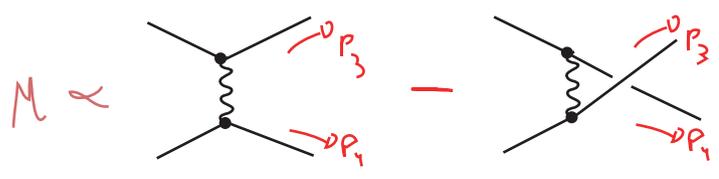
e que agora podemos formalizar notando que (veja eq. 116.1):

$$\begin{aligned} \psi(\vec{p}, s) &= u^s(p) e^{i p x} |0\rangle & \bar{\psi}(\vec{p}, s) &= \bar{v}^s(p) e^{i p x} |0\rangle \\ \langle \vec{p}, s | \bar{\psi} &= \bar{u}^s(p) e^{-i p x} \langle 0| & \langle \vec{p}, s | \psi &= v^s(p) e^{-i p x} \langle 0| \end{aligned}$$

É importante notar que:

$$\psi(\vec{p}, s_j; \vec{p}'_1, s'_1) = -\psi(\vec{p}, s_j; \vec{p}'_1, s'_1)$$

portanto diagramas que difiram apenas pela troca de dois férmions finais vão ter um sinal relativo negativo. Exemplo:

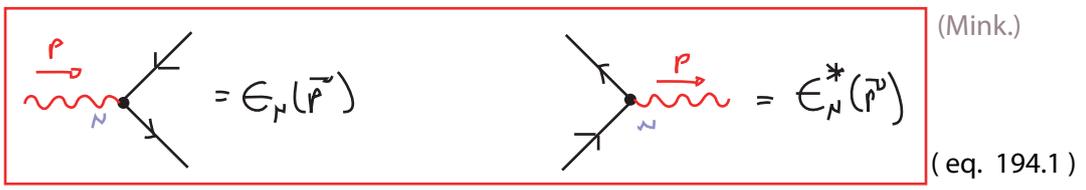


para saber o sinal global é preciso escrever o elemento de matriz explicitamente, raramente isso é necessário pois estamos interessados em $|M|^2$, mas há exceções (e.g.: cálculo de potenciais). Veja Peskin pgs 119 e 120.

Da mesma forma podemos obter a linha externa do fóton (usando a expansão da pag 149):

$$A_\mu(\vec{p}) = \epsilon_\mu(\vec{p}) e^{i p x} |0\rangle \quad \langle \vec{p} | A_\mu = \epsilon_\mu^*(\vec{p}) e^{-i p x} \langle 0|$$

↳ na pg 149 escolhemos ϵ real, que é útil para polariz. transversa. Para polarizações horárias ou anti-horárias seria mais conveniente tomar ϵ complexo



Todas estas regras devem ser aplicadas seguindo a mesma lógica das regras da eq. 65.1 e lembrando que loops fermiônicos trazem um sinal (-1). Nosso objetivo é obter \mathcal{M} para então substituí-lo na eq. 184.2 (ou uma de suas especializações). Em suma:

Regras de Feynman da QED - obtendo \mathcal{M}

- (1) desenhar todos os diagramas conectados e amputados que contribuem para o espalhamento
- (2) escreva as funções dos propagadores (somente as linhas internas), conforme eqs. 193.4 e 193.5

(3) para cada vértice:

$$= ie(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}$$

(4) para as linhas externas: eqs 132.1 e 194.1 (com atenção do sinal relativo entre diagramas iguais sob a troca de férmions idênticos)

(5) imponha conservação de momento em cada vértice (re-escrevendo os momentos internos)

(6) integre sobre cada momento não determinado: $\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}$

(7) divida pelo fator de simetria

(8) multiplique por (-1) para cada loop fermiônico

(9) rigorosamente deveríamos multiplicar por $(2\pi)^4 \delta^4(\sum p_\lambda)$ mas como estamos procurando

$$i\mathcal{M} (2\pi)^4 \delta^4(\sum p_\lambda) = \left(\sum \text{diagramas conectados e amputados} \right) \times (\sqrt{Z})^{n+2} \quad (\text{eq. 190.1})$$

basta dividir o resultado do passo (8) por i para obter \mathcal{M} (veremos o que fazer com Z em TQCII, mas a nível árvore $Z = 1$)

(195.1)

Conhecendo o elemento de matriz, podemos usá-lo no cálculo do elemento de matriz, lembrando que na integração sobre os momentos finais é possível haver uma dupla contagem no caso de partículas idênticas nos estados finais (que nada tem a ver com os fatores de simetria levados em conta nas regras de Feynman)

Processos não relativísticos

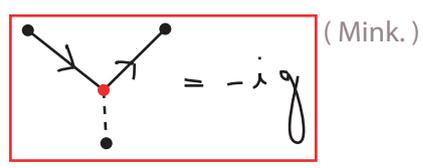
(Nastase 23; Peskin 4.7 e 4.8)

Usaremos agora o formalismo que desenvolvemos para obter alguns resultados para processos não relativísticos conhecidos. Assim poderemos ver como aplicá-lo ao mesmo tempo que provamos a sua concordância com resultados experimentais conhecidos.

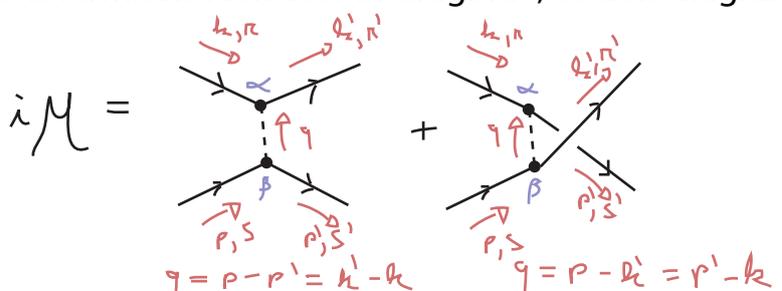
Potencial de Yukawa

Queremos ver se o potencial de Yukawa entre dois férmions é mesmo dado pela troca de um escalar, conforme a interação da pg 128 (teoria de Yukawa):

$$\mathcal{L}_Y^{(m)} = g \bar{\psi} \psi \phi$$



Para dois férmions idênticos interagindo, os dois diagramas em menor ordem de g que contribuem são:



Se não fossem idênticos poderíamos pegar só o primeiro, pois o momento estaria ligado a identidade do férmion, de fato é este caso que consideraremos. No limite não relativístico temos:

$$p \simeq (m, \vec{p}) \quad p' \simeq (m, \vec{p}') \quad k \simeq (m, \vec{k}) \quad k' \simeq (m, \vec{k}')$$

$$(p - p')^2 \simeq |\vec{p} - \vec{p}'|^2 \quad \text{e.g. } (p^0 - p'^0 \simeq m - m)$$

$$u^s(p) \simeq \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} \quad \xi^s = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

⇓

$$\bar{u}^{s'}(p') u^s(p) = u^{s'}(\gamma^0) u^s = m \begin{pmatrix} \xi^{s'+} & \xi^{s'+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} = 2m \underbrace{\xi^{s'+} \xi^s}_{\delta^{s's'}}$$

Isso nos permite escrever ambos os diagramas (lembre-se que só usaremos o primeiro):

$$i\mathcal{M} = (-ig) \bar{u}^{s'}(p')_\beta u^s(p)_\beta \frac{-i}{(p-p')^2 + m_\phi^2} (-ig) \bar{u}^{r'}(k')_\alpha u^r(k)_\alpha$$

$$- (-ig) \bar{u}^{s'}(p')_\alpha u^r(k)_\alpha \frac{-i}{(p-k')^2 + m_\phi^2} (-ig) \bar{u}^{r'}(k') u^s(p)$$

↑ sinal da troca de férmions no estado final

(eq. 196.1) coment

O que quer dizer que, para férmions distinguíveis no limite não relativístico:

$$i\mathcal{M} \simeq \frac{ig^2}{|\vec{p} - \vec{p}'|^2 + m_\phi^2} (2m \delta^{s's'}) (2m \delta^{r'r})$$

(eq. 196.2)

Podemos comparar este resultado com a aproximação de Born para espalhamentos em mecânica quântica:

$$\langle \vec{p}' | i\mathcal{T} | \vec{p} \rangle = -i V(\vec{q}) 2\pi \delta(E_{p'} - E_p) \quad \vec{q} = \vec{p}' - \vec{p} \quad \text{momento transferido}$$

(eq. 196.3)

que é válido para potenciais fracos (o que condiz com nossa aproximação perturbativa - estamos pegando só os diagramas em ordem mais baixa [LO]) e espalhamentos onde o estado final é parecido com o inicial (espalhamento com ângulo pequeno, energia trocada bem menor que a energia incidente). Nosso resultado é mais geral que isso (vale para qualquer ângulo), mas deve valer neste limite em particular.

A comparação é delicada, pois usamos normalizações diferentes do que usualmente se faz em mecânica quântica (para obter objetos relativisticamente invariantes). O fator de 2m acompanhando cada linha fermiônica vem desta diferença de normalização, então devemos ignorá-lo na comparação.

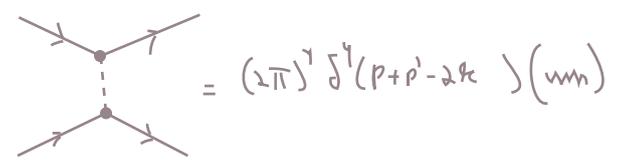
Outra sutileza vem do fato de que, na aproximação de Born, estamos assumindo que o momento do "centro espalhador" (o alvo), não muda, e temos só uma partícula inicial e uma final (1 → 1). Isso quer dizer que: $\vec{p}^0 \neq \vec{p}'$ ao passo que $E_{p'} = E_p \quad (|\vec{p}'| = |\vec{p}'|)$

$$\langle \vec{p}' | iT | \vec{p} \rangle = i\mathcal{M} (2\pi) \delta(E_{p'} - E_p) \quad (\text{eq. 197.1})$$

(outra forma de ver isso é notar que, como não estamos observando o momento inicial ou final do alvo, temos que integrar sobre ambos, com a condição $k' = k$ temos apenas uma integral:

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} + \vec{p}' - 2\vec{k})$$

que absorve a delta nos momentos, deixando apenas a delta na energia:



$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta(E_p - E_{p'}) (m)$$

Comparando 197.1 com 196.3 obtemos: $V(\vec{q}) = -\mathcal{M}$

e como (de novo, por conta da aproximação de Born), não há inversões de spin ($s' = s, r' = r$):

$$V(\vec{q}) = \frac{-g^2}{|\vec{q}|^2 + m_\phi^2} \quad (\text{eq. 197.2})$$

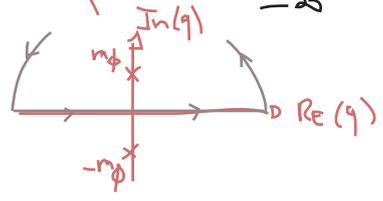
Para obter este potencial no espaço das posições fazemos:

$$V(\vec{x}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{-g^2}{|\vec{q}|^2 + m_\phi^2} e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} = \frac{-g^2}{(2\pi)^3} 2\pi \int_0^\infty q^2 dq \frac{e^{iq\pi} - e^{-iq\pi}}{iq\pi} \frac{1}{q^2 + m_\phi^2} =$$

$$= \frac{-g^2}{4\pi^2 i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \frac{q e^{iq\pi}}{q^2 + m_\phi^2}$$

$\pi \equiv |\vec{x}|$
 $q \equiv |\vec{q}|$

$$\int_0^\pi \sin(\theta) d\theta e^{iq\pi \cos \theta} = \int_0^1 d(\cos \theta) e^{iq\pi \cos \theta} = \frac{e^{iq\pi} - e^{-iq\pi}}{iq\pi}$$

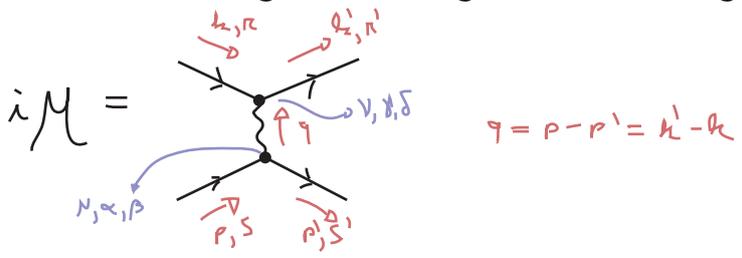


$$V(\vec{x}) = \frac{-g^2}{4\pi^2 i\pi} (2\pi) \left(\frac{i m_\phi e^{-m_\phi \pi}}{2im_\phi} \right) = \frac{-g^2}{4\pi^2 \pi} e^{-m_\phi \pi} \quad (\text{eq. 197.3})$$

que é o potencial atrativo de Yukawa.

Potencial de Coulomb

Seguimos a mesma lógica acima, agora temos o diagrama:



$$i\mathcal{M} = \bar{u}^s(p')_\alpha (e \gamma^N_{\alpha\beta}) u^s(p)_\beta \frac{-i g_{\mu\nu}}{(p-p')^2} \bar{u}^{\pi'}(k')_\mu (e \gamma^N_{\nu\sigma}) u^\pi(k)_\sigma$$

No limite não relativístico:

$$\bar{u}^s(p') \gamma^0 u^s(p) = m (\xi^{s'+} \xi^{s+}) (i \gamma^0) \gamma^0 \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} = -2im \delta^{ss'}$$

$$\bar{u}^s(p') \gamma^i u^s(p) = m (\xi^{s'+} \xi^{s+}) \begin{pmatrix} i \sigma^i & 0 \\ 0 & -i \sigma^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} = 0$$

e obtemos:

$$i\mathcal{M} = \frac{-i e^2 \overset{-1}{g_{00}}}{|\vec{p}-\vec{p}'|^2} (+2im \delta^{ss'}) (+2im \delta^{\pi\pi'}) = -\frac{i e^2}{|\vec{p}-\vec{p}'|^2} (2m \delta^{ss'}) (2m \delta^{\pi\pi'})$$

$$V(q) = + \frac{e^2}{|\vec{q}|^2}$$

(eq. 198.1)

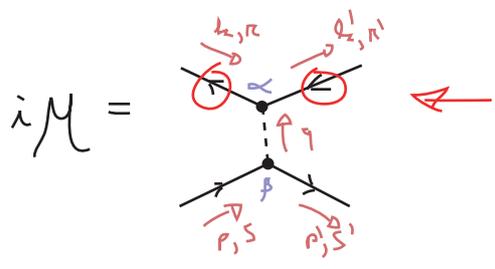
que é muito parecida com o potencial de Yukawa da eq. 197.2 (salvo o sinal e o fato de não termos massa). Portanto ao invés de fazer a transformada de Fourier de novo, basta inverter o sinal e fazer $m = 0$ em 197.3:

$$V(\lambda) = \frac{\pm e^2}{4\pi\lambda} \equiv \frac{\alpha}{\lambda}$$

(eq. 198.2) $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}$

Potencial Partícula-Antipartícula

O que acontece se substituirmos um dos férmions por sua antipartícula?



$$\bar{u}^{\pi'}(k') u^\pi(k) \rightarrow \bar{v}^{\pi'}(k') v^\pi(k) = m \begin{pmatrix} \xi^{+\pi} & -\xi^{+\pi} \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -\xi^{\pi'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^{\pi'} \\ -\xi^{\pi'} \end{pmatrix} = -2m \delta^{\pi\pi'}$$

no entanto usando: $|p, k\rangle = a_p^+ b_{-k}^+ |0\rangle$ $\langle p', k'| = \langle 0| b_k a_p$ *mudança de sinal*

$$\langle p', k' | \bar{\Psi} \Psi \bar{\Psi} \Psi | p, k \rangle = \langle 0 | b_k a_p (\bar{\Psi} \Psi)(z_1) (\bar{\Psi} \Psi)(z_2) a_p^+ b_{-k}^+ | 0 \rangle$$

Para "desentrelaçar" as contrações preciso fazer um número ímpar de permutações, o que produz mais um sinal (este é um exemplo em que aplicar diretamente as regras de Feynman, sem tomar cuidado com o sinal global de \mathcal{M} pode levar ao erro, pois estamos interessados justamente neste sinal)

A conclusão é que o potencial de Yukawa é atrativo mesmo neste caso.

No caso do potencial de Coulomb também temos este segundo fator (-1) advindo da ordem dos operadores fermiônicos, no entanto a troca de "u" por "v" resulta em:

$$\bar{u}^s(p') \not{\epsilon} u^s(p) = -2im \delta^{ss'} \Rightarrow \bar{v}^s(k) \not{\epsilon} v^{s'}(k) = m (\not{\epsilon}^+ - \not{\epsilon}^-) \begin{pmatrix} \delta^s \\ -\delta^s \end{pmatrix} = -2im \delta^{ss'}$$

ou seja, não há mudança aqui. Logo temos um sinal total de diferença, de forma que o potencial entre partícula e anti-partícula é atrativo.

Espalhamento Rutherford

Vamos calcular agora a seção de choque de espalhamento de um elétron por um campo elétrico gerado por um núcleo atômico (não estamos considerando o núcleo dinamicamente, assumimos que ele é infinitamente mais pesado que o elétron e seu único papel vai ser produzir o campo). A Hamiltoniana de interação é:

$$H_I = \int d^3x e \bar{\psi} i \not{\partial} \psi A_\mu$$

A primeira contribuição perturbativa para a parte não trivial da matriz S, de ordem e, é dada por (eq. 186.2):

$$\langle p' | iT | p \rangle = \langle p' | T \left\{ e^{-i \int H_I dt} \right\} | p \rangle = \dots + \underbrace{\langle p' | T \left\{ -i \int d^4x \bar{\psi} i \not{\partial} \psi A_\mu \right\} | p \rangle}_{\text{primeira ordem}} + \dots =$$

Note que não tenho fótons no estado inicial nem no final, e não estou contraindo A_μ com nada (se tratasse A como operador isto daria zero) - estamos tratando A como um campo clássico

$$\stackrel{\text{O(e)}}{=} e \bar{u}(p') \not{\epsilon} u(p) \int d^4x e^{i p' x} e^{-i p x} A_\mu(x) = \boxed{e \bar{u}(p') \not{\epsilon} u(p) A_\mu(p-p')} \quad (\text{eq. 199.1})$$

Se tomarmos a função $A_\mu(x)$ como independente do tempo, a sua transformada de Fourier vai ter uma delta de Dirac na energia:

$$A_\mu(p-p') = A_\mu(\vec{p}-\vec{p}') 2\pi \delta(\epsilon_p - \epsilon_{p'})$$

E, assim com na eq. 197.1, temos:

$$\langle p' | iT | p \rangle = i M(i\pi) \delta(\epsilon_p - \epsilon_{p'})$$

Vemos que o efeito do campo externo pode ser codificado em uma nova regra de Feynman:

