

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\nu = -\gamma^\nu \underbrace{\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma_\nu}_{-2\gamma^\rho} + 2g^{\mu\nu} \gamma^\rho \gamma_\nu = 2\gamma^\nu \gamma^\rho + 2\gamma^\rho \gamma^\nu = 4g^{\nu\rho} \quad (\text{eq. 206.1})$$

(segundo a mesma lógica)

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\nu = -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\mu \quad (\text{eq. 206.2})$$



Voltando ao cálculo da seção de choque, podemos simplificar bastante a equação 203.1

$$\text{(eq 203.1)} \rightarrow \frac{1}{4} \sum_{\text{SPINS}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4q^4} \text{Tr}[\underbrace{\gamma_\mu (-i\not{k}' - m_N) \gamma_\nu (-i\not{k} + m_N)}_{\text{do quatro termos aqui, apenas dois tem o traço não nulo:}}] \text{Tr}[\gamma^\mu (-i\not{p} + m_e) \gamma^\nu (-i\not{p} - m_e)] =$$

$$\sim \gamma_\mu \not{k}' \gamma_\nu \not{k} \quad \& \quad \sim m_N^2 \gamma_\mu \gamma_\nu$$

logo:

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\gamma_\mu (-i\not{k}' - m_N) \gamma_\nu (-i\not{k} + m_N)] &= -k'^\alpha \not{e}^\beta \text{Tr}[\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta] - m_N^2 \text{Tr}[\gamma_\mu \gamma_\nu] = \\ &= -4k'^\alpha k^\beta (g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + g_{\mu\beta} g_{\alpha\nu}) - 4m_N^2 g_{\mu\nu} = \\ &= 4(-k'_\mu k_\nu + k'_\nu k_\mu + g_{\mu\nu} k'_\alpha k^\alpha - k'_\mu k'_\nu - m_N^2 g_{\mu\nu}) \end{aligned}$$

da mesma forma:

$$\text{Tr}[\gamma^\mu (-i\not{p} + m_e) \gamma^\nu (-i\not{p} - m_e)] = 4(-p^\mu p^\nu - p^\nu p^\mu + p^\alpha p_\alpha g^{\mu\nu} - \underbrace{m_e^2 g^{\mu\nu}}_{\text{como os momentos são da ordem de } m_N \text{ e } m_e/m_N \sim \frac{1}{200} \text{ podemos desprezar este termo}})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{SPINS}} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{4e^4}{q^4} \left[+k'_\mu k_\nu + k'_\nu k_\mu + g_{\mu\nu} (m_N^2 - k'_\alpha k^\alpha) \right] \left[+p^\mu p^\nu + p^\nu p^\mu + \underline{p^\alpha p_\alpha} g^{\mu\nu} \right] = \\ &= \frac{4e^4}{q^4} \left[2k'_\mu p^\mu k^\nu p^\nu + 2k'_\mu p^\nu k^\nu p^\mu - 2k'_\alpha k^\alpha p^\mu p_\mu + (m_N^2 - k'_\alpha k^\alpha) \underbrace{(2p^\mu p^\mu - 4p^\mu p_\mu)}_{-2p^\mu p_\mu} \right] = \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{SPINS}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4}{q^4} \left(k'_\mu p^\mu k^\nu p^\nu + k'_\mu p^\nu k^\nu p^\mu - m_N^2 p^\mu p_\mu \right) \quad (\text{eq. 206.2})$$

Esta expressão pode ser calculada em qualquer referencial, tomemos o do centro de massa.

Seção de Choque no ref. do CM

Dado que: $2E_e > 2m_\mu \sim 400 m_e$ estamos falando de elétrons ultra-relativísticos e podemos desprezar sua massa, ou seja, no centro de massa:

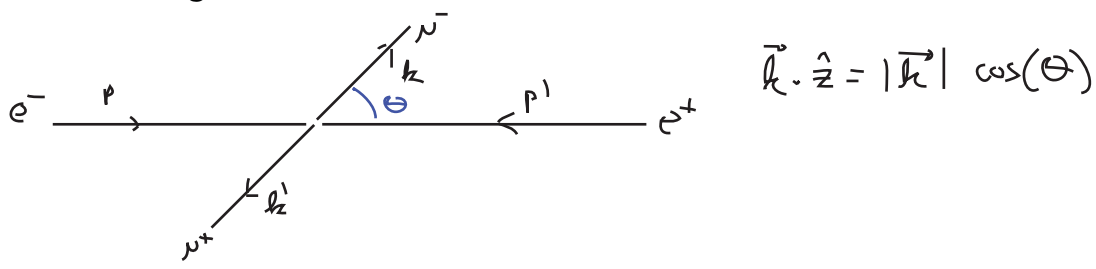
$$p = (E, E\hat{z}) \quad p' = (E, -E\hat{z})$$

Como a massa do muon e do anti-muon são iguais: $E_\mu = E_e = E$

(conserv. energia) $2E = E_{\mu^-} + E_{\mu^+}$ $m_{\mu^-} = m_{\mu^+}$
 (conserv. momento) $0 = \vec{k} + \vec{k}' \Rightarrow |\vec{k}| = |\vec{k}'| \Rightarrow E_{\mu^-} = E_{\mu^+}$ \downarrow
 $2E_\mu = 2E$

Então: $k = (E, \vec{k}) \quad k' = (E, -\vec{k})$
 $|\vec{k}| = \sqrt{E^2 - m_\mu^2}$

Definimos então o ângulo entre os elétrons e os muons:



$$q^2 = (p + p')^2 = \underbrace{p_\mu p^\mu}_0 + \underbrace{p'_\nu p'^\nu}_{\sim m_e \rightarrow 0} + 2 p_\mu p'^\mu = -4E^2 \quad (\text{eq. 207.1})$$

$$p_\mu p'^\mu = (-E^2 - E^2) = -2E^2 \quad (\text{eq. 207.2})$$

$$\begin{aligned} p \cdot k &= p' \cdot k' = -E^2 + \vec{k} \cdot (E\hat{z}) = -E^2 + E|\vec{k}|\cos\theta \\ p \cdot k' &= p' \cdot k = -E^2 - \vec{k} \cdot (E\hat{z}) = -E^2 - E|\vec{k}|\cos\theta \end{aligned} \quad (\text{eq. 207.3})$$

Voltando com estas identidades em 206.2, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{SPINS}} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{8e^4}{(4E)^4} \left[\underbrace{(-E^2 - E|\vec{k}|\cos\theta)^2}_{E^2(E+|\vec{k}|\cos\theta)^2} + \underbrace{(-E^2 + E|\vec{k}|\cos\theta)^2}_{E^2(E-|\vec{k}|\cos\theta)^2} - m_\mu^2 (-2E^2) \right] = \\ &= \frac{e^4}{4E^2} \left[\underbrace{(E+|\vec{k}|\cos\theta)^2 + (E-|\vec{k}|\cos\theta)^2}_{2E^2 + 2|\vec{k}|^2\cos^2\theta} + 2m_\mu^2 \right] = \\ &= e^4 \left[1 + \frac{m_\mu^2}{E^2} + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \cos^2\theta \right] \quad (\text{eq. 207.4}) \end{aligned}$$

Voltaremos com este resultado na seção de choque para dois corpos (eq. 184.4):

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} = \frac{1}{2\bar{E}_A 2\bar{E}_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \frac{|\bar{P}_1|}{4\pi^2 \bar{E}_{cm}} \underbrace{|\mathcal{M}(P_A, P_B \rightarrow P_1, P_2)|^2}_{\frac{1}{4} \sum_{\text{SPINS}} |\mathcal{M}|^2}$$

no nosso caso: $P_A = p$ $P_B = p'$ $P_1 = k$ $P_2 = k'$

$$2E_A = 2E_B = 2E = E_{cm}$$

$$\vec{v}_A = \frac{\vec{p}}{E} = \hat{z} \quad \vec{v}_B = \frac{\vec{p}'}{E} = -\hat{z} \quad \Rightarrow |\vec{v}_A - \vec{v}_B| = 2$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} = \frac{1}{2E_{cm}^2} \frac{|\vec{k}|}{4\pi^2 2E} e^4 \left[1 + \frac{m_N^2}{E^2} + \left(1 - \frac{m_N^2}{E^2}\right) \cos^2 \theta \right]$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} = \frac{\alpha^2}{4E_{cm}^2} \sqrt{1 - \frac{m_N^2}{E^2}} \left[1 + \frac{m_N^2}{E^2} + \left(1 - \frac{m_N^2}{E^2}\right) \cos^2 \theta \right] \quad (\text{eq. 208.1})$$

No limite ultra-relativístico $E \gg m_N$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm, \text{ULTRAREL}} = \frac{\alpha^2}{4E_{cm}^2} (1 + \cos^2 \theta) \quad (\text{eq. 208.2})$$

A seção de choque total é encontrada integrando-se sobre o ângulo sólido:

$$d\Omega = \sin(\theta) d\theta d\varphi = 2\pi \sin(\theta) d\theta = -2\pi d(\cos\theta) \quad \int_{-1}^1 d(\cos\theta) = 2$$

$0 < \theta < \pi \quad 1 < \cos\theta < -1$

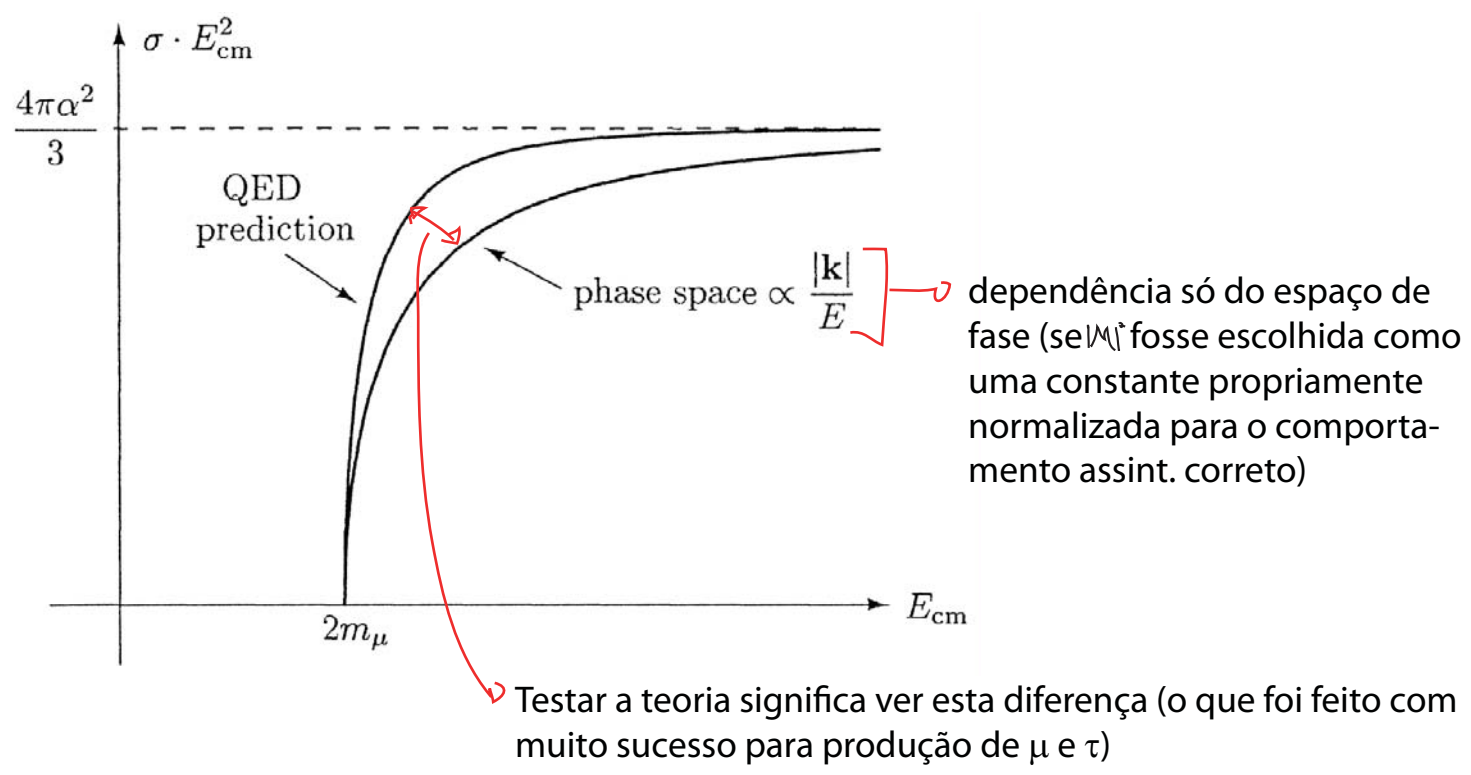
$$\int_{-1}^1 d(\cos\theta) \cos^2 \theta = \frac{2}{3}$$

$$\sigma_{TOT} = 2\pi \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \frac{\alpha^2}{4E_{cm}^2} \sqrt{1 - \frac{m_N^2}{E^2}} \left[1 + \frac{m_N^2}{E^2} + \left(1 - \frac{m_N^2}{E^2}\right) \cos^2 \theta \right] =$$

$$= \frac{\pi \alpha^2}{2E_{cm}^2} \sqrt{1 - \frac{m_N^2}{E^2}} \left[1 + \frac{m_N^2}{E^2} + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{m_N^2}{E^2}\right) \right] = \frac{4\pi \alpha^2}{3E_{cm}^2} \sqrt{1 - \frac{m_N^2}{E^2}} \left[1 + \frac{m_N^2}{2E^2} \right] \quad (\text{eq. 208.3})$$

$\frac{4}{3} + \frac{2}{3} \frac{m_N^2}{E^2}$

Que, no limite ultra-relativístico fica: $\sigma_{TOT} = \frac{4\pi \alpha^2}{3E_{cm}^2} \quad (\text{eq. 208.4})$



Seção de Choque polarizada e Crossing Symmetry

(Nastase 25; Peskin 5.2-5.3)

Para obter um entendimento um pouco melhor da dependência angular em 208.2 exploraremos novamente o espalhamento $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$, analisando agora as polarizações dos estados. Por simplicidade, tomaremos o limite ultra-relativístico onde: $m_e, m_\mu \rightarrow 0$

Lembrando das definições dos projetores de quiralidade feitas na pg 111-112 e que, para férmions sem massa, temos teorias separadas para ψ_L e ψ_R , notamos que estes são estados de **helicidade** bem definida:

$$\lambda \equiv \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \quad \begin{aligned} \text{R } \psi_R &= -\frac{1}{2} \psi_R \\ \text{L } \psi_L &= +\frac{1}{2} \psi_L \end{aligned}$$

Para estudar polarizações precisamos definir uma base, e nada mais natural que usar as projeções do spin na direção do movimento da partícula, usando portanto estes autoestados de helicidade.

Notemos que:

$$\overline{\psi_L} \equiv \overline{\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\psi\right)} = \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\psi\right)^\dagger \gamma_0 = \psi^\dagger \frac{1+\gamma_5}{2} \gamma_0 = \overline{\psi} \frac{1-\gamma_5}{2} \equiv (\overline{\psi})_R$$

$\psi_L = P_L \psi = \frac{1+\gamma_5}{2} \psi$

$P_L \gamma_\mu = \gamma_\mu P_R$
 $P_R \gamma_\mu = \gamma_\mu P_L$

$(\overline{\psi})_R (\psi)_L = 0$

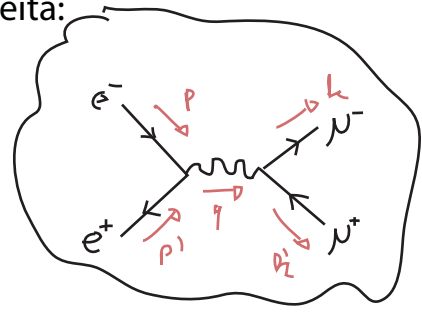
Considere os produtos de spinores aparecendo na equação 202.2 (que queremos calcular), por ex:

$$\overline{u}^{s'}(p') \gamma^\mu u^s(p)$$

queremos calcular este produto usando a base de helicidade: $s, s' \rightarrow u_R, (\overline{v})_L = \overline{v}_R$

Suponha que o elétron inicial estivesse com helicidade de mão direita:

$$u^s(p) = u_R(p) = P_R u(p) = P_R u^s(p)$$



Neste caso podemos introduzir P_R neste produto:

$$\overline{u}^{s'}(p') \gamma^\mu P_R u^s(p) = \overline{u}^{s'}(p') P_L \gamma^\mu P_R u^s(p)$$

(ver Peskin pg 61)

De onde vemos que a helicidade do pósitron também está determinada (mão esquerda), de fato, como: $P_R u_L = (\overline{v})_R P_L = 0$

Podemos escrever uma soma sobre spins e, se deixarmos o P_R ali, estaremos somando apenas termos nulos, com exceção do termo que queremos:

$$\overline{u}^{s'}(p') \gamma^\mu u^s(p) = \sum_{s, s'} \overline{u}^{s'}(p') \gamma^\mu P_R u^s(p)$$

Em $|M|^2$:

note que não é uma média, o spin inicial está fixo, somamos um monte de zeros para aparecer com a soma pois ela é conveniente

$$\sum_{s, s'} \overline{u}^{s'}(p') \gamma^\mu P_R u^s(p) \overline{v}^{s'}(p') \gamma^\nu P_R v^s(p) =$$

usando as somas de spin: $\sum_s u_i^s(p) \overline{u}_j^s(p) = (-i\not{p} + m)_{ij} = -i\not{p}_{ij}$
 $\sum_s v_i^s(p) \overline{v}_j^s(p) = (-i\not{p} - m)_{ij} = -i\not{p}_{ij}$

$$= -\text{Tr} [\not{p}' \gamma^\mu P_R \not{p} \gamma^\nu P_R] = -\text{Tr} [\not{p}' \gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu P_R] =$$

igual ao obtido no caso não polarizado (eq 203.1)

Calculando o traço obtemos:

$$= -2 (p'^\mu p^\nu + p'^\nu p^\mu - g^{\mu\nu} p \cdot p' - i \epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda} p'_\sigma p_\lambda) \quad (\text{eq. 210.1})$$

Podemos fazer o mesmo para o outro traço (para os muons finais):

$$\sum_{s, s'} | \overline{u}^s(k) \gamma_\mu P_R v^s(k') |^2 = -2 (k'_\mu k_\nu + k'_\nu k_\mu - g_{\mu\nu} k \cdot k' - i \epsilon_{\alpha\mu\beta\nu} k'^\beta k^\alpha) \quad (\text{eq. 210.2})$$

Logo:

$$|M|^2 = \frac{e^4}{4} \sum_{RR'} |..|^2 \sum_{SS'} |..|^2 = \frac{16e^4}{4} (p \cdot k')(p' \cdot k)$$

$\epsilon^{\rho\sigma\mu\nu} \epsilon_{\alpha\mu\rho\nu} = -2 (\delta_{\alpha}^{\rho} \delta_{\beta}^{\sigma} - \delta_{\beta}^{\rho} \delta_{\alpha}^{\sigma})$

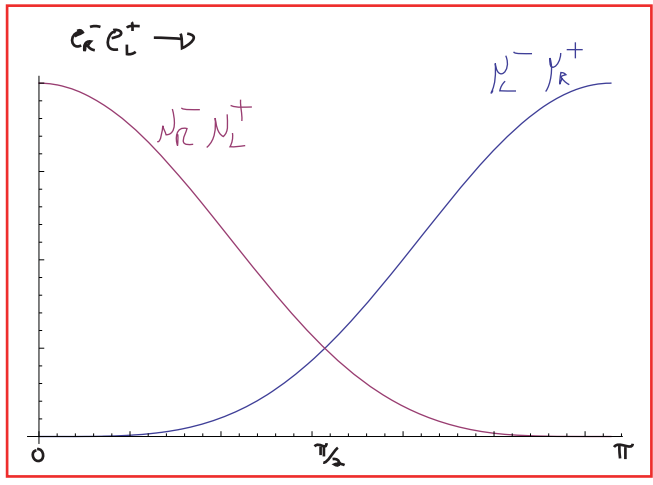
novamente (ver pg 207) especializamos para o centro de massa: $\begin{cases} q^2 = -4E^2 \\ p' \cdot k = p \cdot k = -E(E + k \cos \theta) \\ E = k \end{cases}$

$$|M(e_R^- e_L^+ \rightarrow \nu_R^- \nu_L^+)|^2 = e^4 (1 + \cos \theta)^2$$

$$\therefore \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} (e_R^- e_L^+ \rightarrow \nu_R^- \nu_L^+) \right)_{cm, n \rightarrow 0} = \frac{|M|^2}{64\pi^2 E_{cm}^2} = \frac{\alpha^2}{4 E_{cm}^2} (1 + \cos \theta)^2$$

Poderíamos fazer a mesma conta para outras polarizações, no caso $e_R^- e_L^+ \rightarrow \nu_L^- \nu_R^+$ o que muda é $p_R \rightarrow p_L$ em 210.2, o que resulta em um sinal na frente do ϵ e obtemos (exercício):

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} (e_R^- e_L^+ \rightarrow \nu_L^- \nu_R^+) \right)_{cm, n \rightarrow 0} = \frac{\alpha^2}{4 E_{cm}^2} (1 - \cos \theta)^2$$



Da mesma forma:

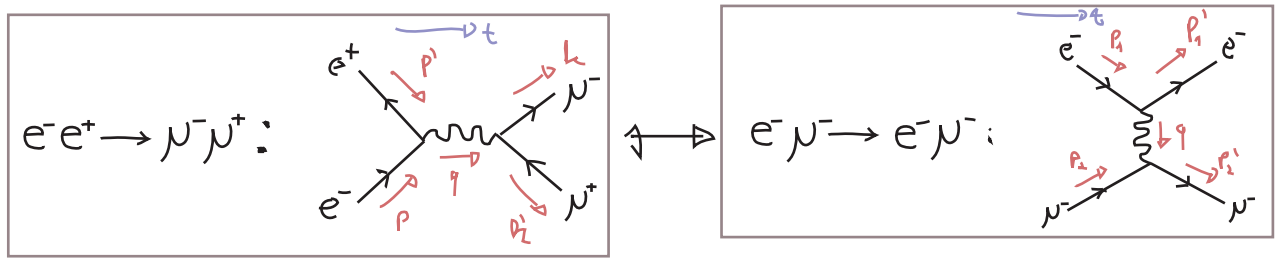
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} (e_L^- e_R^+ \rightarrow \nu_L^- \nu_R^+) \right)_{cm, n \rightarrow 0} = \frac{\alpha^2}{4 E_{cm}^2} (1 + \cos \theta)^2$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} (e_L^- e_R^+ \rightarrow \nu_R^- \nu_L^+) \right)_{cm, n \rightarrow 0} = \frac{\alpha^2}{4 E_{cm}^2} (1 - \cos \theta)^2$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} (e_L^- e_L^+ \rightarrow \nu_R^- \nu_R^+) = 0 \quad (\text{assim como todas as outras combinações que restam})$$

Crossing symmetry

Dada a natureza das regras de Feynman, é de se esperar que expressões de diagramas bem semelhantes (ainda que representando processos físicos bem diferentes) tenham expressões semelhantes. Considere, por exemplo, os dois diagramas abaixo:



O diagrama da direita, apesar de representar um fenômeno diferente (é um espalhamento elétron-muon, ao passo que o da esquerda é uma aniquilação elétron-pósitron produzindo muon-antimuon), é essencialmente o mesmo que o da esquerda, a menos dos nomes dados aos momentos (basta olhar o da esquerda com o tempo passando de baixo para cima). De fato, as regras de Feynman nos fornecem:

$$i\mathcal{M}(e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-) = \bar{u}(p_1') (e \gamma^\nu) u(p_1) \frac{-i \gamma^\mu}{q^2} \bar{u}(p_2') (e \gamma^\nu) u(p_2)$$

$$= -i \frac{e^2}{q^2} \bar{u}(p_1') \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p_2') \gamma_\nu u(p_2)$$

$$\therefore \frac{1}{4} \sum_{\text{SPIN}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4q^4} \text{Tr} [(-i \not{p}_1 + m_e) \gamma^\nu (-i \not{p}_1' + m_e) \gamma^\mu] \text{Tr} [(-i \not{p}_2' + m_\mu) \gamma_\nu (-i \not{p}_2 + m_\mu) \gamma_\mu]$$

(eq. 212.1)

$$q = p_2' - p_2 = p_1 - p_1'$$

Compare esta equação com a eq. 203.1:

(eq. 203.1) $\Rightarrow \frac{1}{4} \sum_{\text{SPIN}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4q^4} \text{Tr} [\gamma_\mu (-i \not{k}' - m_e) \gamma_\nu (-i \not{k} + m_e)] \text{Tr} [\gamma^\nu (-i \not{p} + m_e) \gamma^\mu (-i \not{p}' - m_e)]$

\downarrow
 $(+i \not{p}' - m_e) = (-i \not{p} + m_e) \sum u \bar{u}(p_2) \Theta(-i \not{p}' + m_e)$

se cancelam

o que mudou é apenas o nome dos momentos:

$$p \rightarrow p_1 \quad p' \rightarrow -p_1' \quad k \rightarrow p_2' \quad k' \rightarrow -p_2 \quad q = p' + p \rightarrow p_1 - p_1'$$

A seção de choque obtida para este diagrama é (ver Nastase, pgs 227 e 228), no limite ultra-relativístico:

$$\left. \begin{matrix} E \gg m_\mu \\ m_\mu, m_e \rightarrow 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} (e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-) \right)_{\text{cm}} = \frac{s^{-2}}{2 E_{\text{cm}}^2 (1 - \cos\theta)^2} [4 + (1 + \cos\theta)^2] \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} \sim \frac{1}{\theta^4}$$

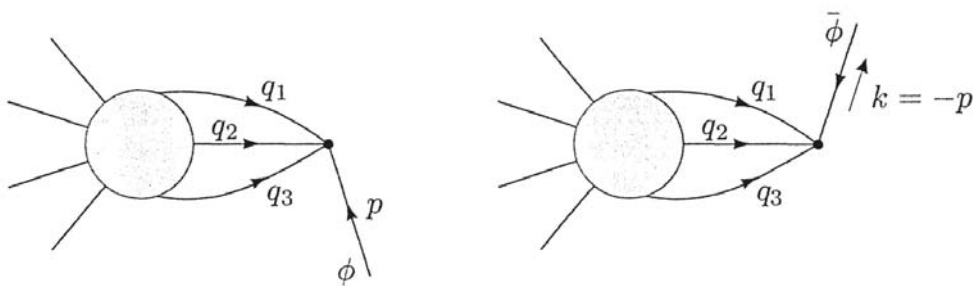
(eq. 212.2)

Note a divergência para ângulos pequenos, este tipo de divergência que aparece no espalhamento de partículas sem massa (neste limite tanto o fóton quanto os férmions são sem massa) é chamada de **divergência IR** (infra-red, pois para pequenos ângulos o momento q trocado é pequeno) e será tratada no curso de TQCII.

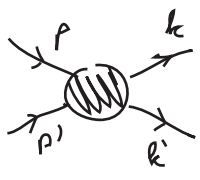
A simetria acima, entre diagramas que podem ser levados um no outro "cruzando" linhas do passado para o futuro é chamada de **Crossing Symmetry** e pode ser generalizada:

$$\mathcal{M}(\phi(p) + \dots \rightarrow \dots) = \mathcal{M}(\dots \rightarrow \bar{\phi}(k) + \dots) \quad k = -p$$

(eq. 212.3)



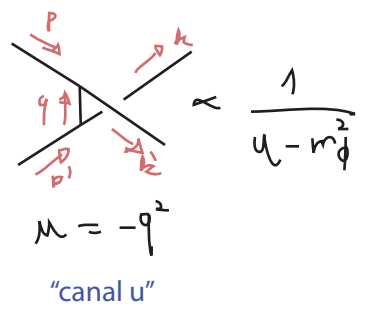
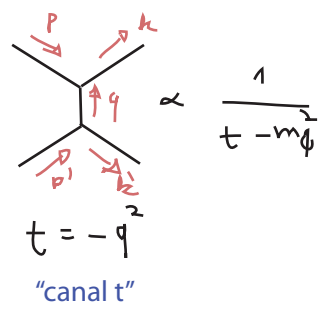
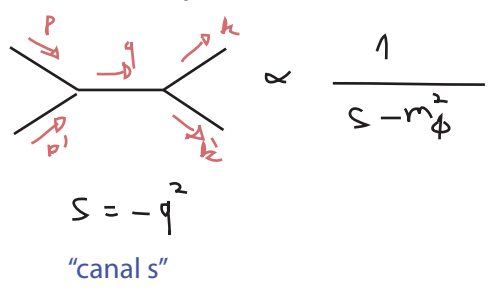
É mais fácil definir bem esta simetria em termos das Variáveis de Mandelstam, que definiremos agora. Dado um processo $2 \rightarrow 2$



$$\begin{aligned}
 s &\equiv -(p + p')^2 = -(k + k')^2 = E_{cm}^2 \\
 t &\equiv -(k - p)^2 = -(p' - k')^2 \\
 u &\equiv -(k' - p)^2 = -(p' - k)^2
 \end{aligned}$$

Variáveis de Mandelstam (eq. 213.1)

Note que:



$$s + t + u = -p^2 - p'^2 - k^2 - k'^2 = \sum_{i=1}^4 m_i^2 \quad (\text{eq. 213.2})$$

Os três canais terão distribuições angulares diferentes, para ver isso, considere o caso em que todas as massas são iguais:

$$\begin{aligned}
 s &= E_{cm}^2 \quad (\text{independe do ângulo}) \\
 t &\propto (1 - \cos \theta) \quad t \rightarrow 0 / \theta \rightarrow 0 \\
 u &\propto (1 + \cos \theta) \quad u \rightarrow 0 / \theta \rightarrow \pi
 \end{aligned}$$

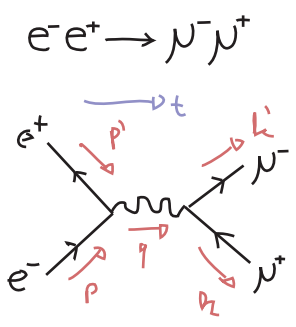
Em termos destas variáveis, podemos re-escrever 206.2 (para o processo $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$):

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}(e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+)|^2 = \frac{8e^4}{s^2} \left[\left(\frac{t}{2}\right)^2 + \left(\frac{u}{2}\right)^2 \right]^{0,0}$$

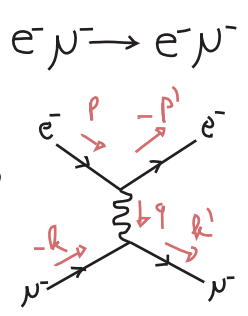
$$\begin{aligned}
 s &= -q^2 \\
 t &= -(k-p)^2 = 2p \cdot k = 2p' \cdot k' \\
 u &= -(p-k')^2 = 2p \cdot k' = 2p' \cdot k
 \end{aligned}$$

\downarrow
 $m_e \sim 0$
 $m_\mu \sim 0$

Agora façamos:



$$\begin{aligned} \bar{s} &= -(p+p')^2 \\ \bar{t} &= -(k-p)^2 \\ \bar{u} &= -(p-k')^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} s &= -(p-k)^2 = \bar{t} \\ t &= -(-p'-p)^2 = \bar{s} \\ u &= -(-p'+k)^2 = \bar{u} \end{aligned}$$

\Rightarrow

Logo podemos fazer o crossing direto nas variáveis de Mandelstam e obter:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}(e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+)|^2 \xrightarrow[\mu \rightarrow u]{\substack{s \rightarrow t \\ t \rightarrow s}} \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}(e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-)|^2 = \frac{8e^4}{t^2} \left[\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{u}{2}\right)^2 \right]$$