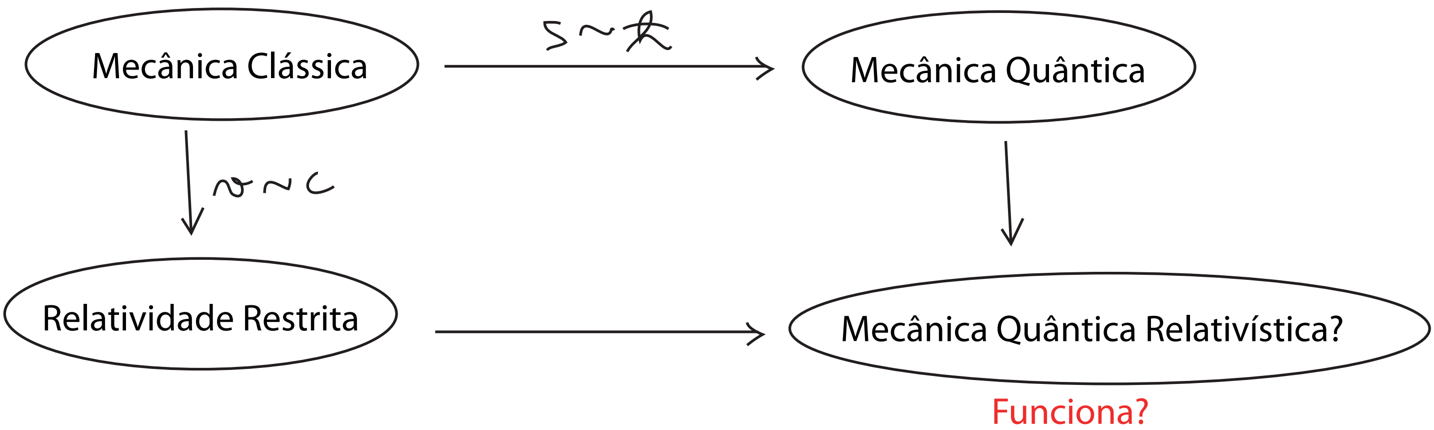
Teoria Quântica de Campos

(escopo do curso e um pouco de história)

(Weinberg cap 1, Peskin 2.1, Nastase 1)

Objetivo: uma teoria Quântica e Relativística (no sentido restrito)

Em se tratando de partículas(-onda):



Mecânica Clássica: "estado" definido por um conjunto de coordenadas canônicas $\{q_i, p_i\}$ e a evolução temporal deste estado é dado pela Hamiltoniana do sistema.

Quantizar é essencialmente transformar estas coordenadas em operadores, impondo:

$$[\hat{q}_i, \hat{q}_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0 \qquad [\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}$$

Convenção! unidades naturais: $\hbar = 1$, $c = 1$

e os estados passam a ser determinados por vetores no espaço de Hilbert, onde agem estes operadores. Representando estes vetores em termos de funções de onda $\psi(\vec{x},t)$ os operadores são:

(1 partícula) ($\hbar = 1$)

$$\begin{cases} \hat{\vec{p}} = -i\vec{\nabla} \\ \hat{\vec{x}} = \vec{x} \\ \hat{H} = i\dfrac{\partial}{\partial t} \end{cases}$$

(é importante notar que o tempo não é um operador, não é um observável, e sim um parâmetro. Logo há uma grande assimetria no tratamento do espaço e do tempo)

Podemos então obter a equação de Schrödinger para uma partícula livre:

Classicamente:

$$H = \frac{p^2}{2m}$$

Versão quantizada:

$$\hat{H}\psi = \frac{\hat{p}^2}{2m}\psi \Rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{1}{2m}\vec{\nabla}^2\psi(x,t) \qquad \text{(eq. 1.1)}$$

Primeira derivada no tempo, segundas derivadas no espaço, mau sinal

Lembrando que a interpretação probabilística no diz que:

$$\rho(\vec{x},t) = |\psi(\vec{x},t)|^2 \xrightarrow{\text{(eq. 1.1)}} \frac{\partial \rho(\vec{x},t)}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{x},t) = 0$$

(densidade de probabilidade)

$$\vec{j}(\vec{x},t) = -\frac{i}{2m}\left[\psi^* \vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right]$$

ρ é conservada e positivo definida!

Poderíamos fazer a mesma coisa com a Hamiltoniana relativística? (Klein, Gordon e Schrödinger tentaram:)

segundas derivadas para ambos

$$H^2 = p^2 + m^2 \longrightarrow -\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(x,t) = -\nabla^2\psi + m^2\psi$$

$C = 1$

$$\boxed{(\Box^2 + m^2)\psi = 0} \qquad \text{(eq. 2.1)}$$

Equação de Klein-Gordon

$$\Box^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

solução

$$\psi(x,t) = N e^{ipx - iEt}$$

A segunda derivada no tempo, deixa a equação de continuidade na forma:

$$-i\psi^*(2.1) + i\psi\,(2.1)^* = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big[\underbrace{i\left(\psi^*\frac{\partial}{\partial t}\psi - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)}_{\rho}\Big] + \vec{\nabla}\Big[\underbrace{-i\left(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right)}_{\vec{j}}\Big] = 0$$

(essencialmente a mesma de antes)

$$\rho = 2E|N|^2$$

No entanto:

$$\text{(eq. 2.1)} \longrightarrow E = \pm\sqrt{(\vec{p}^2 + m^2)} \longrightarrow$$

Energia e densidade de probabilidades negativas!

O Dirac encontrou outra solução, envolvendo apenas primeiras derivadas:

$$\hat{H}^2\psi = (\hat{p}^2 + m^2)\psi \xleftrightarrow{\text{buscamos}} \hat{H}\psi = (\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m)\psi$$

$$\hat{H}^2 = \alpha_i^2\hat{P}_i^2 + (\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i)\hat{P}_j\hat{P}_i + (\alpha_i\beta + \beta\alpha_i)\hat{P}_i m + \beta^2 m^2$$

$$\alpha_i^2 = \beta^2 = 1$$

$$i \neq j \Rightarrow \{\alpha_i, \alpha_j\} = \{\alpha_i, \beta\} = 0$$

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta\} \underset{\text{(matrizes)}}{\Longrightarrow} (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \gamma_\mu$$

$$\boxed{(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0} \qquad \text{(eq. 3.1)}$$

Equação de Dirac

$\psi = u(\vec{p})\, e^{-i p_\mu x^\mu}$ Spinores que descrevem uma partícula de spin 1/2
(neste "approach" isto é um fortuito acidente)

$p = |\psi|^2$ ✓ Probabilidades estão bem definidas

$$u = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ u^4 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} u^1, u^2 \to E > 0 \\ u^3, u^4 \to E < 0 \end{matrix}$$

Os estados de energia negativa ainda estão presentes, o que leva ao famoso mar de Dirac
(solução ruim para os férmions e inútil para Bósons)

Além disso a teoria assim obtida tem problemas de causalidade, o que pode ser visto se calcularmos:

$$U(t) = \langle \vec{x}\,| e^{-iHt} |\vec{x}_0\rangle \underset{H^2 = \hat{p}^2 + m^2}{=} \langle \vec{x}\,| e^{-it\sqrt{\vec{p}^2+m^2}} |\vec{x}_0\rangle \underset{|x\rangle \to |p\rangle}{=}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \underbrace{\int d^3\vec{p}}_{\int |\vec{p}|^2 d|\vec{p}| \int 2\pi \,\mathrm{sen}(\theta)\, d\theta} e^{-it\sqrt{\vec{p}^2+m^2}} \underbrace{e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{x}_0)}}_{e^{i|\vec{p}|\,|\vec{x}-\vec{x}_0|\cos(\theta)}} =$$

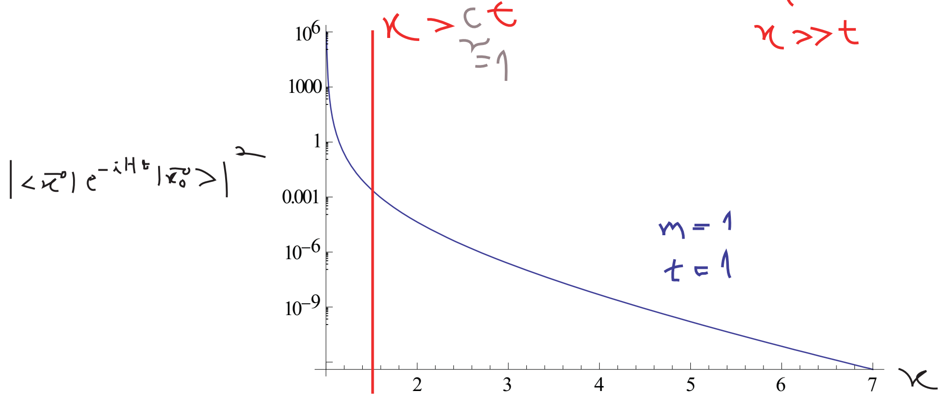
$|\vec{p}| \equiv p$

$\vec{x}_0 = 0$

$$= \frac{i}{2\pi^2 |\vec{x}-\vec{x}_0|} \underbrace{\int_0^\infty p\, dp\, \mathrm{Sen}(p|\vec{x}-\vec{x}_0|)\, e^{-it\sqrt{p^2+m^2}}}_{\text{(Gradshteyn 6}^{\text{th}}\text{ ed., eq 3.914(6))}} =$$

$\vec{x}_0 = 0$

$$= \frac{i}{2\pi^2 x} \overbrace{\frac{ixtm^2}{x^2-t^2} K_2\left(m\sqrt{x^2-t^2}\right)}^{} \underset{x \gg t}{=} -\frac{tm^2}{2\pi^2 x^2} K_2(mx) \neq 0 \;!!$$



Poderímos também aproximar esta integral usando a Saddle point aproximation:

$$x_0 : f'(x_0) = 0 \Longrightarrow f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(x_0) + \dots$$

$$\int dx\, e^{f(x)} = e^{f(x_0)} \int \underbrace{dx}_{dx = d(\delta x)}\, e^{\frac{(\overbrace{x-x_0}^{\delta x})^2}{2} f''(x_0)} \underset{f''(x_0)<0}{=} e^{f(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{f''(x_0)}}$$

A idéia é que para qualquer ponto $x_1 \neq x_0$

$e^{x_1} << e^{x_0}$ porque x_0 é um máximo

$$\langle \vec{x}^0 | e^{-iHt} | \vec{x}_0^0 \rangle = \frac{i}{2\pi^2 x} \int_0^\infty p\, dp\, \underbrace{\operatorname{Sen}(px)}\, e^{-it\sqrt{p^2+m^2}} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2 x} \int_0^\infty p\, dp \left(e^{-ipx} - e^{ipx} \right) e^{-it\sqrt{p^2+m^2}}$$

Rigorosamente eu teria que rodar isso para o eixo real (em x_μ) e depois voltar

$$I_\mp(x,t) = \int_0^\infty p\, dp\, \overbrace{e^{\mp ipx}\, e^{-it\sqrt{p^2+m^2}}} = \pm i \frac{d}{dx} \int_0^\infty dp\, e^{\overbrace{\mp ipx - it\sqrt{p^2+m^2}}^{f(p)}}$$

$$f'(p_0) = 0 \Rightarrow \mp ix - itp_0 (p_0^2+m^2)^{-1/2} = 0 \Longleftrightarrow p_0 = \mp \frac{imx}{\sqrt{x^2-t^2}}$$

$$f''(p_0) = -it(p_0^2+m^2)^{-1/2} + itp_0^2(p_0^2+m^2)^{-3/2} = -im^2t \left(-\frac{x^2-t^2}{m^2t^2} \right)^{3/2} = \underbrace{-\frac{1}{mt^2}\left(x^2-t^2\right)^{3/2}}_{<0 \ \text{p/}\ x^2 >> t^2}$$

$-i$

$$f(p_0) = \mp ix \left(\mp \frac{imx}{\sqrt{x^2-t^2}} \right) - it\sqrt{-\frac{m^2t^2}{x^2-t^2}} = -\frac{mx^2}{\sqrt{x^2-t^2}} + \frac{mt^2}{\sqrt{x^2-t^2}} = -m\sqrt{x^2-t^2}$$

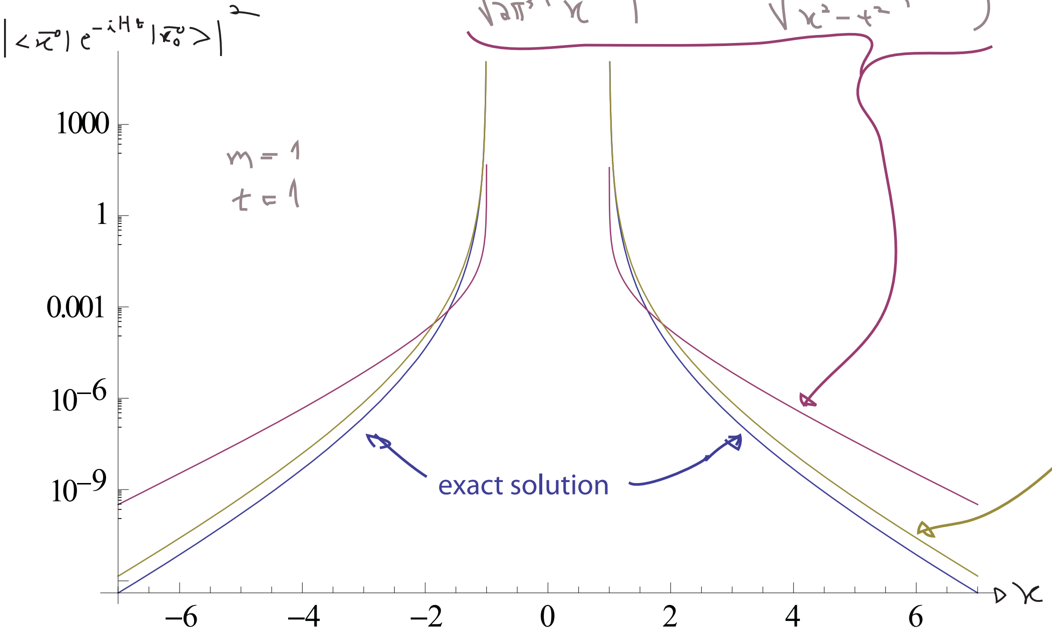
$$I_\mp = \pm i \frac{d}{dx} \left[e^{f(p_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{f''(p_0)}} \right]$$

$$\langle \vec{x}^0 | e^{-iHt} | \vec{x}_0^0 \rangle = -\frac{1}{4\pi^2 x} \left[I_-(x,t) - I_+(x,t) \right]$$

$$\langle \vec{x}^0 | e^{-iHt} | \vec{x}_0^0 \rangle = -\frac{1}{2\pi x}\, i\, \frac{d}{dx}\left[e^{f(p_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{f''(p_0)}} \right] = -\frac{\sqrt{m}\, t}{\sqrt{2\pi^3}\, x} \frac{d}{dx}\left[\frac{e^{-m\sqrt{x^2-t^2}}}{\underbrace{(x^2-t^2)^{3/2}}} \right]$$

Ignorando esta parte,
já que o comportamento é
dominado pela exponencial

$$\approx -\frac{\sqrt{m}\, t}{\sqrt{2\pi^3}\, x} \left(-m x \frac{e^{-m\sqrt{x^2-t^2}}}{\sqrt{x^2-t^2}} \right)$$



Estes problemas estão intrinsicamente ligados ao fato des estarmos partindo de uma descrição quântica de UMA partícula e então introduzindo a relatividade. Esta teoria, que tem um número bem definido de partículas (UMA) não dá conta da possibilidade de que o número de partículas pode mudar dinâmicamente, o que é um fato experimental uma vez que cheguemos em energias comparáveis com as massas destas partículas (o limite relativístico). Olhando o problema deste ponto de vista, os problemas eram mesmo de se esperar.

Uma forma encontrada para "concertar" estas teorias ficou conhecida como Segunda Quantização (muito cuidado com este nome):

$$(\Box^2 + m^2)\psi(x,t) = 0 \qquad\qquad (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x,t) = 0$$

Estas funções são re-interpretadas.
Não mais como funções de onda de 1 partíca livre,
mas como campos definidos em todo espaço e cuja
amplitude está ligada ao número de partículas.

Para determinar o estado deste sistema (clássico!) em um dado momento, preciso dizer o valor do campo em todos os pontos e seu momento canônicamente conjugado:

$$\left\{ \psi(\vec{x}),\ \pi(\vec{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \right\}$$

Quantizar este sistema (a tal segunda quantização) consiste em transformar estas novas coordenadas canônicas em operadores, impondo:

$$\left[\hat{\psi}(\vec{x}), \hat{\Pi}(\vec{x})\right]_{\pm} = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y})$$

De forma que agora temos que especificar um estado $|\sigma\rangle$ e o valor esperado do campo naquele estado é um observável: $\langle\sigma|\hat{\psi}(x)|\sigma\rangle$

Assim como antes, a evolução temporal deste sistema vai ser especificada pelo Hamiltoniano do campo, que pode ser obtido com um pouco de engenharia reversa a partir das equações de movimento.

Note que a posição "x" que aparece em $\psi(x,t)$ foi "rebaixada" para o mesmo status que o tempo tinha na MQ, é apenas um índice (contínuo) para o campo. Ela não é mais uma coordenada canônica do sistema e não há mais operador posição do campo. Faz tanto sentido querer medir a "posição do campo" quanto faria querer medir o "tempo do campo". Isto é bem mais promissor do ponto de vista de quem está querendo fazer uma teoria relativística.

Com esta re-interpretação passamos de fato a trabalhar com uma Teoria de Campos Relativística e Quantizada que, como veremos (ao longo do semestre), não tem problemas nem com energias e probabilidades negativas e não viola causalidade. Fomos forçados, no entanto, a abandonar a descrição da mecânica para uma descrição de campos.

Qual é problema com o nome Segunda Quantização? Note o caminho que fizemos:

$$\text{Mecânica Relativísica} \xrightarrow[{[\hat{q},\hat{p}]=i}]{} \text{Mec. Quântica Relativísica} \xrightarrow[{[\hat{\varphi},\hat{\Pi}]=i\delta}]{(1)} \text{Teoria de Campos (Quant. \& Relativ.)}$$

Mecânica Relativísica

Parâmetros: t

Estados: $\{q, p\}$

Observáveis: $q(t)$, $p(t)$

Dinâmica: $H = \sqrt{p^2 - m^2}$

Equações de Hamilton
$$\begin{cases} \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{p}{\sqrt{p^2-m^2}} \\ \dfrac{dp}{dt} = 0 \end{cases}$$

Mec. Quântica Relativísica

Operadores: $\hat{q}$, $\hat{p}$

Parâmetros: t

Estados: $\psi(q)$ ou $|q\rangle$ ou $|p\rangle$

Observáveis: $\langle\psi|\hat{q}(t)|\psi\rangle$

$\langle\psi|\hat{p}(t)|\psi\rangle$

(2) Dinâmica:
$$(\Box^2 + m^2)\psi(x,t) = 0$$
$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x,t) = 0$$

Teoria de Campos (Quant. & Relativ.)

Operadores: $\hat{\varphi}(x,t)$

Parâmetros: t, x

Estados: } Veremos
Observáveis: }

Dinâmica:
$$\begin{cases} \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}) \\ \mathcal{H}(\varphi, \dot{\varphi}) \end{cases}$$

(Veremos)

No passo (1) o que estamos fazendo é quantizar (transformar em operadores) uma função definida em todo espaço (um campo) e cuja equação de movimento CLÁSSICA é de Dirac ou Klein-Gordon. Uma vez obtidas estas equações e abandonada a interpretação de ψ como amplitude de probabilidade, os operadores de posição e momento perdem todo significado. O que estamos realmente fazendo é pegar uma teoria clássica (relativística) de campos e a quantizando UMA VEZ. O nome segunda quantização portanto se refere mais ao fato de que ela veio depois historicamente do que ao fato que estamos quantizando de novo o mesmo sistema (não estamos).

De fato, parece que a única função da "primeira" quantização foi nos fornecer as equações de Dirac e Klein-Gordon no passo (2) , existe alguma outra forma de obter estas equações?

A resposta é sim. Uma vez que aceitemos que o objeto básico da teoria deve ser um campo, podemos obter equações de movimento para estes campos baseado somente nas simetrias que o sistema deve ter. A primeira delas é a invariancia por mudança entre referenciais inerciais, e de fato as equações de Dirac e Klein-Gordon podem ser obtidas se buscarmos todos os campos que tem uma transformação bem definida sob estas transformações (campos que pertencem à representação do grupo definido por estas transformações, o grupo de Poincaré). Aí basta quantizar esta teoria. Esta visão, que decorre mais diretamente de primeiros princípios, tem ainda a vantagem de nos fornecer outras equações clássicas, como por exemplo àquela para partículas de spin 1. É este caminho que faremos ao longo deste curso.

A obtenção destas equações de movimento é o domínio da teoria clássica de campos, sob a qual faremos agora uma (rápida) revisão, notando que estamos interessados sempre em teorias relativísticas:

	Ñ-Relativístico	Relativistico
Clássico	Teoria de Campos (ñ-relativ)	Teoria Clássica de Campos
Quântico	Teoria Quântica de Campos (ñ-relativ)	Teoria Quântica de Campos

Revisão

Resto do curso

Teoria Clássica de Campos

(Ramond 1.1 - 1.7)

Em mecânica clássica:

$$\underbrace{S}_{\text{Ação}} = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \underbrace{L}_{\text{Lagrangeana}}\big(\underbrace{q_i(t), \dot{q}_i(t)}_{\text{Coordenadas}}\big) \qquad \text{(eq. 7.1)}$$

$$\delta S = 0 \implies \boxed{\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0} \qquad \text{(eq. 7.2)}$$

Equações de Lagrange
(equações do movimento)