

Também podemos mudar para o formalismo Hamiltoniano:

$$H(P, q) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i)$$

(eq. 8.1)

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

(transformada de Legendre)

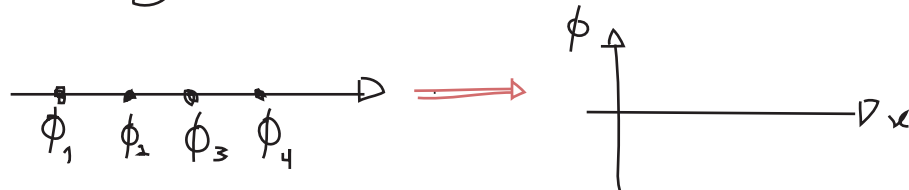
Neste caso as equações de movimento são as Equações de Hamilton:

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

(eq. 8.2)

A passagem para a teoria de campos pode ser feita imaginando um conjunto de infinitos q_i que agora não mais representam coordenadas de um partícula mas servem de índices para o campo (e no limite do contínuo trocamos $q_i \rightarrow \kappa$)

$$\{q_i(t)\} \Rightarrow \{\phi_i(t)\} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \phi(\vec{x}, t)$$



Estamos interessados em teorias locais, nas quais a Lagrangeana pode ser escrita como:

$$L(t) = \int d^3\vec{x} \mathcal{L}(\vec{x}, t)$$

Densidade Lagrangeana (mas que chamaremos de Lagrangeana)

o que equivale a dizer (no limite discretizado) que a dinâmica de um dos pontos não depende de pontos distantes deste. Também queremos teorias relativísticas, para tanto a densidade Lagrangeana será uma função invariante relativística, construída a partir de campos (e suas derivadas) com transformações bem determinadas:

$$\mathcal{L}(\vec{x}, t) = \mathcal{L}(\phi(\vec{x}, t), \partial_\nu \phi(\vec{x}, t))$$

E a ação (considerando que temos vários campos ϕ_a):

$$S = \int L dt = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\nu \phi_a)$$

(eq. 8.3)

As equações de movimento para os campos são completamente análogas:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi_a)} \right] = 0 \quad (\text{eq. 9.1})$$

Como já comentamos, construiremos estas Lagrangeanas com campos com transformações relativísticas bem determinadas:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

Coordenadas antes e depois da transformação

Transformação de Lorentz

$$\phi'_i(x') = R_i^{\ j} \phi_j(x)$$

a coordenada foi transformada, mas a própria forma funcional do campo pode ter mudado

note que, em geral, a transformação pode misturar campos com índices diferentes (ϕ_1 e ϕ_2) - neste caso é claramente mais natural pensar nestes "campos" como componentes de um campo mais complicado que se misturam sob transformações de Lorentz.

$$A_\mu = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

Por definição, para um campo escalar:

$$\begin{cases} R = \hat{1} \\ \phi'(x') = \phi(x) \end{cases}$$

A lagrangeana mais geral (invariante e renormalizável) contendo somente um campo escalar é:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{2} \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - V(\phi) = \\ &= \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} |\vec{\nabla} \phi|^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - V(\phi) \end{aligned}$$

Convenção! Estou seguindo a convenção das notas do Prof. Nastase:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A maioria dos livros usa o sinal oposto (diag{1,-1,-1,-1}) lembre-se disso quando for comparar resultados

O momento canonicamente conjugado ao campo é (não confundir com o momento de uma partícula):

$$P(x) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}(x)} = \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}(x)} \int d^3 y \mathcal{L}(\phi(y), \dot{\phi}(y)) \equiv \Pi(x) d^3 \vec{x}$$

$$\boxed{\Pi(x) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\phi}(x)}} \quad (\text{eq. 10.1})$$

Densidade de momento conjugado (mas que chamaremos de momento conjugado)

A Hamiltoniana:

$$H = \sum_{\vec{x}} P(x) \dot{\phi}(x) - L \rightarrow \int d^3 \vec{x} [\Pi(x) \dot{\phi}(x) - \mathcal{L}] \equiv \int d^3 \vec{x} \mathcal{H}(x)$$

$$\boxed{\mathcal{H}(x) = \Pi(x) \dot{\phi}(x) - \mathcal{L}} \quad \begin{array}{l} \text{Densidade Hamiltoniana} \\ \text{(advinhe como vamos chamar)} \end{array} \quad (\text{eq. 10.2})$$

Note a importância da suposição de localidade aqui também (quando trocamos p por π), essencialmente ela permite que trabalhem só com estas densidades em cada ponto, sem efeitos correlacionando pontos distantes.

Teorema de Noether

Outra importante consequência das simetrias impostas à Lagrangiana é a conservação de grandezas físicas. Segundo o Teorema de Noether:

“Para cada simetria contínua do sistema, há uma quantidade conservada ao longo do tempo”

Alguns exemplos:

Simetria \longleftrightarrow “Carga” Conservada (em geral só usamos a palavra carga para simetrias internas do sistema - como as que geram a carga elétrica ou a carga de cor da QCD - mas isso é puramente convencional)

Translação Temporal \longleftrightarrow Energia E
 $t \rightarrow t + \omega$

Translação Espacial \longleftrightarrow Momento \vec{p}
 $\vec{x} \rightarrow \vec{x} + \vec{a}$

Rotação \longleftrightarrow Momento Angular \vec{L}
 $x_i \rightarrow R_{ij} x_j$

Mudança de Fase U(1) \longleftrightarrow Carga Elétrica Q^{QED}
 $\phi(x_\mu) \rightarrow e^{i\theta} \phi(x_\mu)$

Uma forma conveniente de expressar essa conservação é em termos de **correntes conservadas** e **equações de continuidade** do tipo:

$$\partial_\nu j^\nu = 0$$

↳ corrente conservada

$$\partial_\alpha j^\alpha + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \int_Q \delta^3 \vec{x} j^0 = - \oint \delta \vec{S} \cdot \vec{j}$$

Podemos obter a corrente conservada a partir da Lagrangeana. Suponha uma transformação que deixe a ação invariante (uma simetria):

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \alpha \Delta \phi$$

↳ versão infinitesimal de uma transformação contínua

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \alpha \partial_\nu J^\nu = \mathcal{L} + \alpha \Delta \mathcal{L} \quad (\text{eq. 11.1})$$

$$S = \int d^4x \mathcal{L} \rightarrow S + \alpha \int d^4x \partial_\nu J^\nu$$

$$\alpha \int dS_\nu J^\nu = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{se considerarmos que } J \\ \text{é zero nas bordas de todo} \\ \text{o espaço tempo} \end{array} \right)$$

Considerando que $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ podemos escrever a variação de \mathcal{L} na forma:

$$\alpha \Delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} (\alpha \Delta \phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi)} \alpha \Delta (\partial_\nu \phi) =$$

$$= \alpha \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi)} \Delta \phi \right) + \alpha \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi)} \right) \right] \Delta \phi =$$

= 0 (Euler Lagrange)

Por outro lado (eq 11.1): $\alpha \Delta \mathcal{L} = \alpha \partial_\nu J^\nu$

$$\partial_\nu J^\nu = \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi)} \Delta \phi \right) \Rightarrow \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi)} \Delta \phi - J^\nu \right) = 0$$

↳ J^ν

Temos então a corrente conservada:

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Delta \phi - \mathcal{J}^\mu \quad (\text{eq. 12.1})$$

No caso de um campo com várias componentes, se a transformação for linear em ϕ , podemos escrever:

$$(\alpha \Delta \phi)^\mu \equiv \alpha^\nu (T^\mu)_\nu \phi^\delta$$

De forma que (se $\mathcal{J}^\mu = 0$):

$$j^{\mu, \alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (T^\mu)_\nu \phi^\delta \quad (\text{eq. 12.2})$$

Um exemplo: $x^\mu \rightarrow x^\mu + \alpha^\mu \quad \alpha^\mu \ll 1$

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x + \alpha) = \phi(x) + \alpha^\nu \partial_\nu \phi(x)$$

$$j^\mu_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \mathcal{J}^\mu_\nu \equiv T^\mu_\nu \quad (\text{Tensor energia momento})$$

$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \alpha^\nu \partial_\nu \mathcal{L} = \mathcal{L} + \alpha^\nu \delta^\mu_\nu \partial_\mu \mathcal{L} = \mathcal{L} + \alpha^\nu \partial_\mu (\delta^\mu_\nu \mathcal{L})$
 $\underbrace{\delta^\mu_\nu \mathcal{L}}_{\mathcal{J}^\mu_\nu}$

Representações do Grupo de Lorentz

O grupo de Lorentz é uma generalização das rotações para o espaço 4-dimensional de Minkowski, e é um $SO(1,3)$ (determinante 1, ortogonal e 1,3 indica uma coordenada tipo tempo e 3 tipo espaço)

A representação fundamental é dada por:

$$dx^\mu = \Lambda^\mu_\nu dx^\nu$$

Matrizes da representação

obtidas pela propriedade

$$\eta_{\mu\nu} = \text{Diag}\{-1, 1, 1, 1\} \Rightarrow \Lambda \eta \Lambda^T = \eta$$

O que é uma generalização da ortogonalidade: $\Lambda \Lambda^T = 1$

que poderia ser escrita: $\Lambda 1 \Lambda^T = 1$ ou generalizada para: $\Lambda g \Lambda^T = g$

com: $g = \text{Diag}\{\underbrace{-1, \dots, -1}_{p \text{ vezes}}, \underbrace{+1, \dots, +1}_{q \text{ vezes}}\} \Rightarrow SO(p, q)$

As matrizes da representação satisfazem às propriedades do grupo, em particular

$$\Lambda = \Lambda^1 \cdot \Lambda^2$$

$\in G \quad \in G \quad \in G$

Podemos encontrar uma representação agindo no espaço dos campos (neste caso um campo com componentes ϕ^a):

$$\phi'^a(x') = R(\Lambda)^a_{\ b} \phi^b(x)$$

$\downarrow \quad \chi'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu} x^{\nu}$

$$R(\Lambda_1) R(\Lambda_2) = R(\Lambda_1 \cdot \Lambda_2)$$

Pensando em uma transformação infinitesimal parametrizada por β^a , podemos representar os elementos do grupo como exponenciais:

$$R(\beta) = e^{\lambda \beta^a t_a^{(R)}}$$

↓ Geradores da Álgebra de Lie (muitas vezes nos referimos a eles como geradores do grupo de Lie)

↓ Álgebra de Lie $[t_a^{(R)}, t_b^{(R)}] = i f_{ab}^c t_c^{(R)}$

↓ Constantes de Estrutura

Podemos encontrar algumas representações que satisfazem as propriedades acima:

Representações Bosônicas: se transformam como tensores com um número arbitrário de índices covariantes ou contravariantes:

$$B^{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k}_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k}(\Lambda x) = (\Lambda_{\mu_1}^{\alpha_1} \Lambda_{\mu_2}^{\alpha_2} \dots \Lambda_{\mu_k}^{\alpha_k}) (\Lambda^{\nu_1}_{\beta_1} \Lambda^{\nu_2}_{\beta_2} \dots \Lambda^{\nu_k}_{\beta_k}) B^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}(x)$$

As duas mais óbvias (e úteis):

Escalares: $\phi'(x') = \phi(x)$

Vetores: $A'_{\mu}(x') = \Lambda_{\mu}^{\nu} A_{\nu}(x)$

$$\Lambda_{\mu}^{\nu} = \eta_{\mu\alpha} \Lambda^{\alpha}_{\beta} \eta^{\beta\nu}$$

Representações Fermiônicas: é possível mostrar que existem representações impossíveis de se obter através do simples produto de Λ 's. Em especial o objeto:

$$S^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (\text{eq. 14.1})$$


 Matrizes de Dirac

satisfaz a álgebra de Lie do grupo de Lorentz, e portanto temos uma representação do grupo de Lorentz em:

$$M_D = e^{-\frac{i}{2} \Theta_{\mu\nu} S^{\mu\nu}} \quad \left(\Theta_{\mu\nu} \text{ e } S^{\mu\nu} \text{ são antissimétricos} \right)$$

Vale: $M_D^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu M_D(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu$

Assim, se definirmos um campo tal que: $\psi'(x') = M_D(\Lambda) \psi(x)$

O objeto $\gamma^\mu \partial_\mu \psi$ será covariante $(\gamma^\mu \partial'_\mu \psi'(x') \rightarrow M_D(\Lambda) \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x))$

O que quer dizer que a equação de Dirac será também covariante e a Lagrangeana que leva a ela é invariante. Veremos isso com mais detalhes mais adiante. Os interessados podem estudar o material adicional: http://www.ift.unesp.br/users/matheus/files/courses/2014tqc1/V_Kaplunovsky_Dirac.pdf

Note que, assim como as transformações Lorentz são generalizações das rotações de vetores e escalares em 3D, a transformação dos Spinors é uma generalização da rotação de spins, e de fato o campo spinorial descreverá partículas de spin 1/2.

Quantização por Integrais de Trajetória:

O Oscilador Harmônico

(Ramond cap2, Nastase 2)

Além da imposição de relações de comutação, existe uma outra forma de quantizar um sistema clássico: usando integrais de trajetória. Para entender do que se trata voltemos a um sistema não relativístico que entendemos bem (talvez o único que entendemos bem): o oscilador harmônico.

$$(\hbar=1) \Rightarrow L = \frac{\dot{q}^2}{2} - \omega^2 \frac{q^2}{2} \quad \Rightarrow \quad H = p \dot{q} - \left(\frac{\dot{q}^2}{2} - \omega^2 \frac{q^2}{2} \right) =$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{q} \quad = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2)$$

$\hbar=1$

$$a \equiv \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\omega q + i p)$$

$$a^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\omega q - i p)$$

(eq. 14.2)