Representações Fermiônicas: é possível mostrar que existem representações impossíveis de se obter através do simples produto de Λ's. Em especial o objeto:

$$S^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{4}\left[\underbrace{\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}}_{\text{Matrizes de Dirac}}\right] \qquad \text{(eq. 14.1)}$$

satizfaz a álgebra de Lie do grupo de Lorentz, e portanto temos uma representação do grupo de Lorentz em:

$$M_D = e^{-\frac{i}{2}\Theta_{\mu\nu} S^{\mu\nu}} \qquad \left(\Theta_{\mu\nu} \text{ e } S^{\mu\nu} \text{ são antissimétricos} \right)$$

Vale: $$M_D^{-1}(\Lambda)\,\gamma^{\mu}\,M_D(\Lambda) = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\gamma^{\nu}$$

Assim, se definirmos um campo tal que: $\psi'(x') = M_D(\Lambda)\psi(x)$

O objeto $\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi$ será covariante $\left(\gamma^{\mu}\partial'_{\mu}\psi'(x') \rightarrow M_D(\Lambda)\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x)\right)$

O que quer dizer que a equação de Dirac será também covariante e a Lagrangeana que leva a ela é invariante. Veremos isso com mais detalhes mais adiante. Os interessados podem estudar o material adicional: http://www.ift.unesp.br/users/matheus/files/courses/2014tqc1/V_Kaplunovsky_Dirac.pdf

Note que, assim como as transformações Lorentz são generalizações das rotações de vetores e escalares em 3D, a transformação dos Spinores é uma generalização da rotação de spins, e de fato o campo spinorial descreverá partículas de spin 1/2.

Quantização por Integrais de Trajetória:

O Oscilador Harmônico

(Ramond cap2, Nastase 2)

Além da imposição de relações de comutação, existe uma outra forma de quantizar um sistema clássico: usando integrais de trajetória. Para entender do que se trata voltemos a um sistema não relativístico que entendemos bem (talvez o único que entendemos bem): o oscilador harmônico.

$$\boxed{m=1} \Rightarrow L = \frac{\dot{q}^2}{2} - \omega^2\frac{q^2}{2} \quad \Longrightarrow H = p\dot{q} - \left(\frac{\dot{q}^2}{2} - \omega^2\frac{q^2}{2}\right) =$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{q} \qquad\qquad = \frac{1}{2}\left(p^2 + \omega^2 q^2\right)$$

$\hbar = 1$

$$\boxed{a = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega q + ip) \qquad a^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega q - ip)} \qquad \text{(eq. 14.2)}$$

$$\therefore \boxed{\begin{aligned} p &= -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}\,(a - a^{+}) \\ q &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\,(a + a^{+}) \end{aligned}} \qquad \text{(eq. 15.1)}$$

$$H = \frac{1}{2}\left(-\frac{\omega}{2}(a - a^{+})^2 + \frac{\omega}{2}(a + a^{+})^2 \right) = \frac{\omega}{2}\left(a a^{+} + a^{+} a \right) \qquad \text{(eq. 15.2)}$$

poderíamos juntar isso pois ainda não quantizamos

Definimos os Brackets de Poison como:

$$f = f(p, q), \quad g = g(p, q) \rightarrow \boxed{\{f, g\}_{PB} \equiv \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \right)} \qquad \text{(eq. 15.3)}$$

$$\therefore \{p_i, q_j\}_{PB} = \sum_k \left(\underset{0}{\underset{\parallel}{\frac{\partial p_i}{\partial q_k}}}\, \underset{0}{\underset{\parallel}{\frac{\partial q_j}{\partial p_k}}} - \underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial p_k}}\, \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial q_k}} \right) = -\delta_{ij}$$

$$\delta_{ik} \cdot \delta_{kj} = \delta_{ij}$$

Podemos escrever as equações de Hamilton (eq 8.2) na forma:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \{q_i, H\}_{PB} = \sum_k \left(\underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_k}}_{\delta_{ik}} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \cancel{\frac{\partial q_i}{\partial p_k}}^{\,0} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \{p_i, H\}_{PB} = \sum_k \left(\cancel{\frac{\partial p_i}{\partial q_k}}^{\,0} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial p_k}}_{\delta_{ik}} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) \qquad \text{(eq. 15.4)}$$

Quantização Canônica do Oscilador Harmônico

O que chamamos de quantização canônica consiste em transformar *q* e *p* em operadores $\hat{q}$ e $\hat{p}$, substituindo os Brackets de Poison por comutadores:

$$q, p \rightarrow \hat{q}, \hat{p} \qquad \{\ ,\ \}_{PB} \rightarrow -\frac{i}{\hbar}[\ ,\ ]$$

$$\hbar = 1$$

$$\{p_i, q_j\}_{PB} = -\delta_{ij} \longrightarrow -i[\hat{p}_i, \hat{q}_j] = -\delta_{ij}$$

$$\boxed{[\hat{p}_i, \hat{q}_j] = -i\delta_{ij}}$$ (eq. 16.1)

$$[\hat{p}, \hat{q}] = -i$$

(eq. 15.1)

$$[\hat{p}, \hat{q}] = \left[-i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(\hat{a} - \hat{a}^{+}), \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^{+})\right] =$$

$$= -\frac{i}{2}\left\{[\hat{a}, \hat{a}^{+}] - [\hat{a}^{+}, a]\right\} = -i[\hat{a}, \hat{a}^{+}] = -i$$

$$\boxed{[\hat{a}, \hat{a}^{+}] = 1}$$ (eq. 16.2)

Podemos usar a mesma substituição nas equações de Hamilton (15.4) para obter a evolução destes operadores no quadro de Heisenberg:

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\}_{PB} \longrightarrow \frac{d\hat{q}_i}{dt} = -i[\hat{q}_i, \hat{H}]$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\}_{PB} \longrightarrow \frac{d\hat{p}_i}{dt} = -i[\hat{p}_i, \hat{H}]$$ (eq. 16.3)

E o hamiltoniano pode ser obtido de (15.2)

$$\hat{H} = \frac{\omega}{2}\left(\underbrace{\hat{a}\hat{a}^{+}}_{1+\hat{a}^{+}\hat{a}} + \hat{a}^{+}\hat{a}\right) = \underbrace{\hbar}_{\text{se tivéssemos acompanhado os h's corretamente}}\omega\left(\hat{a}^{+}a + \frac{1}{2}\right)$$ (eq. 16.4)

Os autoestados deste hamiltoniano são definidos em termos de um número de ocupação *n* e os operadores $a^{\dagger}$ e a são operadores de criação e aniquilação:

$$a^{+}|n\rangle = A_n\,|n+1\rangle \quad ; \quad a\,|n\rangle = A'_n\,|n-1\rangle$$ (eq. 16.5)

A_n, A'_n → normalizações

$$\boxed{a^{+}a|n\rangle \equiv \hat{N}\,|n\rangle = n|n\rangle}$$ (eq. 16.6)

Operador Número

No estado fundamental, ou vácuo, defindo por $a|\Omega\rangle = 0$ $\therefore N|\Omega\rangle = 0$

$|\Omega\rangle = |n=0\rangle$

a energia é:

$$\hat{H} = \omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right) \qquad \hat{H}|n=0\rangle = E_0|n=0\rangle$$

$$\boxed{E_0 = \frac{\omega}{2}}$$ Energia de ponto zero ou do vácuo

Podemos definir um hamiltoniano sem esta energia de ponto zero, definindo o ordenamento normal:

$$:a^\dagger a + a a^\dagger + aa + a^\dagger a^\dagger: = a^\dagger a + a^\dagger a + aa + a^\dagger a^\dagger$$

Coloca todos os $a^\dagger$'s a esquerda dos a's

$$:\hat{H}: = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} = \omega \hat{N}$$

Integral de Trajetória de Feynman

(Ryder 5.1)

Uma quantidade de frequentemente queremos saber é, dado que uma partícula estava em uma posição *q* em um tempo *t*, qual é a probabilidade de a encontrarmos na posição *q′* no tempo *t′*. Em uma linguagem mais "quântica" dada a função de onda:

$$\psi(q,t)$$

Gostaríamos de conhecer o propagador F, definido por:

$$\psi(q',t') = \int F(q't';qt)\,\psi(q,t)\,dq \qquad \text{(eq. 17.1)}$$

$|\psi(q',t')|^2$ é distribuição de probabilidades para q′ no tempo t′, independente do que aconteceu antes de t′

A equação 17.1 é uma simples expressão da causalidade, considerando que a partícula pode ter começado em qualquer lugar. Claramente F é a amplitude de probabilidade de transição entre a função em (q,t) e a em (q′,t′) e:

$$P(q't';qt) = |F(q't';qt)|^2$$ é a probabilidade de transição

Vejamos como podemos expressar F em termos de grandezas familiares:

$$\psi(q,t) = \langle q|\psi,t\rangle_S$$

Quadro de Schrödinger (estados evoluem no tempo, operadores não)

$$|\Psi,t\rangle_S = e^{-i\hat{H}t}\underbrace{|\Psi\rangle_H}_{\text{Quadro de Heisenberg}}$$

Quadro de Heisenberg
(operadores evoluem no tempo, estados não)

Definamos o vetor:

$$|q,t\rangle = e^{i\hat{H}t}|q\rangle \qquad \text{(Moving Frame)}$$

$$\hat{q}_S|q\rangle = q|q\rangle \qquad \hat{q}_H(t) = e^{i\hat{H}t}\,\hat{q}_S\,e^{-i\hat{H}t}$$

IGUAIS

$$\hat{q}_H(t)\,|q\,t\rangle = e^{i\hat{H}t}\,\hat{q}_S\,e^{-i\hat{H}t}\,e^{i\hat{H}t}|q\rangle = e^{i\hat{H}t}\,q\,|q\rangle = q|q\,t\rangle$$

$\therefore$ $|q,t\rangle$ autoestado de $\hat{q}_H(t)$ no tempo t

$$\therefore\ \Psi(q,t) = \langle q|\,e^{-i\hat{H}t}|\Psi\rangle_H = \langle q,t|\Psi\rangle_H$$

$$\hat{1} = \int |q\,t\rangle\langle q\,t|\,dq$$

Dado:
$$\underbrace{\langle q',t'|\Psi\rangle_H}_{\Psi(q',t')} = \int \langle q',t'|q,t\rangle\underbrace{\langle q,t|\Psi\rangle_H}_{\Psi(q,t)}\,dq$$

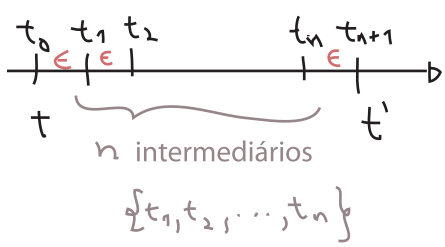
$$\Psi(q',t') = \int \langle q',t'|q,t\rangle\,\Psi(q,t)\,dq$$

Que, comparada com 17.1, nos dá: $F(q't',q\,t) = \langle q',t'|q,t\rangle = \langle q'|\,e^{-iH(t'-t)}|q\rangle$

Vejamos agora como expressar esta grandeza em termos da integral de trajetória:

Primeiramente, dividimos o tempo em *(n+1)* pequenos intervalos ε:

$$\epsilon \equiv \frac{t'-t}{n+1}$$



$$t_0 = t$$
$$t_1 = t + \epsilon$$
$$\vdots$$
$$t_{n+1} = t'$$

Notando que o tempo é só um índice e para qualquer tempo fixo temos a relação de completeza:

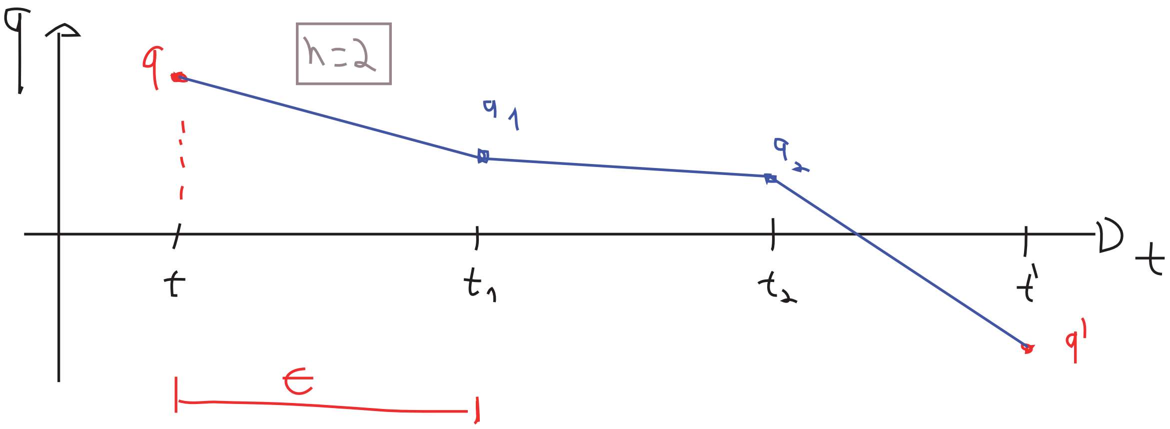
$$\forall t_i \Rightarrow \int dq_i\,|q_i,t_i\rangle\langle q_i,t_i| = 1 \qquad q_i \equiv q(t_i)$$

(estamos sempre pensando no limite do contínuo)

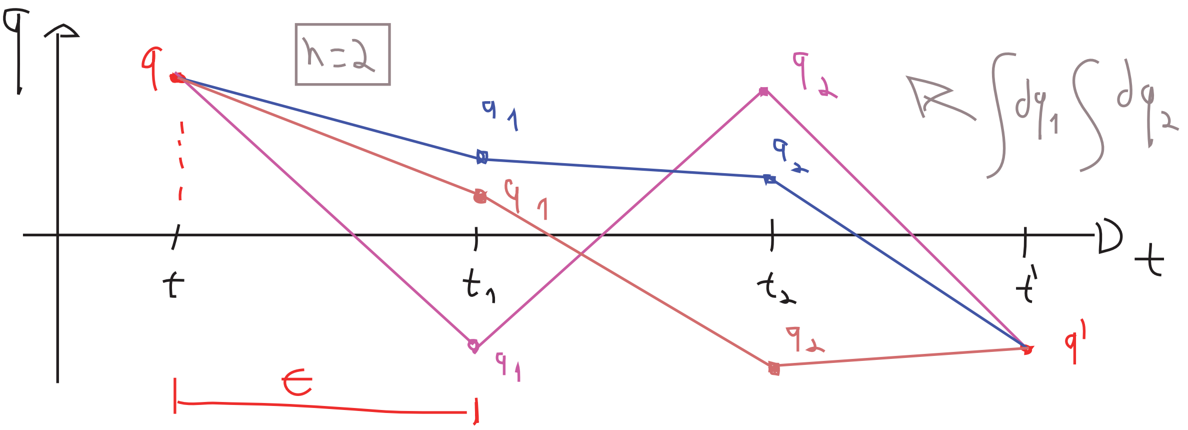
$$F(q't',q\,t) = \int \underbrace{dq_1\cdots dq_n}_{n\ \text{indentidades}}\,\langle q',t'|q_n,t_n\rangle\langle q_n,t_n|q_{n-1},t_{n-1}\rangle\cdots\langle q_2,t_2|q_1,t_1\rangle\langle q_1,t_1|q,t\rangle$$

(eq. 18.1)

Se esquecermos as integrais por um instante, percebemos que os elementos de matriz estão descrevendo um caminho:



Este caminho, no entanto, é bastante diferente do caminho clássico. Mesmo que façamos $\varepsilon \rightarrow 0$, a diferença $q_{i+1} - q_i$ não é forçada a zero e acabamos com um caminho arbitrariamente descontínuo. De fato a expressão 18.1 indica que estamos levando em conta uma infinidade destas trajetórias:



A esta operação daremos o nome de "integral sobre todas as trajetórias" ou "integral de trajetória", e definimos o símbolo:

$$\boxed{\mathcal{D}q(t) \equiv \prod_{i=1}^{n} dq(t_i)} \quad \text{(eq. 19.1)}$$

$$\boxed{\int \mathcal{D}q(t) \equiv \prod_{i=1}^{n} \int dq(t_i)} \quad \text{(eq. 19.2)}$$

Podemos também obter uma expressão no espaço dos momentos:

$$\langle q | p \rangle = e^{ipq}$$

$$|q\rangle = \int \frac{dp}{2\pi} |p\rangle\langle p | q\rangle$$

$$\int dq\, e^{iq(p-p')} = 2\pi\,\delta(p-p')$$

$$|p\rangle = \int dq\, |q\rangle\langle q | p\rangle = \int dq \int \frac{dp'}{2\pi} |p'\rangle \overbrace{\langle p' | q\rangle}^{e^{-ip'q}} \overbrace{\langle q | p\rangle}^{e^{ipq}} = \int \frac{dp'}{\cancel{2\pi}} |p'\rangle \cancel{2\pi}\,\delta(p-p') = |p\rangle$$

$$\langle q_i, t_i | q_{i-1}, t_{i-1} \rangle = \langle q(t_i) | e^{-i\epsilon \hat{H}} | q(t_{i-1}) \rangle = \int \frac{dp(t_i)}{2\pi} \langle q(t_i) | p(t_i) \rangle \langle p(t_i) | e^{-i\epsilon \hat{H}} | q(t_{i-1}) \rangle$$

É preciso ter cuidado com Hamiltonianas que tenham produtos entre os operadores $\hat{p}$ e $\hat{q}$, neste caso é preciso "Weyl-ordenar" o Hamiltoniano antes de prosseguir - isto significa usar as relações de comutação até que tenhamos todos os operadores $\hat{p}$ a esquerda dos operadores $\hat{q}$ (ver Peskin pg 281). Assumindo que isto já foi feito e lembrando que, para ε pequeno, não precisamos nos preocupar com termos quadráticos em $\hat{H}$, vale:

$$\langle p(t_i) | e^{-i\epsilon \hat{H}(\hat{p},\hat{q})} | q(t_{i-1}) \rangle = \langle p(t_i) | 1 - i\epsilon \hat{H}(\hat{p},\hat{q}) | q(t_{i-1}) \rangle =$$

$$= \langle p(t_i) | 1 - i\epsilon H(p(t_i), q(t_{i-1})) | q(t_{i-1}) \rangle = e^{-i\epsilon H[p(t_i), q(t_{i-1})]} \langle p(t_i) | q(t_{i-1}) \rangle =$$

$$= e^{-i\epsilon H[p(t_i), q(t_{i-1})]} \, e^{-i p(t_i) q(t_{i-1})}$$

$$\therefore \langle q_i, t_i | q_{i-1}, t_{i-1} \rangle = \int \frac{dp(t_i)}{2\pi} e^{i q(t_i) p(t_i)} e^{-i\epsilon H[p(t_i), q(t_{i-1})]} e^{-i p(t_i) q(t_{i-1})} =$$

$$= \int \frac{dp(t_i)}{2\pi} e^{i p(t_i)[q(t_i) - q(t_{i-1})]} e^{-i\epsilon H[p(t_i), q(t_{i-1})]}$$

$t_0 = t$

$t_{n+1} = t'$

$q_0 = q(t)$

$q_{n+1} = q(t')$

Com isso, a eq. 18.1 fica:

$$F(q' t', q t) = \int \left(\prod_i^n dq_i \right) \underbrace{\langle q_{n+1}, t_{n+1} | q_n, t_n \rangle}_{P_{n+1}} \cdots \underbrace{\langle q_1, t_1 | q_0, t_0 \rangle}_{P_1} =$$

$$= \int \left(\prod_i^n dq(t_i) \right) \left(\prod_j^{n+1} \frac{dp(t_j)}{2\pi} \right) e^{i\epsilon \left\{ p(t_{n+1}) \underbrace{[q(t_{n+1}) - q(t_n)]}_{\epsilon} + \cdots + p(t_1) \underbrace{[q(t_1) - q(t_0)]}_{\epsilon} \right\}} \times$$

$$\times e^{-i\epsilon \left\{ H[p(t_{n+1}), q(t_n)] + \cdots + H[p(t_1), q(t_0)] \right\}} =$$

$$\lim \begin{pmatrix} n \to \infty \\ \epsilon \to 0 \end{pmatrix}$$

$$= \int \mathcal{D}q(t) \, \mathcal{D}p(t) \, \mathrm{EXP}\left\{ i \int_{t_0}^{t_{n+1}} dt \left[p(t) \dot{q}(t) - H[p(t), q(t)] \right] \right\} \qquad \text{(eq. 20.1)}$$