

$$= \int \mathcal{D}q \frac{\int}{i\delta J(t_1)} \left\{ e^{i[S[q] + \int dt q(t) J(t)]} \frac{\int}{i\delta J(t_2)} \left[i(S[q] + \int dt q(t) J(t)) \right] \right\} =$$

$$= \int \mathcal{D}q \frac{\int}{i\delta J(t_1)} \left\{ e^{i[S[q] + \int dt q(t) J(t)]} \int dt q(t) \delta(t - t_2) \right\} =$$

$$= \int \mathcal{D}q q(t_2) \underbrace{\frac{\int}{i\delta J(t_1)} e^{i[S[q] + \int dt q(t) J(t)]}}_{q(t_1) e^{i[\dots]}} = \int \mathcal{D}q q(t_2) q(t_1) e^{iS[q, J]}$$

$$\therefore \frac{\int}{i\delta J(t_1) i\delta J(t_2)} \frac{\delta Z[J]}{\delta J} \Big|_{J=0} = \int \mathcal{D}q q(t_2) q(t_1) e^{iS[q]} \Big|_{J=0} = G_2(t_1, t_2) //$$

Com este conjunto de idéias e ferramentas podemos passar para a quantização dos campos.

Quantização Canônica do Campo Escalar

(Peskin 2.3, Nastase 3)

Queremos agora fazer a quantização dos campos mais "simples" a disposição, o campo escalar.

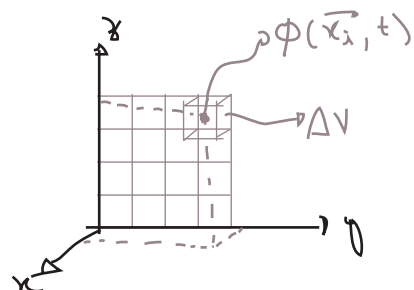
A lagrangeana mais geral, invariante de Lorentz, para um campo escalar real é:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - V(\phi, \partial^\mu \phi) \quad (\text{eq. 27.1})$$

Para generalizar a quantização para o caso dos campos precisamos primeiro obter os Brackets de Poisson da teoria. Uma vez que sabemos como fazer isto no caso de partículas (pontos), discretizaremos o espaço, definindo:

$$q_i(t) \equiv \sqrt{\Delta V} \phi_i(t) \equiv \sqrt{\Delta V} \phi(\vec{x}_i, t)$$

$$p_i(t) \equiv \sqrt{\Delta V} \pi_i(t) \equiv \sqrt{\Delta V} \pi(\vec{x}_i, t)$$



$$\frac{1}{\Delta V} \frac{\partial f_i(t)}{\partial \phi_j(t)} \xrightleftharpoons[\text{discretização}]{\text{contínuo}} \frac{\delta f(\phi(\vec{x}_j, t), \pi(\vec{x}_j, t))}{\delta \phi(\vec{x}_j, t)}$$

$$\Delta V \longleftrightarrow \delta^3 x$$

Com isso transformamos o espaço em um conjunto de coordenadas discretas, com o seguinte Bracket de Poisson:

$$\{p, q\}_{P.B.} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\delta q}{\delta p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\delta q}{\delta q_i} \right) = \sum_i \frac{1}{\Delta V} \left(\frac{\partial f}{\partial \phi_i} \frac{\delta q}{\delta \pi_i} - \frac{\partial f}{\partial \pi_i} \frac{\delta q}{\delta \phi_i} \right) =$$

$\frac{\partial}{\partial q_i} = \frac{1}{\Delta V} \frac{\partial}{\partial \phi_i}$ $\frac{\partial}{\partial p_i} = \frac{1}{\Delta V} \frac{\partial}{\partial \pi_i}$

CONT

$$\downarrow$$

$$= \int \delta^3 x \left[\frac{\delta f}{\delta \phi} \frac{\delta q}{\delta \pi} - \frac{\delta f}{\delta \pi} \frac{\delta q}{\delta \phi} \right]$$

$$\{ \phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t) \}_{P.B.} = \int \delta^3 y \left[\frac{\delta \phi(\vec{x}, t)}{\delta \phi(\vec{y}, t)} \frac{\delta \pi(\vec{x}', t)}{\delta \pi(\vec{y}, t)} - 0 \right] = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$$

$$\{ \phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{x}', t) \}_{P.B.} = \{ \pi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t) \}_{P.B.} = 0$$

relações de comutação para tempos iguais

A partir destas relações, fica fácil fazer a **quantização canônica** do campo escalar:

$$\{ , \}_{P.B.} \rightarrow -\frac{i}{\hbar} [,]$$

$$\left[\phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t) \right] = i \hbar \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$$

$$\left[\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{x}', t) \right] = \left[\pi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t) \right] = 0$$

(eq. 28.1)
relações de comutação para tempos iguais

Façamos algumas definições extras, usando um paralelo com o oscilador harmônico:

(nada nos impede de fazer estas definições, a questão é se elas serão úteis - o que depende de quão similar a um conjunto de osciladores é este campo. Veremos ao final.)

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{\delta^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{x} \cdot \vec{p}} \phi(\vec{p}, t) \quad \rightarrow \quad \phi(\vec{p}, t) = \int \delta^3 x e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \phi(\vec{x}, t)$$

$$\Pi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{x} \cdot \vec{p}} \Pi(\vec{p}, t) \rightarrow \Pi(\vec{p}, t) = \int d^3 x e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \Pi(\vec{x}, t)$$

$$a(\vec{k}, t) = \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \phi(\vec{k}, t) + \frac{i}{\sqrt{2\omega_k}} \Pi(\vec{k}, t)$$

$$a^\dagger(\vec{k}, t) = \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \phi^\dagger(\vec{k}, t) - \frac{i}{\sqrt{2\omega_k}} \Pi^\dagger(\vec{k}, t)$$

note que, para o campo real: $\phi^+ = \phi$
 $\Pi^+ = \Pi$

(eq. 29.1)

Determinaremos o valor de ω_k em seguida, por enquanto vamos apenas assumir que:

$$\omega_k = \omega(|\vec{k}|)$$

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} (a(\vec{p}, t) e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} + a^\dagger(\vec{p}, t) e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}})$$

$\int \frac{d^3 p}{\omega_p} a^\dagger(\vec{p}, t) e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} = \int \int \int \frac{(+d^3 p)}{\omega_p} a^\dagger(-\vec{p}, t) e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} =$
 $\int \int \int \frac{d^3 p}{\omega_p} a^\dagger(-\vec{p}, t) e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}}$

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} (a(\vec{p}, t) + a^\dagger(-\vec{p}, t))$$

$$\Pi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left(-i\sqrt{\frac{\omega_p}{2}}\right) (a(\vec{p}, t) - a^\dagger(-\vec{p}, t)) e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}}$$

(eq. 29.2)

Colocando estas expressões em 28.1, obtemos as relações de comutação para os a 's:

$$[a(\vec{p}, t), a^\dagger(\vec{p}', t)] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}')$$

$$[a(\vec{p}, t), a(\vec{p}', t)] = [a^\dagger(\vec{p}, t), a^\dagger(\vec{p}', t)] = 0$$

(eq. 29.3)

Checando: $[\phi(\vec{x}, t), \Pi(\vec{x}', t)] =$

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \left(\frac{i}{2} \sqrt{\frac{\omega_p}{\omega_{p'}}} \left([a(\vec{p}, t), a^\dagger(-\vec{p}', t)] + [a^\dagger(-\vec{p}, t), a(\vec{p}', t)] \right) \right) e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} e^{i\vec{p}' \cdot \vec{x}'}$$

$\delta(\vec{p} + \vec{p}')$
 $\delta(\vec{p} + \vec{p}')$
 $\delta(\vec{p} + \vec{p}')$

$$= i \int d^3 p \sqrt{\frac{\omega_p}{\omega_p}} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}'} = i \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$$

$\vec{p}' = -\vec{p}$
 $\omega_{p'} = \omega_p$

O que vai fixar o valor de ω_p é a dinâmica do campo, que ainda não fixei uma vez que o potencial não foi especificado na eq. 27.1. Começemos com o caso mais simples, o do **Campo Escalar Livre**:

$$V(\phi, \partial_\mu \phi) = 0 \Rightarrow \mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - \frac{m^2}{2} \phi^2$$

$$\text{eq 9.1} \Rightarrow \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} - \partial_\mu \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi)} \right] = 0 \Rightarrow -m^2 \phi - \partial_\mu [-\partial^\mu \phi] = 0$$

$$\boxed{(\partial_\mu \partial^\mu - m^2) \phi(x, t) = 0} \quad (\text{eq. 30.1})$$

Eq. de Klein-Gordon

$$\partial_\mu \partial^\mu = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 = -\square^2 \Rightarrow (\square^2 + m^2) \phi = 0 \quad (\text{eq. 2.1})$$

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 - m^2\right) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i \vec{x} \cdot \vec{p}} \phi(\vec{p}, t) = 0$$

$$\nabla^2 e^{i \vec{x} \cdot \vec{p}} = \nabla \cdot (i \vec{p}) e^{i \vec{x} \cdot \vec{p}} = -|\vec{p}|^2 e^{i \vec{x} \cdot \vec{p}}$$

$$\int d^3 p e^{i \vec{x} \cdot \vec{p}} \left(\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i \vec{x} \cdot \vec{p}} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + |\vec{p}|^2 + m^2 \right) \phi(\vec{p}, t) = 0 \right)$$

$$\hookrightarrow \boxed{\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \vec{p}^2 + m^2 \right) \phi(\vec{p}, t) = 0} \quad (\text{eq. 30.2})$$

Klein-Gordon no espaço dos momentos

Esta equação tem como solução:

$$\phi(\vec{p}, t) = F(\vec{p}^\nu) e^{\pm i \omega t} \quad (\text{LEMBRE QUE } \hbar = 1)$$

Oscilador harmônico de frequência ω

$$\left((\pm i \omega)^2 + \vec{p}^2 + m^2 \right) F(\vec{p}^\nu) = 0 \quad \boxed{\omega^2 = \omega_p^2 \equiv \vec{p}^2 + m^2}$$

O que nos mostra que isso realmente se comporta como um oscilador harmônico e as definições acima serão úteis. Para deixar isto mais rigoroso, vamos calcular o operador Hamiltoniano:

$$H = \int d^3 \vec{x} \left[\underbrace{\pi(x, t) \dot{\phi}(x, t)}_{\neq} - \mathcal{L} \right]$$

$$\hat{\pi}(x, t) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\phi}} = \frac{\delta}{\delta \dot{\phi}} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi} \dot{\phi} + \dots \right) = \dot{\phi}(\vec{x}, t)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{m^2}{2} \phi^2$$

usando as definições de 29.2:

$$H = \int d^3x \left(\frac{d^3p}{(2\pi)^3} \right) \left(\frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \right) \left\{ \frac{1}{2} \underbrace{(-i)^2}_{(\nabla \phi)^2} \underbrace{\sqrt{\frac{\omega_p \omega_{p'}}{4}}}_{m^2 \phi^2} [a(\vec{p}, t) - a^\dagger(-\vec{p}, t)] [a(\vec{p}', t) - a^\dagger(-\vec{p}', t)] e^{i(\vec{p} + \vec{p}') \cdot \vec{x}} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{4\omega_p \omega_{p'}}} [a(\vec{p}, t) + a^\dagger(-\vec{p}, t)] [a(\vec{p}', t) + a^\dagger(-\vec{p}', t)] (\nabla e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}}) \cdot (\nabla e^{i\vec{p}' \cdot \vec{x}}) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{m^2}{\sqrt{4\omega_p \omega_{p'}}} [a(\vec{p}, t) + a^\dagger(-\vec{p}, t)] [a(\vec{p}', t) + a^\dagger(-\vec{p}', t)] e^{i(\vec{p} + \vec{p}') \cdot \vec{x}} \right\} =$$

$$= \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} e^{i(\vec{p} + \vec{p}') \cdot \vec{x}} \left\{ \underbrace{-\frac{\sqrt{\omega_p \omega_{p'}}}{4} (a(\vec{p}, t) - a^\dagger(-\vec{p}, t))(a(\vec{p}', t) - a^\dagger(-\vec{p}', t))}_{\textcircled{I}} \right. \\ \left. + \frac{-\vec{p} \cdot \vec{p}' + m^2}{4\sqrt{\omega_p \omega_{p'}}} (a(\vec{p}, t) + a^\dagger(-\vec{p}, t))(a(\vec{p}', t) + a^\dagger(-\vec{p}', t)) \right\} =$$

$$\int d^3x e^{i(\vec{p} + \vec{p}') \cdot \vec{x}} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} + \vec{p}')$$

fazemos a integral $\int d^3p' \rightarrow \vec{p}' = -\vec{p}$

$$\frac{-\sqrt{\omega_p \omega_{p'}}}{4} \rightarrow -\frac{\omega_p}{4} \quad \frac{-\vec{p} \cdot \vec{p}' + m^2}{4\sqrt{\omega_p \omega_{p'}}} \rightarrow \frac{\omega_p^2}{4\omega_p} = \frac{\omega_p}{4}$$

suprimi t só para encurtar a notação

$$\textcircled{I} \rightarrow [a(\vec{p}, t) - a^\dagger(-\vec{p}, t)] [a(-\vec{p}, t) - a^\dagger(\vec{p}, t)] = a(\vec{p}) a(-\vec{p}) - a(\vec{p}) a^\dagger(\vec{p}) - a^\dagger(-\vec{p}) a(-\vec{p}) + a^\dagger(-\vec{p}) a^\dagger(\vec{p})$$

$$\textcircled{II} \rightarrow [a(\vec{p}, t) + a^\dagger(-\vec{p}, t)] [a(-\vec{p}, t) + a^\dagger(\vec{p}, t)] = a(\vec{p}) a(-\vec{p}) + a(\vec{p}) a^\dagger(\vec{p}) + a^\dagger(-\vec{p}) a(-\vec{p}) + a^\dagger(-\vec{p}) a^\dagger(\vec{p})$$

$$-\textcircled{I} + \textcircled{II} = 2 a(\vec{p}) a^\dagger(\vec{p}) + 2 a^\dagger(-\vec{p}) a(-\vec{p})$$

posso fazer $p \rightarrow -p$ na integral

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\omega_p}{2} (a^\dagger(\vec{p}, t) a(\vec{p}, t) + a(\vec{p}, t) a^\dagger(\vec{p}, t)) \quad (\text{eq. 31.1})$$

E aqui fica bem claro que estamos somando sobre um conjunto infinito (e contínuo) de osciladores harmônicos. Podemos obter as dependências temporais dos operadores a :

$$i \frac{d}{dt} a(\vec{p}, t) = [a, H]$$

$$[a, a' a'^{\dagger}] = a a' a'^{\dagger} - a' \underbrace{a'^{\dagger} a}_{=0} = a a' a'^{\dagger} - a' \left(-(2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}^0 - \vec{p}^{\prime 0}) + a a'^{\dagger} \right) =$$

$$a = a(\vec{p}^0)$$

$$a' = a(\vec{p}^{\prime 0})$$

$$= \cancel{a a' a'^{\dagger}} + a' (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}^0 - \vec{p}^{\prime 0}) - \underbrace{a' a a'^{\dagger}}_{=0}$$

$$[a, a'^{\dagger} a'] = \underbrace{a a'^{\dagger} a'}_{=0} - a'^{\dagger} a' a = \left((2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}^0 - \vec{p}^{\prime 0}) + a'^{\dagger} a \right) a' - a'^{\dagger} a' a =$$

$$= a' (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}^0 - \vec{p}^{\prime 0}) + \cancel{a'^{\dagger} a a'} - \cancel{a'^{\dagger} a' a}$$

$$i \frac{d}{dt} a(\vec{p}, t) = \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{\omega_{p'}}{\omega_p} a(\vec{p}', t) (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}^0 - \vec{p}^{\prime 0}) = \omega_p a(\vec{p}, t) \quad (\text{eq. 32.1})$$

Cuja solução é:

$$a(\vec{p}, t) = a_{\vec{p}} e^{-i\omega_p t}$$

$$a^{\dagger}(\vec{p}, t) = a_{\vec{p}}^{\dagger} e^{i\omega_p t} \quad (\text{eq. 32.2})$$

$$\therefore \phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \left(e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} a_{\vec{p}} e^{-i\omega_p t} + e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} a_{\vec{p}}^{\dagger} e^{i\omega_p t} \right)$$

$$E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} = \omega_p$$

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a_{\vec{p}} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} + a_{\vec{p}}^{\dagger} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \right) \Big|_{E_p = \omega_p} \quad (\text{eq. 32.3})$$

$$\Pi(\vec{x}, t) = \frac{d}{dt} \phi(\vec{x}, t) \quad (\text{eq. 32.4})$$

Discretização

Para ter uma imagem física mais clara do que sistema que estamos lidando aqui, vamos imaginar uma situação onde o campo esteja restrito a um volume finito V . O efeito disto é discretizar o momento, já que em uma direção z de comprimento L_z , somente existirão modos com:

$$k_{z,n} = \frac{2\pi n}{L_z}$$

$$\text{e aí fazemos: } \int d^3 k \rightarrow \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \quad \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \rightarrow V \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}$$

definimos também: $a_{\vec{k}} \rightarrow \sqrt{V(2\pi)^3} \alpha_{\vec{k}}$

de forma que: $[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \rightarrow V(2\pi)^3 [\alpha_{\vec{k}}, \alpha_{\vec{k}'}^\dagger] = (2\pi)^3 V \delta_{\vec{k}\vec{k}'}$

$$[\alpha_{\vec{k}}, \alpha_{\vec{k}'}^\dagger] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \quad (\text{eq. 33.1})$$

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\omega_{\vec{k}}}{2} \left[a^\dagger(\vec{k}, t) a(\vec{k}, t) + a(\vec{k}, t) a^\dagger(\vec{k}, t) \right]$$

$$\downarrow$$

$$H = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\omega_{\vec{k}}}{2} \left[\alpha_{\vec{k}}^\dagger \alpha_{\vec{k}} + \alpha_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}}^\dagger \right] = \sum_{\vec{k}} \frac{\omega_{\vec{k}}}{2} (\alpha_{\vec{k}}^\dagger \alpha_{\vec{k}} + \alpha_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}}^\dagger)$$

(eq. 33.2)

$$\equiv \sum_{\vec{k}} h_{\vec{k}}$$

$h_{\vec{k}} = \omega_{\vec{k}} \left(N_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \right)$ Hamiltoniano de um oscilador de frequência $\omega_{\vec{k}}$

$N_{\vec{k}} \equiv \alpha_{\vec{k}}^\dagger \alpha_{\vec{k}}$ Operador Número para o modo \vec{k}
(eq. 33.3)

Consideremos os autoestados deste operador: $N_{\vec{k}} |n_{\vec{k}}\rangle = n_{\vec{k}} |n_{\vec{k}}\rangle$

Vale toda a análise usual para osciladores harmônicos:

$\alpha_{\vec{k}}^\dagger$ operador "levantamento" $n_{\vec{k}} \in \mathbb{N}_+$ número de ocupação

$\alpha_{\vec{k}}$ operador "abaixamento"

$$\begin{aligned} \alpha_{\vec{k}} |n_{\vec{k}}\rangle &= \sqrt{n_{\vec{k}}} |n_{\vec{k}} - 1\rangle & |n_{\vec{k}}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n_{\vec{k}}!}} (\alpha_{\vec{k}}^\dagger)^{n_{\vec{k}}} |0\rangle \\ \alpha_{\vec{k}}^\dagger |n_{\vec{k}}\rangle &= \sqrt{n_{\vec{k}} + 1} |n_{\vec{k}} + 1\rangle & \langle n_{\vec{k}} | n_{\vec{k}} \rangle &= \delta_{nn} \\ h_{\vec{k}} |n_{\vec{k}}\rangle &= \omega_{\vec{k}} \left(n_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \right) |n_{\vec{k}}\rangle \\ \alpha_{\vec{k}} |0\rangle &= 0 & \langle 0 | N_{\vec{k}} |0\rangle &= 0 \end{aligned}$$

(eq. 33.3)

No contexto da teoria quântica de campos, usamos a terminologia:

$\alpha_{\vec{k}}^\dagger, \alpha_{\vec{k}}$ operadores de criação e aniquilação

$n_{\vec{k}}$ número de partículas

pois veremos que cada um destes modos de excitação do campo corresponde a uma partícula (de momento \vec{k})

Espaço de Fock

O espaço de Hilbert construído com os autoestados do operador número é conhecido como **Espaço de Fock**, a representação do espaço de Fock para um único oscilador é dada por:

$$\{ |n_{\vec{k}}\rangle \}$$

Como o Hamiltoniano total é dado pela soma dos Hamiltonianos de cada modo, o espaço de Hilbert é o produto direto dos espaços de cada modo:

$$|\{n_{\vec{k}}\}\rangle \in \bigotimes_{\vec{k}} \{ |n_{\vec{k}}\rangle \}$$

$$|\{n_{\vec{k}}\}\rangle = \prod_{\vec{k}} |n_{\vec{k}}\rangle = \prod_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{n_{\vec{k}}!}} (\alpha_{\vec{k}}^{\dagger})^{n_{\vec{k}}} |0\rangle$$

↳ mesmo vácuo para todos os modos

Ordenamento Normal

Assim como no caso do oscilador harmônico temos uma energia de modo zero para cada um dos modos permitidos:

$$\langle 0 | H_{\vec{k}} | 0 \rangle = \frac{\hbar \omega_{\vec{k}}}{2}$$

No caso do campo, **mesmo dentro de um volume finito**, a energia total dada pela soma de todos estes modos zero é infinita:

$$E = \sum_{\vec{k}} \frac{\hbar \omega_{\vec{k}}}{2} = \infty$$

O que não pode ser um observável. Portanto definiremos a energia acima desta como a energia observável física do sistema e o estado em que todos os modos estão no estado fundamental fica definido como $E = 0$. Uma forma de operacionalizar esta redefinição da energia é usando **Ordenamento Normal** definido na pg 17:

$$:H: = \sum_{\vec{k}} \frac{\omega_{\vec{k}}}{2} \left(\alpha_{\vec{k}}^{\dagger} \alpha_{\vec{k}} + \underbrace{\alpha_{\vec{k}}^{\dagger} \alpha_{\vec{k}}}_{\alpha_{\vec{k}}^{\dagger} = \alpha_{\vec{k}}^{\dagger} - 1} \right) = H - \sum_{\vec{k}} \frac{\omega_{\vec{k}}}{2} = \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} N_{\vec{k}}$$

(compare com 33.2)

↳ infinito subtraído

$$\langle 0 | :H: | 0 \rangle = 0$$

Nós vamos generalizar este procedimento, dizendo que somente operadores normalmente ordenados são observáveis:

$$\langle \Omega | : \hat{O} : | \Omega \rangle$$

Notamos, finalmente, que:

$$\phi \sim \left(a_{\vec{p}} e^{i p x} + a_{\vec{p}}^{\dagger} e^{-i p x} \right) \quad \left| \begin{array}{l} p^0 = E_{\vec{p}} \\ E_{\vec{p}} = + \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} > 0 \end{array} \right.$$

No entanto o segundo termo tem o "sinal errado" em frente a energia: $a_{\vec{p}} e^{+i E_{\vec{p}} t}$ por isso é comum a seguinte denominação:

$$\begin{aligned} a_{\vec{p}} e^{i p x} &\sim a_{\vec{p}} e^{-i E_{\vec{p}} t} && \leftrightarrow \text{solução de frequência (ou energia) positiva} \\ a_{\vec{p}}^{\dagger} e^{-i p x} &\sim a_{\vec{p}}^{\dagger} e^{i E_{\vec{p}} t} && \leftrightarrow \text{solução de frequência (ou energia) negativa} \end{aligned}$$

Note, no entanto, que o operador hamiltoniano: $H = \sum_{\vec{p}} \omega_{\vec{p}} N_{\vec{p}} \rightarrow \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{k}} \underbrace{a^{\dagger}(\vec{k}) a(\vec{k})}_{N_{\vec{k}}^{\text{CONT.}}}$

só tem autovalores maiores ou iguais a zero. Portanto não há mais o problema de energia negativa (não há nenhum estado com energia menor que zero).

Interpretação de Partícula

Lembrando que a quantidade conservada quando fazemos translações espaço-temporais é o tensor energia momento: $T^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\nu} \phi)} \partial_{\nu} \phi - \mathcal{L} \delta^{\mu}_{\nu}$

E que podemos pensar nas componentes conservadas só por translações espaciais ou temporais:

$$t: H = \int T^{00} d^3 x = \int (\pi(x) \dot{\phi}(x) - \mathcal{L}) d^3 x = \int \mathcal{H} d^3 x$$

$$x^i: P^i = \int T^{0i} d^3 x = \int \pi \partial^i \phi d^3 x \quad \vec{P} = \int \pi \vec{\nabla} \phi d^3 x$$

$$\boxed{\vec{P} = \int \pi \vec{\nabla} \phi d^3 x = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \vec{p} a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{p}}} \quad (\text{eq. 35.1})$$

Isto nos mostra que o operador $a_{\vec{p}}^{\dagger}$ age no vácuo para criar um estado com momento \vec{p} e energia $E = + \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ por isso interpretaremos estes estados como partículas de massa m

Note que definimos o **momento total do estado** em termos da **carga conservada pela invariância sob translações**, e não como o momento canonicamente conjugado.