Notamos, finalmente, que:

$$\phi \sim \left(a_{\vec p}\, e^{ipx} + a^{\dagger}_{\vec p}\, e^{-ipx}\right)\Big|_{p^0 = E_p}$$

$$E_p = +\sqrt{\vec p^{\,2} + m^2} > 0$$

No entanto o segundo termo tem o "sinal errado" em frente a energia: $a_{\vec p}\, e^{+iE_p t}$ por isso é comum a seguinte denominação:

$a_{\vec p}\, e^{ipx} \sim a_{\vec p}\, e^{-iE_p t} \longleftrightarrow$ solução de frequência (ou energia) positiva

$a^{\dagger}_{\vec p}\, e^{-ipx} \sim a^{\dagger}_{\vec p}\, e^{iE_p t} \longleftrightarrow$ solução de frequência (ou energia) negativa

Note, no entanto, que o operador hamiltôniano: $H = \sum_{\vec k} \omega_{\vec k} N_{\vec k} \longrightarrow \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \omega_{\vec k}\, \underbrace{a^{\dagger}(\vec k)\, a(\vec k)}_{N^{CONT.}_{\vec k}}$

só tem autovalores maiores ou iguais a zero. Portanto não há mais o problema de energia negativa (não há nenhum estado com energia menor que zero).

Interpretação de Partícula

Lembrando que a quantidade conservada quando fazemos translações espaço-temporais é o tensor energia momento: $T^{\mu}{}_{\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\, \partial_\nu \phi - \mathcal{L}\, \delta^{\mu}{}_{\nu}$

E que podemos pensar nas componentes conservadas só por translações espaciais ou temporais:

$$t: \quad H = \int T^{00}\, d^3x = \int \left(\pi(x)\, \dot\phi(x) - \mathcal{L}\right) d^3x = \int \mathcal{H}\, d^3x$$

$$x^{\mu}: \quad P^{i} = \int T^{0i}\, d^3x = \int \pi\, \partial^{i}\phi\, d^3x \qquad\qquad \vec P = \int \pi\, \vec\nabla \phi\, d^3x$$

$$\boxed{\vec P = \int \pi\, \vec\nabla\phi\, d^3x = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, \vec p\, a^{\dagger}_{\vec p}\, a_{p}} \qquad \text{(eq. 35.1)}$$

Isto nos mostra que o operador $a^{\dagger}_{\vec p}$ age no vácuo para criar um estado com momento $\vec p$ e energia $E = +\sqrt{\vec p^{\,2} + m^2}$ por isso interpretaremos estes estados como partículas de massa m

Note que definimos o momento total do estado em termos da carga conservada pela invariância sob translações, e não como o momento canônicamente conjugado.

Estatística de Bose-Einstein

Uma vez que: $\left[a^{\dagger}_{\vec{k}}, a^{\dagger}_{\vec{k}'}\right] = 0$ temos que:

$$|\psi\rangle = \sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2} \psi(\vec{k}_1,\vec{k}_2)\, \alpha^{\dagger}_{\vec{k}_1} \alpha^{\dagger}_{\vec{k}_2} |0\rangle = \sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2} \psi(\vec{k}_1,\vec{k}_2)\, \alpha^{\dagger}_{\vec{k}_2} \alpha^{\dagger}_{\vec{k}_1} |0\rangle$$

$$\vec{k}_2 \quad \vec{k}_1 \quad \vec{k}_1 \quad \vec{k}_2$$

$$= \sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2} \psi(\vec{k}_2,\vec{k}_1)\, \alpha^{\dagger}_{\vec{k}_1} \alpha^{\dagger}_{\vec{k}_2} |0\rangle$$

Estado qualquer definido pela função de onda $\psi(\vec{k}_1,\vec{k}_2)$

Vemos que este estado é simétrico sobre a troca $\vec{k}_1 \longleftrightarrow \vec{k}_2$ portanto, se interpretarmos cada criação como uma partícula (e neste caso são todas idênticas) de momento k, esta estarão satizfazendo uma estatística de Bose-Einstein: $\psi(\vec{k}_1,\vec{k}_2) = \psi(\vec{k}_2,\vec{k}_1)$

\\

Propagador do Campo Escalar Livre

(Peskin 2.3-2.4, Nastase 4)

Vamos nos preocupar agora em achar expressões relativisticamente invariantes para as soluções da equação de Klein-Gordon e então abordar a questão da causalidade.

Vimos que, na versão discretizada, os estados são normalizados da seguinte forma (eq 33.3):

$$|n_{\vec{k}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_k!}} \left(\alpha^{\dagger}_{\vec{k}}\right)^{n_{\vec{k}}} |0\rangle \qquad \langle n|m\rangle = \delta_{mn}$$

Lembrando que a relação entre o discreto e o contínuo é:

$$\begin{cases} a_{\vec{k}} \longleftrightarrow \sqrt{V(2\pi)^3}\, \alpha_{\vec{k}} \\ \delta^3(\vec{k}-\vec{k}') \longleftrightarrow V\, \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \end{cases}$$

$$n_{\vec{k}} = 1 \qquad |1_{\vec{k}}\rangle \equiv |\vec{k}\rangle = \alpha^{\dagger}_{\vec{k}} |0\rangle$$

Normalização no contínuo: $\langle \vec{p}|\vec{k}\rangle = (2\pi)^3 \underbrace{\delta^3(\vec{p}-\vec{k})}_{\text{não é invariante}}$

Considere um boost na direção 3:

$$\left.\begin{aligned} p_3' &= \gamma(p_3 + \beta E_p) \\ E_p' &= \gamma(E_p + \beta p_3) \\ k_3' &= \gamma(k_3 + \beta E_k) \\ E_k' &= \gamma(E_k + \beta k_3) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \delta\left(f(x) - f(x_0)\right) = \frac{1}{|f'(x_0)|}\delta(x - x_0)$$

$\dots \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta = \frac{v}{c} = v$ (unidades naturais)

$$\delta^3(\vec{p}\,' - \vec{k}\,') = \delta^2(\vec{p}_{12} - \vec{k}_{12})\,\delta(p_3' - k_3')$$

$$p_3' = f(p_3) = \gamma\left(p_3 + \beta\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + m^2}\right) \qquad k_3' = f(k_3) \ldots \qquad \begin{matrix} p_3 = x \\ k_3 = x_0 \end{matrix}$$

$$\delta^3(\vec{p}\,' - \vec{k}\,') = \delta^3(\vec{p} - \vec{k})\,\frac{1}{\left.\frac{df(p_3)}{dp_3}\right|_{\vec{p}=\vec{k}}} \;\Big\}\rightarrow\; \vec{p} = \vec{k} \rightarrow E_p = E_k = E$$

$$\delta^3(\vec{p} - \vec{k}) = \delta^3(\vec{p}\,' - \vec{k}\,')\,\gamma\left(1 + \beta\frac{\partial E}{\partial p_3}\right) \leftarrow \left\{ \begin{array}{l} E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \\ \frac{\partial E}{\partial p_3} = \frac{1}{2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}}\,2p_3 = \frac{p_3}{E} \end{array} \right.$$

$$\delta^3(\vec{p} - \vec{k}) = \delta^3(\vec{p}\,' - \vec{k}\,')\,\frac{\gamma}{E}\underbrace{(E + \beta p_3)}_{E'}$$

$$\delta^3(\vec{p} - \vec{k}) = \delta^3(\vec{p}\,' - \vec{k}\,')\,\frac{E'}{E}$$

Fica óbvio então que o objeto: $\quad E\,\delta^3(\vec{p} - \vec{k}) = E'\,\delta^3(\vec{p}\,' - \vec{k}\,')$

é invariante. Por isso usaremos a normalização relativística a seguir:

$$\boxed{\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle = 2E_{\vec{p}}\,(2\pi)^3\,\delta^3(\vec{p} - \vec{q})} \quad \text{(eq. 37.1)}$$

Que, para um número arbitrário de excitações, fica:

$$\langle \{\vec{k}_i\} | \{\vec{q}_j\} \rangle = \underbrace{\sum_{\pi(j)}}_{} \prod_i 2\omega_{\vec{k}_i}\,(2\pi)^3\,\delta^3(\vec{k}_i - \underbrace{\vec{q}_{\pi(j)}}_{}) \quad \text{(eq. 37.2)}$$

$\rightarrow$ permutações de $\{\vec{q}_j\}$

Se colocarmos um fator adicional de $\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}$ na normalização do estado, obtemos as relações acima:

$$|n_{\vec{k}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_k!}}(a^\dagger_{\vec{k}})^{n_{\vec{k}}}|0\rangle \xrightarrow{\text{redefino}} |n_{\vec{k}}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{n_{\vec{k}}!}}\left(\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}\,a^\dagger_{\vec{k}}\right)^{n_{\vec{k}}}|0\rangle$$

$$|\{n_{\vec{k}}\}\rangle \equiv \prod_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{n_{\vec{k}}!}}\left(\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}\,a^\dagger_{\vec{k}}\right)^{n_{\vec{k}}}|0\rangle$$

Que passando para o contínuo:

$$\boxed{|\{\vec{k}_i\}\rangle = \prod_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{n_{\vec{k}}!}}\left(\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}\,a^\dagger_{\vec{k}}\right)^{n_{\vec{k}}}|0\rangle} \quad \text{(eq. 37.3)} \quad \longleftrightarrow \left[\prod_{\vec{k}}\left(\sqrt{V(2\pi)^3}\right)^{n_{\vec{k}}}\right]|\{n_{\vec{k}}\}\rangle$$

$$|\vec{p}\rangle = \sqrt{2E_p}\,a^\dagger_{\vec{p}}\,|0\rangle$$

Temos também que tomar cuidado em mudar esta normalização em todos os lugares:

$$\hat{1} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} |p\rangle\langle p|$$

Transformação de Lorentz: $|\Lambda\vec{p}\rangle = \underbrace{U(\Lambda)}_{\text{unitária}} |\vec{p}\rangle \qquad \langle\Lambda\vec{q}|\Lambda\vec{p}\rangle = \langle\vec{q}|\vec{p}\rangle$

Importante: note que agora que quantizamos o campo (transformando o mesmo em um operador) o requisito para que ele seja ESCALAR muda:

$$\phi'_{cl}(x'=\Lambda x) = \underbrace{R(\Lambda)}_{1}\,\phi_{cl}(x) \implies \begin{array}{c} \phi_{cl}(x) \xleftrightarrow{\text{equivalência}} \langle\psi|\hat{\phi}(x)|\psi\rangle \\ \| \\ \phi'_{cl}(x') \longleftrightarrow \langle\psi|U^{-1}(\Lambda)U(\Lambda)\hat{\phi}(x)U^{-1}(\Lambda)U(\Lambda)|\psi\rangle \end{array}$$

$$|\Lambda\vec{p}\rangle = \sqrt{2E_{\Lambda p}}\, a^{+}_{\Lambda\vec{p}}|0\rangle = U(\Lambda)\sqrt{2E_p}\, a^{+}_{p}\underbrace{|0\rangle}_{U^{-1}(\Lambda)U(\Lambda)} \qquad U(\Lambda)|0\rangle = |0\rangle$$

$$\boxed{U(\Lambda)\, a^{+}_{\vec{p}}\, U^{-1}(\Lambda) = \sqrt{\frac{E_{\Lambda p}}{E_p}}\, a^{+}_{\Lambda\vec{p}}} \quad \text{(eq. 38.1)}$$

Outro objeto que gostaríamos de ter em uma forma explicitamente relativística é a expansão do campo escalar:

$$\phi(\vec{x},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\left(a_{\vec{p}}\, e^{ipx} + a^{+}_{\vec{p}}\, e^{-ipx}\right)\Big|_{p^0=E_p} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}\sqrt{2}\left(\sqrt{E_p}\, a_{\vec{p}}\, e^{ipx} + \underbrace{\sqrt{E_p}\, a^{+}_{\vec{p}}}_{=U^{-1}(\Lambda)\sqrt{E_{\Lambda p}}\,a^{(+)}_{\Lambda\vec{p}}\,U(\Lambda)} e^{-ipx}\right)\Big|_{p^0=E_p}$$

Para que: $\phi(x) = U^{-1}(\Lambda)\phi'(x')U(\Lambda)$ este pedaço deve ser invariante

De fato:

$$\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p} = \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}(2\pi)\,\delta(p^2+m^2)\Big|_{p^0>0}$$

só tenho invariantes

$$\delta(p^2+m^2) = \delta(-p_0^2+\vec{p}^2+m^2) = \delta(-p_0^2+E_p^2)$$

$$\delta(f(p^0)-f(E_p)) = \frac{1}{|f'(p^0)|}\delta(p^0-E_p) = \frac{1}{2p^0}\delta(p^0-E_p)$$

o que mostra que esta é uma integral no tri-momento invariante de Lorentz, de forma que:

$$f(p) \xrightarrow{\text{Lorentz}} f(p) \implies \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{f(p)}{2E_p} \longrightarrow \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{f(p)}{2E_p}$$

Podemos enfim escrever:

$$\boxed{\phi(x) \equiv \phi(\vec{x},t) = \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}(2\pi)\,\delta(p^2+m^2)\Big|_{p^0>0}\left(\sqrt{2E_p}\, a_{\vec{p}}\, e^{ipx} + \sqrt{2E_p}\, a^{+}_{\vec{p}}\, e^{-ipx}\right)\Big|_{p^0=E_p}} \quad \text{(eq. 38.2)}$$

redundante pois é garant. pela $\delta(p^2+m^2)$

Finalmente consideremos:

$$\phi(\vec{x})|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}e^{-i\vec{p}\vec{x}}|\vec{p}\rangle$$

operador na representação de Schödinger, basta partir de 38.2 e usar $\phi_S(\vec{x}) = e^{-i\hat{H}t}\phi_H(x)\, e^{+i\hat{H}t}$ lembrando que:

$[\hat{a}_p, \hat{H}] = \omega_p \hat{a}_p$

$\hat{H}\hat{a}_p = \hat{a}_p(\hat{H}-E_p)$ $\quad \hat{H}\hat{a}^+ = \hat{a}^+(\hat{H}+E_p)$

$\hat{H}^n\hat{a}_p = \hat{a}_p(\hat{H}-E_p)^n$ $\quad \hat{H}^n\hat{a}^+ = \hat{a}^+(\hat{H}+E_p)^n$

$e^{-i\hat{H}t}\hat{a}_p e^{+i\hat{H}t} = \hat{a}_p e^{+iE_pt}$ $\quad e^{-i\hat{H}t}\hat{a}_p^+ e^{+i\hat{H}t} = \hat{a}_p^+ e^{-iE_pt}$

É uma superposição de vários estados de uma partícula (cada um deles com momento bem definido), muito similar aos auto-estados da posição em MQ (a diferença vem do fator $1/E_p$). De fato:

$$\underbrace{\langle 0|\phi(\vec{x})}_{\text{“}\langle \vec{x}|\text{”}}|\vec{p}\rangle = \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{p'}}e^{+i\vec{p}'\vec{x}}\underbrace{\langle \vec{p}'|\vec{p}\rangle}_{2E_{p'}(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}'-\vec{p})} = e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}$$

Da mesma forma que na MQ tínhamos $\langle \vec{x}|\vec{p}\rangle \sim e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}$

Por isso podemos interpretar esta função como a função de onda no espaço das posições da partícula criada com momento *p*, e dizemos que $\phi(x)$ cria uma partícula na posição *x*.

Campo Escalar Complexo

Para entender melhor a propagação (a evolução temporal) destes estados, nós passaremos à quatização do campo escalar complexo:

$$\mathcal{L} = -\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi^* - m^2\phi^*\phi - U(|\phi|^2)$$

Esta Lagrangeana é simétrica sobre: $\phi \to \phi\, e^{i\alpha}$ (α: NÚMERO)

que é uma simetria U(1) Global. Há várias formas de falar sobre ϕ: dizemos que ϕ é “carregado sobre U(1) Global”, “tem carga de U(1) global” ou se “transforma sobre U(1) global”.

Notem que temos um fator 1/2 faltando aí: $\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi \longleftrightarrow \partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi^*$

Isso porque um campo complexo tem dois graus de liberdade e trataremos ϕ e ϕ^* como campos independentes.

EOM for ϕ: $\quad (\partial_\mu\partial^\mu - m^2)\phi^* = \frac{\partial U}{\partial\phi}$

for ϕ^*: $\quad (\partial_\mu\partial^\mu - m^2)\phi = \frac{\partial U}{\partial\phi^*}$

Seguimos um procedimento análogo ao do campo real, só que agora com o dobro dos graus de liberdade:

$$\boxed{\begin{aligned}\phi(\vec{x},t) &= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}\left(\underline{a_+(\vec{p},t)}e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \underline{a_-^\dagger(\vec{p},t)}e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}\right)\\ \phi^\dagger(\vec{x},t) &= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}\left(\underline{a_+^\dagger(\vec{p},t)}e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \underline{a_-(\vec{p},t)}e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}\right)\end{aligned}} \qquad \text{(eq. 39.1)}$$

$a_+ \quad a_+^+$

$a_- \quad a_-^+$

$$\boxed{\begin{aligned}\pi(\vec{x},t) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left(-i\sqrt{\frac{\omega_p}{2}}\right)\left(a_-(\vec{p},t)e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} - a_+^\dagger(\vec{p},t)e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}\right)\\ \pi^\dagger(\vec{x},t) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left(i\sqrt{\frac{\omega_p}{2}}\right)\left(a_-^\dagger(\vec{p},t)e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} - a_+(\vec{p},t)e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}\right)\end{aligned}}$$

(eq. 40.1)

Podemos repetir todo o procedimento do campo real para mostrar que que a dependência temporal é a mesma e que:

$\omega_p = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$

$$\left[a_\pm(\vec{p},t),\, a^\dagger_\pm(\vec{p}',t)\right] = (2\pi)^3\,\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$$

(qualquer outro comutador é zero)

A carga conservada pela simetria U(1) é (exercício):

$$Q = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\Big[\underbrace{a^\dagger_{+k}a_{+k}}_{N_{+\vec{k}}} - \underbrace{a^\dagger_{-\vec{k}}a_{-\vec{k}}}_{N_{-\vec{k}}}\Big]$$

$N_{-\vec{k}}$ → Número de partículas com carga negativa

$N_{+\vec{k}}$ → Número de partículas com carga positiva

$a_+^\dagger$ → cria carga + $a_-^\dagger$ → cria carga -

a_+ → aniquila carga + a_- → aniquila carga -

ϕ → aniquila carga + e cria carga -

$\phi^\dagger$ → aniquila carga - e cria carga +

Temos dois estados distintos de uma partícula: $|p,+\rangle \sim a_+^\dagger|0\rangle$

$|p,-\rangle \sim a_-^\dagger|0\rangle$

ambos tem funções de onda de uma partícula, de mesma massa m e cargas opostas. Assim introduzimos o conceito de antipartícula e vemos que o mesmo campo complexo descreve tanto a partícula quanto a antipartícula, de forma indissociável (pense quão mais elegante isto é do que a história do mar de Dirac). Ademais, para este campo:

$$\vec{P} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\vec{k}\left[N_{+\vec{k}} + N_{-\vec{k}}\right] \qquad H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\omega_k\left[N_{+\vec{k}} + N_{-\vec{k}}\right]$$

De forma que o momento e a energia (que é positiva) se comportam como esperaríamos de dois conjuntos de partículas (só a carga é subtraída). O campo real pode ser visto como um caso particular, onde as partículas são a própria antipartícula (já que tem carga zero).

Consideremos agora o objeto:

$$\langle 0|\underbrace{\phi^\dagger(x)}_{\text{aniquila um estado em x}}\underbrace{\phi(y)}_{\text{cria um estado em y}}|0\rangle \quad \underset{QFT}{\overset{QM}{\rightleftharpoons}} \quad \langle q',t'|q,t\rangle$$

$$(q,t) \rightarrow (q',t')$$

$$y^\mu = (t_y, \vec{y}) \rightarrow x^\mu = (t_x, \vec{x})$$

Note que esta é a função de dois pontos da teoria (compare com a pg 24 - aqui os estados "fixos" |q> e |q'> são o vácuo da teoria em um tempo não especificado - que mais tarde veremos ser infinito passado e infinito futuro)

Note que: $\langle q',t'|q,t\rangle \underset{pg\,18}{=} \langle q'|e^{iH(t-t')}|q\rangle$

O que é o mesmo objeto que calculamos na pg 3:

$$U(t) = \langle \vec{x}|e^{-iHt}|\vec{x}_0\rangle + \begin{pmatrix} q' = \vec{x} & q = \vec{x}_0 \\ t' = t & t = 0 \end{pmatrix}$$

E que mostramos ter problemas com probabilidade não nula para propagação fora do cone de luz.

Voltemos por um instante para o campo real: $\phi^\dagger(x) = \phi(x)$

32.3 $\Rightarrow$ $$\phi(\vec{x},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\left(a_{\vec{p}}\,e^{ipx} + a^\dagger_{\vec{p}}\,e^{-ipx}\right)\Big|_{p^0=E_p}$$

$$\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle \sim \langle 0|\left(a^\dagger_{\vec{p}}\,e^{-ipx} + a_{\vec{p}}\,e^{+ipx}\right)\left(a_{\vec{q}}\,e^{+iqx} + a^\dagger_{\vec{q}}\,e^{-iqx}\right)|0\rangle =$$

$\langle 0|a^\dagger = 0$ $\qquad$ $a|0\rangle = 0$

$$= \langle 0|a_{\vec{p}}\,a^\dagger_{\vec{q}}|0\rangle\, e^{ipx - iqy}$$

$$a\,a^\dagger = \underbrace{[a, a^\dagger]}_{(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{q})} + \underbrace{a^\dagger a}_{\langle 0|a^\dagger a|0\rangle = 0}$$

$$\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle = \int \frac{d^3p}{\cancel{(2\pi)^3}}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_q}}\cancel{(2\pi)^3}\underbrace{\delta^3(\vec{p}-\vec{q})}_{\vec{p}=\vec{q}\ \Rightarrow\ E_p = E_q,\ p_0 = q_0}\, e^{ipx-iqy}$$

$$\boxed{D(x-y) \equiv \langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}\,e^{ip(x-y)}\Big|_{p^0=E_p}} \quad \text{(eq. 41.1)}$$

Vamos ver o que acontece com este objeto sobre transformações de Lorentz. Temos que analisar dois casos:

(1) *(x - y)* é tipo-tempo $\rightarrow (x-y)^2 < 0$ dentro do cone de luz

(2) *(x - y)* é tipo-espaço $\rightarrow (x-y)^2 > 0$ fora do cone de luz