

$\langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle$   
 cria um estado em y  
 aniquila um estado em x



$\langle q', t' | q, t \rangle$   
 $(q, t) \rightarrow (q', t')$

$y^\mu = (t_y, \vec{y}) \rightarrow x^\mu = (t_x, \vec{x})$   
 Note que esta é a função de dois pontos da teoria (compare com a pg 24 - aqui os estados "fixos"  $|q\rangle$  e  $|q'\rangle$  são o vácuo da teoria em um tempo não especificado - que mais tarde veremos ser infinito passado e infinito futuro)

Note que:  $\langle q', t' | q, t \rangle = \overline{\langle q | e^{iH(t-t')} | q' \rangle}$   
 O que é o mesmo objeto que calculamos na pg 3:  
 $U(t) = \langle \vec{x} | e^{-iHt} | \vec{x}_0 \rangle \quad \left( \begin{matrix} t' = \vec{x} & q = \vec{x}_0 \\ t = t & t = 0 \end{matrix} \right)$   
 E que mostramos ter problemas com probabilidade não nula para propagação fora do cone de luz.

Voltemos por um instante para o campo real:  $\phi^+(x) = \phi(x)$

32.3  $\Rightarrow \phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_{\vec{p}} e^{ipx} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{-ipx}) \Big|_{p^0 = E_p}$

$\langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle \sim \langle 0 | (a_{\vec{p}}^\dagger e^{-ipx} + a_{\vec{p}} e^{ipx}) (a_{\vec{q}} e^{iqy} + a_{\vec{q}}^\dagger e^{-iqy}) | 0 \rangle =$   
 $= \langle 0 | a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{q}} | 0 \rangle e^{ipx - iqy}$   
 $\hookrightarrow a a^\dagger = [a, a^\dagger] + a^\dagger a$   
 $(2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q})$   
 $\langle 0 | a^\dagger a | 0 \rangle = 0$

$\langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) e^{ipx - iqy}$   
 $\hookrightarrow \vec{p} = \vec{q} \Rightarrow E_p = E_q$   
 $p_0 = q_0$

$D(x-y) \equiv \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{ip(x-y)} \Big|_{p^0 = E_p}$  (eq. 41.1)

Vamos ver o que acontece com este objeto sobre transformações de Lorentz. Temos que analisar dois casos:

- (1)  $(x-y)$  é tipo-tempo  $\rightarrow (x-y)^2 < 0$  dentro do cone de luz
- (2)  $(x-y)$  é tipo-espaco  $\rightarrow (x-y)^2 > 0$  fora do cone de luz

No caso (1) (tipo-tempo), podemos escolher um referencial em que:  $\begin{cases} t = t_x = t_y \\ \vec{x} - \vec{y} = 0 \end{cases}$

E fazer a integral, usando:  $d^3p = d\Omega p^2 dp$   $p = \sqrt{E^2 - m^2}$   
 $\frac{dE}{dp} = \frac{p}{\sqrt{p^2 + m^2}} \Rightarrow \frac{p dp}{\sqrt{p^2 + m^2}} = dE \Rightarrow \frac{p^2 dp}{\sqrt{p^2 + m^2}} = \sqrt{E^2 - m^2} dE$

$$D(x-y) = \int d\Omega \int \frac{p^2 dp}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-iE_p t} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty dE \sqrt{E^2 - m^2} e^{-iEt} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} e^{-imt}$$

método da fase estacionária (ver material adicional)

A probabilidade é oscilatória (não vai a zero), mas como estamos olhando  $\vec{x} = \vec{y}$ , isto não é um problema.

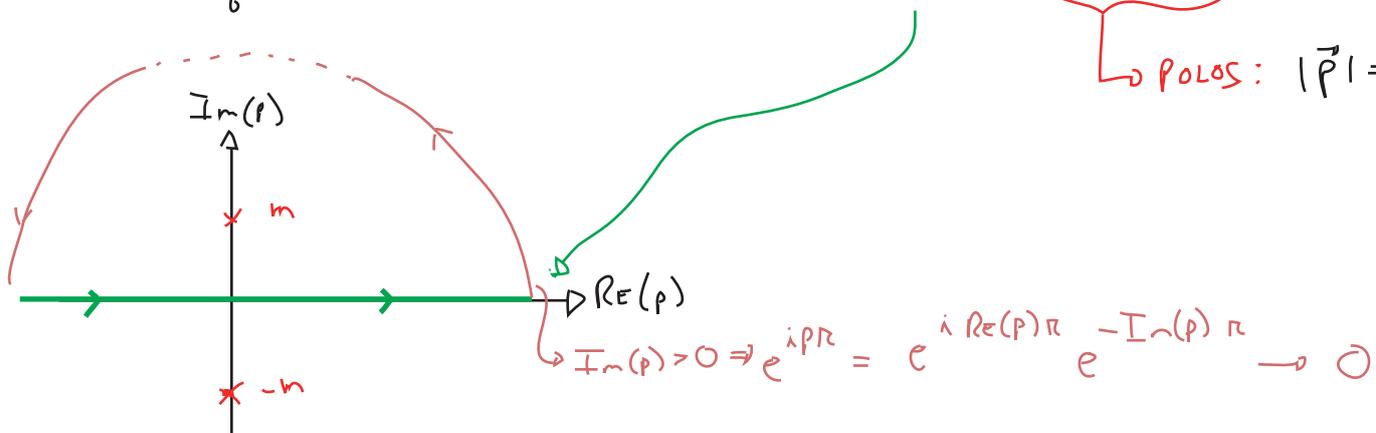
No caso (2) (tipo-espaco), podemos escolher um referencial em que:  $\begin{cases} t_x = t_y \\ \vec{x} - \vec{y} = \vec{r} \end{cases}$

Neste caso:

$$D(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}} = 2\pi \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{2E_p (2\pi)^3} \int_{-1}^1 d(\cos\theta) e^{i p r \cos\theta} =$$

$$= 2\pi \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{2E_p (2\pi)^3} \frac{e^{i p r} - e^{-i p r}}{i p r} = \frac{-i}{(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} p dp \frac{e^{i p r}}{\sqrt{p^2 + m^2}}$$

↳ POLOS:  $|p| = \pm im$



$$D(x-y) = 2\pi i \times \left( \frac{i}{(2\pi)^2 r} \right) (im) e^{-mr} = \frac{im}{4\pi^2 r} e^{-mr} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{-mr}$$

(muito fora do cone de luz)

Ops! Parece que temos (qualitativamente) o mesmo problema que antes! Acontece que ainda não definimos apropriadamente os observáveis desta teoria de campos. Será que este problema afeta quantidades observáveis? Veremos em breve que o que realmente importa são comutadores

**do tipo** (outra forma de pensar é a de que estamos construindo uma teoria quântica e ainda não definimos bem qual tipo de experiência ou observável queremos descrever. Então, por enquanto, estamos apenas verificando quais objetos na teoria violam causalidade ou não, e depois passaremos ao trabalho de mostrar que são estes objetos que aparecem nas grandezas observáveis):

$$[\phi(x), \phi(y)]$$

Notemos então que:

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(y)] &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} \left[ (a_{\vec{p}} e^{i p \cdot x} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i p \cdot x}), (a_{\vec{q}} e^{i q \cdot y} + a_{\vec{q}}^\dagger e^{-i q \cdot y}) \right] \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left( e^{i p \cdot (x-y)} - e^{-i p \cdot (y-x)} \right) = D(x-y) - D(y-x) \end{aligned}$$

$e^{i p \cdot x - i q \cdot y} \underbrace{[a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}^\dagger]}_{(2\pi)^3 \delta(\vec{p}-\vec{q})} + e^{-i p \cdot x + i q \cdot y} \underbrace{[a_{\vec{p}}^\dagger, a_{\vec{q}}]}_{-(2\pi)^3 \delta(\vec{p}-\vec{q})}$

Note que o comutador de dois campos (operadores) é uma função, por isso:  $\langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle = \langle 0 | 0 \rangle [\phi(x), \phi(y)]$

Note também que é a primeira vez que estamos falando em comutadores para tempos diferentes, veja a eq. 28.1

Veja que, para separações **tipo-espaço**:  $(x-y) = (0, \vec{x} - \vec{y})$  e podemos fazer uma rotação  $x-y \rightarrow -(x-y)$  que é uma transformação de Lorentz. Acontece que  $D$  é um invariante por transformações de Lorentz e portanto:

$$(x-y)^2 > 0 \rightarrow D(x-y) = D(y-x)$$

∴  $[\phi(x), \phi(y)] = 0$  (fora do cone de luz)

Por outro lado, para separações **tipo-tempo** temos: 
$$\begin{cases} (x-y) = (t_x - t_y, 0) \\ (y-x) = (t_y - t_x, 0) \end{cases}$$

e não há transformação de Lorentz que leve um vetor no outro (de fato seria necessária uma transformação discreta, a inversão temporal), logo:

$$(x-y)^2 < 0 \rightarrow D(x-y) \neq D(y-x)$$

∴  $[\phi(x), \phi(y)] \neq 0$  (dentro do cone de luz)

Esse resultado é importantíssimo. Ele mostra que, nestes comutadores, a contribuição que causaria violações de causalidade na transição de  $x^\mu \rightarrow y^\mu$  é cancelada por uma outra transição na direção oposta  $y^\mu \rightarrow x^\mu$  (**inclusive no eixo temporal**). Note também que fizemos esta conta para um campo escalar real, cujas partículas (excitações) são **a própria anti-partícula**, e que a contribuição que caminha na direção contrária também poderia ser lida como uma **solução de frequência negativa**, andando na direção certa  $x^\mu \rightarrow y^\mu$ .

Para deixar isto mais claro, vamos olhar estes comutadores com mais cuidado.

Propagador de Klein-Gordon

Considere o número complexo:  $[\phi(x), \phi(y)] = \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle =$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left[ e^{i p(x-y)} - e^{-i p(x-y)} \right] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[ \frac{1}{2E_p} e^{i p(x-y)} \Big|_{p^0 = E_p} + \frac{1}{-2E_p} e^{i p(x-y)} \Big|_{p^0 = -E_p} \right]$$

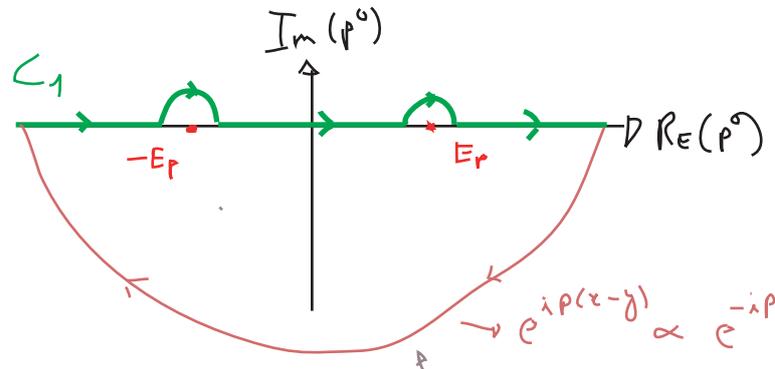
$p^0 = E_p \Rightarrow \bar{p}^0 = -E_p$   
 $\vec{p}^0 \Rightarrow -\vec{p}$   
 $e^{-i p(x-y)} \Rightarrow e^{i p(x-y)}$

Transições na mesma direção no espaço tempo

É possível reescrever isto em termos de uma integral em  $p^0$ :

$x^0 > y^0 \Rightarrow [\phi(x), \phi(y)] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int_{C_1} \frac{dp^0}{2\pi i} \frac{1}{p^2 + m^2} e^{i p(x-y)}$

POLOS:  $-(p^0)^2 + \vec{p}^2 + m^2 = 0$   
 $p^0 = \pm E_p$



$e^{i p(x-y)} \propto e^{-i p^0(x^0 - y^0)} \propto e^{Im(p^0)(x^0 - y^0)}$   $\xrightarrow{Im(p^0) < 0} 0$

a curva está no sentido horário

$$\int_{C_1} \frac{dp^0}{2\pi i} \frac{1}{-p^2 - m^2} e^{i p(x-y)} = -2\pi i (RES(E_p) + RES(-E_p)) = \frac{1}{2E_p} e^{i p(x-y)} \Big|_{p^0 = E_p} - \frac{1}{2E_p} e^{i p(x-y)} \Big|_{p^0 = -E_p}$$

$$-p^2 - m^2 = (p^0)^2 - \vec{p}^2 - m^2 = (p^0)^2 - E_p^2 = (p^0 - E_p)(p^0 + E_p)$$

$$\frac{1}{p^0 - E_p} \frac{1}{p^0 + E_p} e^{i p(x-y)} \begin{cases} p^0 = E_p \Rightarrow -\frac{1}{2E_p} e^{i p(x-y)} \\ p^0 = -E_p \Rightarrow \frac{1}{2E_p} e^{i p(x-y)} \end{cases}$$

Esta mesma integral  $\left( \int_{C_1} \frac{dp^0}{2\pi i} \frac{1}{p^2 + m^2} e^{i p(x-y)} \right)$  se calculada para  $x^0 < y^0$  dá zero. Isto porque seremos forçados a fechar o contorno por cima, sem pegar nenhum polo.

$e^{i p(x-y)} \propto e^{-i p^0(x^0 - y^0)} \propto e^{-Im(p^0)(y^0 - x^0)}$   $\xrightarrow{Im(p^0) > 0} 0$

Assim, definiremos o **propagador retardado**:

$$D_R(x-y) \equiv \Theta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int_{c_1} \frac{dp^0}{2\pi i} \frac{1}{p^2 + m^2} e^{i p(x-y)} \quad (\text{eq. 45.1})$$

igualdade garantida pela função  $\theta$

$$D_R(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{-i}{p^2 + m^2} e^{i p(x-y)} \quad (\text{eq. 45.2})$$

Fazendo uma transformada de Fourier, temos:

$$D_R(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{i p(x-y)} D_R(p) \Rightarrow D_R(p) = \frac{-i}{p^2 + m^2}$$

Considere o operador de Klein-Gordon:  $\mathcal{O}_{KG}(x) = (-\square^2 - m^2) = (\partial^\mu \partial_\mu - m^2)$

mostramos que (eq 30.2) no espaço dos (tri-)momentos:  $\mathcal{O}_{KG}(t, \vec{p}) = \left( \frac{d^2}{dt^2} + \vec{p}^2 + m^2 \right)$

de forma análoga, poderíamos mostrar que:  $\mathcal{O}_{KG}(p) = (p^2 + m^2)$

Vemos então que:  $\mathcal{O}_{KG}(p) D_R(p) = -i$  (eq. 45.3)

Voltando para as posições:

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{i p(x-y)} \mathcal{O}_{KG}(p) D_R(p) = -i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{i p(x-y)} \delta(x-y)$$

$$(p^2 + m^2) e^{i p(x-y)} = (-\partial_\mu \partial^\mu + m^2) e^{i p(x-y)}$$

$$(\partial_\mu \partial^\mu - m^2) D_R(x-y) = i \delta(x-y) \quad (\text{eq. 45.4})$$

(quer sejam derivadas em x ou y, o resultado é o mesmo)

O que mostra que este **propagador retardado** é uma **função de Green** do operador de KG.

De forma totalmente análoga, poderíamos definir o **propagador avançado** usando um contorno que passasse abaixo de ambos os polos. Este também seria zero para  $x^0 > y^0$  e seria também uma função de Green do operador de KG.

## Propagador de Feynman

Consideremos agora uma forma diferente de definir o caminho no plano complexo. Ao invés de deformar o caminho no eixo real de  $p^0$ , deslocamos um pouco os polos. Além disso passamos "por cima" (eixo imaginário positivo) de um deles e "por baixo" do outro.



$$D_F(x-y) \equiv \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{-i}{p^2 + m^2 - i\epsilon} e^{i p(x-y)} \quad (\text{eq. 46.1})$$

o caminho para integração em  $p^0$  é simplesmente o eixo real  
 a informação da posição dos polos em relação ao caminho está aqui

não é o mesmo  $\epsilon$ , mas é um número pequeno  $> 0$

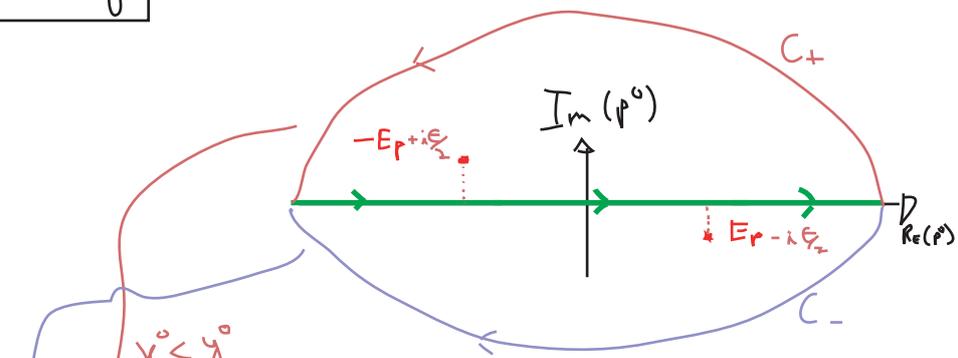
$$p^2 + m^2 - i\epsilon = -(p^0)^2 + \vec{p}^2 + m^2 - i\epsilon = -\underbrace{(p^0 + E_P - \frac{i\epsilon}{2})}_{E_P} (p^0 - E_P + \frac{i\epsilon}{2})$$

$$\epsilon = \epsilon E_P$$

Assim como no caso anterior, ao fazer a integral em  $p^0$ , temos que decidir como fechar o caminho de integração.

$x^0 > y^0 \Rightarrow e^{i p(x-y)} \sim e^{i \text{Im}(p^0)(x^0 - y^0)} \xrightarrow{\text{Im}(p^0) \rightarrow -\infty} \bigcirc$  Fechamos por baixo ( $C_-$ )

$x^0 < y^0 \Rightarrow e^{i p(x-y)} \sim e^{i \text{Im}(p^0)(x^0 - y^0)} \xrightarrow{\text{Im}(p^0) \rightarrow +\infty} \bigcirc$  Fechamos por cima ( $C_+$ )



$$D_F(x-y) = 2\pi i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{i}{-2E_P + i\epsilon} e^{i p(x-y)} \Big|_{p^0 = -E_P} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_P} e^{-i p^0(x-y) + i \vec{p}(\vec{x} - \vec{y})} \Big|_{p^0 = -E_P} =$$

$$= \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_P} e^{+i E_P(x^0 - y^0) - i \vec{p}(\vec{x} - \vec{y})} = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_P} e^{i p(\vec{y} - \vec{x})} \Big|_{p^0 = E_P} = D(y-x)$$

$$D_F(x-y) = -2\pi i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{i}{2E_P - i\epsilon} e^{i p(x-y)} \Big|_{p^0 = E_P} = D(x-y)$$

$$\therefore D_F(x-y) = \Theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle + \Theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \phi(y) \phi(x) | 0 \rangle$$

$$D_F(x-y) = \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | 0 \rangle$$

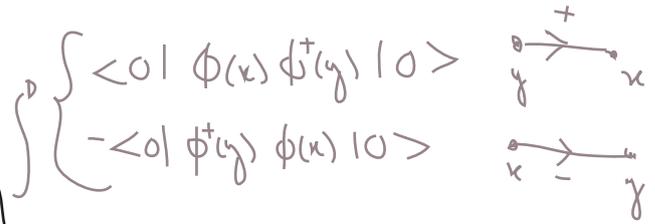
importante notar que o propagador de Feynman não é causal (ele é muito útil, mas não estará diretamente ligado aos observáveis da teoria), isto é uma correlação e não uma propagação de informação. (eq. 47.1)

$$(\partial^\mu \partial_\mu - m^2) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{-i}{p^2 + m^2 - i\epsilon} e^{i p(x-y)} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{(+i)(-p^2 - m^2)}{p^2 + m^2} e^{i p(x-y)}$$

$$(\partial^\mu \partial_\mu - m^2) D_F(x-y) = i \delta^4(x-y) \quad (\text{eq. 47.2})$$

E o campo escalar complexo? Muitas das expressões acima são diretamente generalizáveis e não adicionam nada de novo. A questão da causalidade, no entanto, é interessante. No caso do campo complexo:

- $\phi \rightarrow$  aniquila carga + e cria carga -
- $\phi^\dagger \rightarrow$  aniquila carga - e cria carga +



Os comutadores de interesse serão:  $[\phi(x), \phi^\dagger(y)]$

O resultado é que teremos um termo representando uma partícula de carga positiva fazendo a transição de  $y^\mu \rightarrow x^\mu$  menos um outro representando uma carga negativa na direção oposta  $x^\mu \rightarrow y^\mu$  (que também pode ser interpretada como uma carga positiva e frequência negativa andando na direção certa  $y^\mu \rightarrow x^\mu$ ). Estas duas contribuições se cancelam exatamente fora do cone de luz, mas não dentro dele. Isto deixa bem claro que a teoria precisa de antipartículas com a mesma massa e carga oposta (na verdade todos os números quânticos) para ser causal.

Ainda não temos com relacionar estas funções com observáveis, porque observáveis só fazem sentido em teorias com interações, tratadas no nosso próximo passo.

## Quadro de Interação e o Teorema de Wick

(Nastase 5, Peskin 4.2 e 4.3, Stermann Appendix A)

Os "quadros" da MQ:

Dado um elemento de matriz:  $\langle \psi | \hat{A} | \phi \rangle$   
 $\hookrightarrow \hat{A} = \hat{A}(Q, P)$

(no que segue estou forçando minha letra a diferenciar  $\frac{d}{dt}$  de  $\frac{d}{dt}$ )

a evolução temporal é dada por:

$$i \frac{d}{dt} \langle \psi | \hat{A} | \phi \rangle = \langle \psi | [\hat{A}, \hat{H}] | \phi \rangle$$

(eq. 47.3)

A equação 47.3 tem toda a informação sobre a evolução, mas gostaríamos de separar a evolução dos operadores e estados, definindo: