

$$\therefore D_F(x-y) = \Theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle + \Theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \phi(y) \phi(x) | 0 \rangle$$

$$D_F(x-y) = \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | 0 \rangle$$

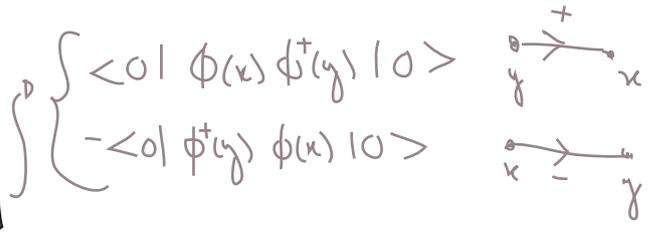
importante notar que o propagador de Feynman não é causal (ele é muito útil, mas não estará diretamente ligado aos observáveis da teoria), isto é uma correlação não uma propagação de informação. (eq. 47.1)

$$(\partial^\mu \partial_\mu - m^2) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{-i}{p^2 + m^2 - i\epsilon} e^{i p(x-y)} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{(+i)(-p^2 - m^2)}{p^2 + m^2} e^{i p(x-y)}$$

$$(\partial^\mu \partial_\mu - m^2) D_F(x-y) = i \delta^4(x-y) \quad (\text{eq. 47.2})$$

E o campo escalar complexo? Muitas das expressões acima são diretamente generalizáveis e não adicionam nada de novo. A questão da causalidade, no entanto, é interessante. No caso do campo complexo:

- $\phi \rightarrow$ aniquila carga + e cria carga -
- $\phi^\dagger \rightarrow$ aniquila carga - e cria carga +



Os comutadores de interesse serão: $[\phi(x), \phi^\dagger(y)]$

O resultado é que teremos um termo representando uma partícula de carga positiva fazendo a transição de $y^\mu \rightarrow x^\mu$ menos um outro representando uma carga negativa na direção oposta $x^\mu \rightarrow y^\mu$ (que também pode ser interpretada como uma carga positiva e frequência negativa andando na direção certa $y^\mu \rightarrow x^\mu$). Estas duas contribuições se cancelam exatamente fora do cone de luz, mas não dentro dele. Isto deixa bem claro que a teoria precisa de antipartículas com a mesma massa e carga oposta (na verdade todos os números quânticos) para ser causal.

Ainda não temos com relacionar estas funções com observáveis, porque observáveis só fazem sentido em teorias com interações, tratadas no nosso próximo passo.

Quadro de Interação e o Teorema de Wick

(Nastase 5, Peskin 4.2 e 4.3, Stermann Appendix A)

Os "quadros" da MQ:

Dado um elemento de matriz: $\langle \psi | \hat{A} | \phi \rangle$
 $\hookrightarrow \hat{A} = \hat{A}(Q, P)$

(no que segue estou forçando minha letra a diferenciar $\frac{\partial}{\partial t}$ de $\frac{\partial}{\partial t}$)

a evolução temporal é dada por:

$$i \frac{d}{dt} \langle \psi | \hat{A} | \phi \rangle = \langle \psi | [\hat{A}, \hat{H}] | \phi \rangle$$

(eq. 47.3)

A equação 47.3 tem toda a informação sobre a evolução, mas gostaríamos de separar a evolução dos operadores e estados, definindo:

$$i \frac{d\hat{A}}{dt} \equiv [\hat{A}, \hat{M}]$$

$$\hat{M}^+ = M$$

$$i \frac{d}{dt} |\psi\rangle \equiv \hat{N} |\psi\rangle$$

$$\hat{N}^+ = N$$

$$-i \frac{d}{dt} \langle \psi | \equiv \hat{N}^+ \langle \psi |$$

$$i \frac{d}{dt} \langle \psi | \hat{A} | \phi \rangle = i \left(\frac{d}{dt} \langle \psi | \right) \hat{A} | \phi \rangle + i \langle \psi | \frac{d\hat{A}}{dt} | \phi \rangle + i \langle \psi | \hat{A} \left(\frac{d}{dt} | \phi \rangle \right)$$

$$= - \langle \psi | \hat{N}^+ \hat{A} | \phi \rangle + \langle \psi | [\hat{A}, \hat{M}] | \phi \rangle + \langle \psi | \hat{A} \hat{N} | \phi \rangle =$$

$$\stackrel{N^+ = N}{\downarrow} = \langle \psi | [\hat{A}, \hat{N}] | \phi \rangle + \langle \psi | [\hat{A}, \hat{M}] | \phi \rangle = \langle \psi | [\hat{A}, \hat{H}] | \phi \rangle$$

$$\hookrightarrow \boxed{\hat{N} + \hat{M} = \hat{H}} \text{ (eq. 48.1)}$$

Um "quadro" consiste em uma escolha de \hat{M} e \hat{N} :

Quadro de Schrödinger: $\left. \begin{matrix} \hat{M} = 0 \\ \hat{N} = \hat{H} \end{matrix} \right\} \begin{matrix} i \frac{d}{dt} |\psi_S(t)\rangle = \hat{H} |\psi_S(t)\rangle \\ i \frac{d}{dt} \hat{A}_S(t) = 0 \end{matrix}$

$$\left. \begin{matrix} \frac{d\hat{A}_S(t)}{dt} = \frac{d\hat{H}}{dt} \stackrel{\uparrow}{=} 0 \\ \text{não dependem explicitamente do tempo} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} \hat{A}_S(t) = \hat{A}(t_0) \\ |\psi_S(t)\rangle = e^{-i\hat{H}(t-t_0)} |\psi(t_0)\rangle \end{matrix}} \text{ (eq. 48.2)}$$

Quadro de Heisenberg: $\left. \begin{matrix} \hat{M} = \hat{H} \\ \hat{N} = 0 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} i \frac{d}{dt} \hat{A}_H(t) = [\hat{A}_H(t), \hat{H}] \\ \frac{d}{dt} |\psi_H(t)\rangle = 0 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} \hat{A}_H(t) = e^{i\hat{H}(t-t_0)} \hat{A}(t_0) e^{-i\hat{H}(t-t_0)} \\ |\psi_H(t)\rangle = |\psi(t_0)\rangle \end{matrix}} \text{ (eq. 48.3)}$

Para o tempo fixo t_0 os dois quadros coincidem:

$$\boxed{|\psi_S(t_0)\rangle = |\psi_H(t_0)\rangle = |\psi(t_0)\rangle \quad \hat{A}_H(t_0) = \hat{A}_S(t_0) = \hat{A}(t_0)} \text{ (eq. 48.4)}$$

Podemos mudar entre os dois quadros fazendo uma transformação unitária:

$$|\psi_w\rangle = \hat{W} |\psi\rangle \quad \hat{W}^+ = \hat{W}^{-1}$$

$$\hat{A}_w = \hat{W} \hat{A} \hat{W}^+ = \hat{W} \hat{A} \hat{W}^{-1}$$

Definindo W como a transformação "Q. Schrödinger" \rightarrow "Q. Heisenberg", vemos que:

$$\hat{A}_H(t) = e^{i\hat{H}(t-t_0)} \hat{A}(t_0) e^{-i\hat{H}(t-t_0)} \quad \leftrightarrow \quad \hat{W} = e^{i\hat{H}(t-t_0)}$$

O que também poderia ter sido obtido de:

$$|\Psi_H(t)\rangle = \hat{W} |\Psi_S(t)\rangle \Rightarrow |\Psi_S(t)\rangle = \hat{W}^{-1} |\Psi_H(t)\rangle = \underbrace{e^{-i\hat{H}(t-t_0)}}_{U_S(t,t_0)} |\Psi(t_0)\rangle$$

(eq. 48.2)

$$\hat{W} = U_S^{-1}(t, t_0) = U_S(t_0, t) \quad (\text{eq. 49.1})$$

De onde vemos que esta transformação é quase o próprio operador evolução (o seu inverso).

Quadro de Interação (ou de Dirac):

Suponha que tenhamos um hamiltoniano do tipo:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$$

\hat{H}_0 → parte livre (quadrática nos campos)
 \hat{H}_1 → parte interagente (potências maiores)

o quadro interação equivale à escolha:

$$\hat{M} = \hat{H}_0 \quad \hat{N} = \hat{H}_1$$

$$i \frac{d\hat{A}_I(t)}{dt} = [\hat{A}_I(t), \hat{H}_0] \quad (\text{eq. 49.2})$$

$$i \frac{d|\Psi_I(t)\rangle}{dt} = \hat{H}_1 |\Psi_I(t)\rangle \quad (\text{eq. 49.3})$$

Mais uma vez, todos os quadros são iguais em t_0 :

$$\hat{A}_I(t_0) = \hat{A}_S(t_0) = \hat{A}_H(t_0) = \hat{A}(t_0) \quad |\Psi_I(t_0)\rangle = |\Psi_S(t_0)\rangle = |\Psi_H(t_0)\rangle = |\Psi(t_0)\rangle$$

A evolução dos operadores se dá como no quadro de Heisenberg da teoria livre:

$$i \frac{d\hat{H}_0}{dt} = 0 \quad \hat{H}_{0I}(t) = \hat{H}_{0S}(t) = \hat{H}_0$$

$$i \frac{d\hat{A}_I(t)}{dt} = [\hat{A}_I(t), \hat{H}_0] \quad \hat{A}_I(t) = e^{i\hat{H}_0(t-t_0)} \hat{A}(t_0) e^{-i\hat{H}_0(t-t_0)}$$

E o próprio hamiltoniano de interação depende do tempo:

$$i \frac{d\hat{H}_1}{dt} = [\hat{H}_1, \hat{H}_0] \quad \hat{H}_1 \equiv \hat{H}_{1I}(t) = e^{i\hat{H}_0(t-t_0)} \hat{H}_1(t_0) e^{-i\hat{H}_0(t-t_0)}$$

A evolução dos estados é um pouco mais complicada:

$$|\Psi_I(t)\rangle = \hat{U}_I(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle$$

quero encontrar U, que satisfaça:

$$\hat{U}(t, t) = 1$$

$$\hat{U}(t, t') \hat{U}(t', t_0) = \hat{U}(t, t_0) \quad (\text{eq. 49.4})$$

Substituindo isto em 49.3

$$i \frac{d}{dt} \hat{U}_I(t, t_0) |\Psi_I(t_0)\rangle = \hat{H}_{1I}(t) \hat{U}_I(t, t_0) |\Psi_I(t_0)\rangle$$

$$i \frac{d}{dt} \hat{U}_I(t, t_0) = \hat{H}_{1I}(t) \hat{U}_I(t, t_0) \quad (\text{eq. 50.1})$$

Uma solução simples para esta equação é:

$$\hat{U}_I(t, t_0) = e^{i \hat{H}_0(t-t_0)} e^{-i \hat{H}_S(t-t_0)}$$

\hat{H}_S : hamiltoniano completo ($\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$) no quadro de Schrödinger
 (eq. 50.2)
 (vou suprimir os símbolos de operador daqui para frente)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} U_I(t-t_0) &= i H_0 e^{i H_0(t-t_0)} e^{-i H_S(t-t_0)} + e^{i H_0(t-t_0)} (-i H_S) e^{-i H_S(t-t_0)} \\ &= -i e^{i H_0(t-t_0)} (H_S - H_0) e^{-i H_S(t-t_0)} = -i H_{1I} e^{i H_0(t-t_0)} e^{-i H_S(t-t_0)} \\ &= -i H_{1I} \hat{U}_I(t, t_0) \end{aligned}$$

$H_{1S} = H_1(t_0)$

$$H_{1I} = e^{i H_0(t-t_0)} H_1(t_0) e^{-i H_S(t-t_0)} \Rightarrow H_1(t_0) = e^{-i H_0(t-t_0)} H_{1I} e^{i H_0(t-t_0)}$$

Gostaríamos de uma solução similar a $e^{-i H_{1I} t}$, mas isso requer mais cuidado pois H_{1I} na eq. 50.1 depende do tempo. Notemos que a expressão:

$$U_I(t, t_0) = 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_{1I}(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_{1I}(t_1) H_{1I}(t_2) + (-i)^3 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \dots$$

(eq. 50.3)

$$\frac{d}{dt} \textcircled{I} = -i H_{1I}(t) \textcircled{I}$$

$$\frac{d}{dt} \textcircled{II} = -i \int_{t_0}^t dt_2 H_{1I}(t) H_{1I}(t_2) = -i H_{1I}(t) \textcircled{I}$$

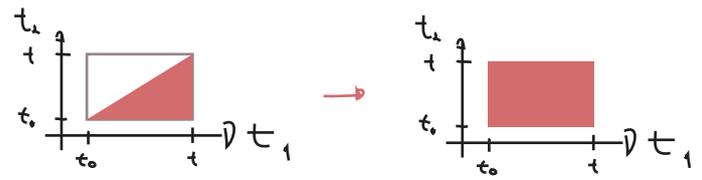
$$\left(\frac{d}{dt} \textcircled{III} = -i H_{1I}(t) \textcircled{II} \right)$$

e assim por diante

$$\therefore \frac{d}{dt} U_I(t, t_0) = -i H_{1I}(t) U_I(t, t_0)$$

\llcorner o que prova que 50.3 é solução de 50.1

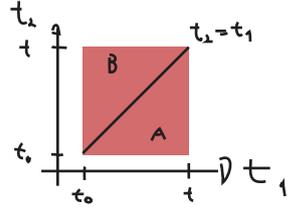
Para simplificar mais o Ansatz 50.3, podemos trocar os limites de integração



tomando o cuidado de notar que $[H_{1I}(t_1), H_{1I}(t_2)] \neq 0$

de fato:

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 T \{ H_{1I}(t_1) H_{1I}(t_2) \} = \underbrace{\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H(t_1) H(t_2)}_A + \underbrace{\int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 H(t_1) H(t_2)}_B = 2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H(t_1) H(t_2)$$



$$T \{ H_{1I}(t_1) H_{1I}(t_2) \} = \begin{cases} H_{1I}(t_1) H_{1I}(t_2) & \text{se } \{t_1, t_2\} \in A \\ H_{1I}(t_2) H_{1I}(t_1) & \text{se } \{t_1, t_2\} \in B \end{cases}$$

Analogamente:

$$\int_{t_0}^t dt_1 \dots dt_n T \{ H_{1I}(t_1) \dots H_{1I}(t_n) \} = n! \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_{1I}(t_1) \dots H_{1I}(t_n)$$

De forma que:

$$\hat{U}_I(t, t_0) = 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 T \{ H_{1I}(t_1) \} + \frac{(-i)^2}{2!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 T \{ H_{1I}(t_1) H_{1I}(t_2) \} + \frac{(-i)^3}{3!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^t dt_3 T \{ \dots \}$$

$$U_I(t, t_0) = T \left\{ \text{Exp} \left[-i \int_{t_0}^t dt' H_{1I}(t') \right] \right\}$$

(eq. 51.1)

Esta separação entre a teoria livre e a parte interagente exige um cuidado adicional. Anteriormente usamos a definição para o vácuo como:

$$H_0 |0\rangle \equiv E_0^L |0\rangle = 0$$

Assumindo H_0 normalmente ordenado

Menor autovalor de H_0

Hamiltoniano do sistema

Faremos o mesmo para o Hamiltoniano com a interação: $H | \Omega \rangle = (H_0 + H_1) | \Omega \rangle \equiv E_0 | \Omega \rangle$

Menor autovalor de $H = H_0 + H_1$

e, em geral: $|0\rangle \neq |\Omega\rangle$. Gostaríamos de expressar este novo vácuo em termos de grandezas conhecidas.

Construindo um conjunto completo com os autoestados do hamiltoniano total temos:

$$H | n \rangle = E_n | n \rangle$$

$$\hat{1} = |\Omega\rangle\langle\Omega| + \sum_{n \neq 0} |n\rangle\langle n|$$

Tomemos um estado que começou no vácuo "livre" da teoria e está evoluindo com o Hamiltoniano completo:

$$e^{-iHT} |0\rangle = e^{-iE_0 T} |\Omega\rangle\langle\Omega|0\rangle + \sum_{n \neq 0} e^{-iE_n T} |n\rangle\langle n|0\rangle$$

e façamos o limite $T \rightarrow \infty(1 - \lambda \epsilon)$

"mata" os estados excitados:
$$e^{-\epsilon E_0 T} \gg e^{-\epsilon E_1 T} \gg e^{-\epsilon E_2 T} \gg \dots$$

$T \rightarrow \infty$

$\epsilon > 0$
 $E_0 \ll 1$

e ficamos só com o zero-ésimo termo da soma do lado direito:

$$\lim_{T \rightarrow \infty(1 - \lambda \epsilon)} \left[e^{-iHT} |0\rangle \right] = e^{-iE_0 T} |\Omega\rangle\langle\Omega|0\rangle$$

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1 - \lambda \epsilon)} \frac{e^{-iH(T+t_0)} |0\rangle}{e^{-iE_0(T+t_0)} \langle\Omega|0\rangle} = \lim_{T \rightarrow \infty(1 - \lambda \epsilon)} \frac{e^{-iH(T+t_0)} e^{iH_0(T+t_0)} |0\rangle}{e^{-iE_0(T+t_0)} \langle\Omega|0\rangle}$$

$H_0|0\rangle = 0$

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1 - \lambda \epsilon)} \frac{U_I(t_0, -T) |0\rangle}{e^{-iE_0(T+t_0)} \langle\Omega|0\rangle} \quad (\text{eq. 52.1})$$

$$(\text{eq. 50.2}) \Rightarrow U_I(-T, t_0) = e^{iH_0(-T-t_0)} e^{-iH(-T-t_0)} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} U_I(t_0, -T) = e^{+i\hat{H}(-T-t_0)} e^{-i\hat{H}_0(-T-t_0)}$$

$$U_I(-T, t_0) U_I(t_0, -T) = 1$$

De forma semelhante:

$$\langle\Omega| = \lim_{T \rightarrow \infty(1 - \lambda \epsilon)} \frac{\langle 0| U_I(T, t_0)}{e^{-iE_0(T-t_0)} \langle 0|\Omega\rangle} \quad (\text{eq. 52.2})$$

Esse é um bom ponto para para e fazer a pertinente pergunta: o que diabos estamos fazendo? Para que serve este quadro de interação?

Pois bem, a imagem que temos em mente é a de experiências aonde temos objetos quânticos e relativísticos: partículas se movendo e interagindo em altas energias. As situações típicas em que conseguimos estudar partículas relativísticas (Raios Cósmicos ou Aceleradores de Partículas) envolvem três "momentos":

(I) Duas ou mais partículas iniciais se aproximam da região de espalhamento a partir de distâncias que podem ser consideradas bem grandes se comparadas com a "região de interação". Estas partículas se movem em linhas retas e são livres (no sentido em que não interagem entre si - pode haver um campo externo que guia sua trajetória, mas ele é tratado classicamente e modifica a geodésica seguida pela partícula).

(II) Ocorre um choque/espalhamento praticamente instantâneo e pontual, no sentido quântico: o tamanho da região de interação e o tempo de duração da mesma estão protegidos pelo princípio da incerteza: não temos como determinar com exatidão aonde nem quando ela aconteceu.

(III) Um número n de partículas deixa a pequena região de interação. Podem ser as mesmas que entraram (no caso de um choque elástico) ou em número e tipo diferente (no caso inelástico). Estas estão novamente livres (no mesmo sentido do momento I) e se movem por uma distância grande antes de chegar aos detectores, onde são medidas (o que é uma nova interação, completamente independente da anterior).

O quadro de interação, por um lado, faz a evolução dos operadores acontecer segundo a Hamiltoniana livre, o que nos permitirá explorar o fato de o sistema é assintoticamente livre no início e no fim do espalhamento. Além disso a parte de interação do Hamiltoniano depende do tempo, o que nos permitirá restringir sua duração.

Uma expressão que deixa bem clara a utilidade do quadro é a 52.1:

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty (1-\lambda \epsilon)} \frac{U_I(t_0, -T) |0\rangle}{e^{-iE_0(T+t_0)}} \langle \Omega | 0 \rangle$$

Vemos que (a menos de um fator de normalização) o vácuo interagente da teoria é criado a partir do vácuo livre pelo operador de evolução no quadro de interação. Este operador é entre um ponto infinito no passado e t_0 , o que só quer dizer um tempo grande se comparado com o tempo de interação.

Ainda falta entender como podemos relacionar as grandezas observáveis (energia, momento, cargas, polarizações) destas partículas incidentes e espalhadas com as funções de n -pontos, o que faremos (muito) mais adiante. Por enquanto nos contentaremos em obter as funções de dois pontos da teoria, que já vimos servir para determinar os propagadores. Primeiro notemos que:

$$\phi(x) = \phi(t, \vec{x}) = \phi_H(t, \vec{x}) \quad (\text{definimos nossos operadores de campo no quadro de Heisenberg})$$

$$\phi_H(t, \vec{x}) = e^{iH(t-t_0)} \phi(t_0, \vec{x}) e^{-iH(t-t_0)}$$

$$\phi_I(t, \vec{x}) = e^{iH_0(t-t_0)} \phi(t_0, \vec{x}) e^{-iH_0(t-t_0)} =$$

$$= \underbrace{e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)}}_{U_I(t, t_0)} \phi_H(x) \underbrace{e^{+iH(t-t_0)} e^{-iH_0(t-t_0)}}_{U_I^+(t, t_0)} \quad 50.2$$

$$\phi_H(x) = U_I^+(t, t_0) \phi_I(x) U_I(t, t_0) \quad (\text{eq. 53.1})$$