

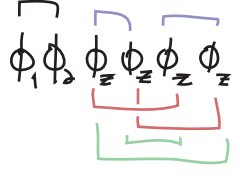
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi - \frac{m^2 \phi^2}{2} - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \iff \mathcal{L} = \mathcal{L}(\chi)$$


$$\int dt H_{I, \mathbb{R}} = \int dt \int d^3 z \delta g_{I, \mathbb{R}}(z) = \int d^4 z \frac{\lambda}{4!} \phi_{\mathbb{R}}(z) \phi_{\mathbb{R}}(z) \phi_{\mathbb{R}}(z) \phi_{\mathbb{R}}(z) \leftarrow \text{todos no mesmo ponto}$$

$$\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 (-i \int dt H_{I, \mathbb{R}}(t)) \} | 0 \rangle = -\frac{i\lambda}{4!} \int d^4 z \langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 \phi_z \phi_z \phi_z \phi_z \} | 0 \rangle$$

Temos que fazer todas as contrações possíveis destes 6 campos, e dividimos isto em dois casos:

- (1) contraímos $\phi(x_1)$ com $\phi(x_2)$ e os $\phi(z)$ só entre si.
- (2) contraímos $\phi(x_1)$ com um dos $\phi(z)$ e $\phi(x_2)$ com outro (os dois $\phi(z)$ que restam são contraídos entre si).

(1) \Rightarrow  $\Rightarrow 3 \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right) D_F(x_1 - x_2) \int d^4 z D_F(z - z) D_F(z - z)$
 as 3 formas de contrair os $\phi(z)$ dão o mesmo resultado (mas eu devo somar sobre elas)

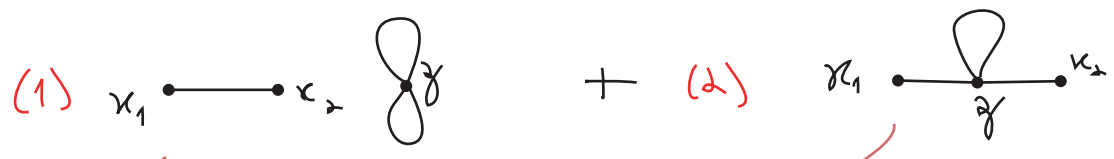
(2) \Rightarrow  \Rightarrow quatro formas de contrair $\phi(x_1)$, e uma vez feito isto, temos três formas de contrair $\phi(x_2)$ e nenhuma ambiguidade nos $\phi(z)$ que restam

$$\therefore 4 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right) \int d^4 z D_F(x_1 - z) D_F(x_2 - z) D_F(z - z)$$

$$\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 (-i \int dt H_{I, \mathbb{R}}(t)) \} | 0 \rangle = 3 \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right) D_F(x_1 - x_2) \int d^4 z D_F(z - z) D_F(z - z) + 12 \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right) \int d^4 z D_F(x_1 - z) D_F(x_2 - z) D_F(z - z) \quad (\text{eq. 59.1})$$

A versão diagramática seria:

$x_1 \cdot x_2 \cdot z \cdot z \Rightarrow$ lembrando que temos 4 campos em z logo 4 linhas devem sair/entrar ali



$\leftarrow 3 \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right) D_F(x_1 - x_2) \int d^4 z D_F(z - z) D_F(z - z)$ \leftarrow a resposta não é função de z
 $\leftarrow 12 \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right) \int d^4 z D_F(x_1 - z) D_F(x_2 - z) D_F(z - z)$
 \leftarrow como advinho estes fatores!?

Vejam os um caso mais complicado:

$\mathcal{O}(x)$

$$\langle 0 | T \left\{ \phi_x \phi_y \frac{1}{3!} \left(-i \frac{\Delta}{4!} \right)^3 \int d^4z \phi_z \phi_z \phi_z \phi_z \int d^4w \phi_w \phi_w \phi_w \phi_w \int d^4u \phi_u \phi_u \phi_u \phi_u \right\} | 0 \rangle \quad (\text{eq. 60.1})$$

expansão da exponencial

para esta contração

$$= \frac{1}{3!} \left(-i \frac{\Delta}{4!} \right)^3 \int d^4z \int d^4w \int d^4u D_F(x-z) D_F(y-w) D_F(z-w) D_F(z-w) D_F^2(w-u) D_F(u-u)$$

(eq. 60.2)

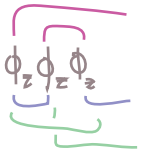
Vamos tentar identificar quantas contrações diferentes poderiam ter levado à mesma expressão 60.2.

Nome dos vértices: 3!

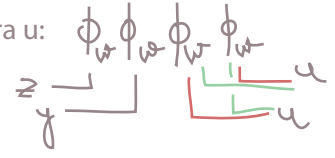
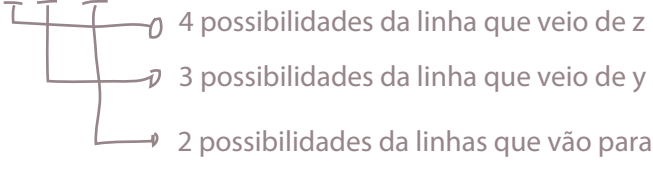
(z, w e u são variáveis mudas. Pense na expressão 60.1: eu poderia ter trocado a ordem de z, w e u sem mudar a posição dos "contratores" e há 3! ordenamentos para w, z e u - zwu, zuw, uzw, uwz, wzu)

Contrações no vértice z: 4.3

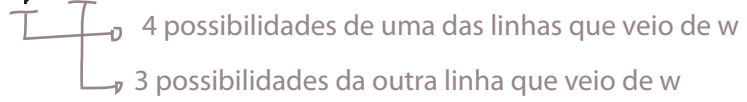
(temos 4 formas de conectar a linha que vem de x. Uma vez feito isto temos três forma de conectar os z's entre si. A linha que sobra vai para w)



Contrações no vértice w: 4.3.2

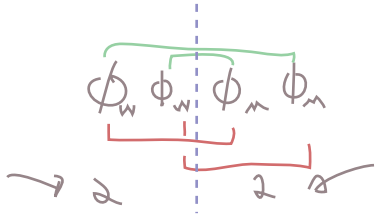


Contrações no vértice u: 4.3



(os dois campos que sobram só tem uma possibilidade)

Dupla contagem w vs. u: 1/2



dupla contagem (acontece sempre que ligo pontos internos com mais de uma linha)

$$3! (4 \cdot 3) (4 \cdot 3 \cdot 2) (4 \cdot 3) \frac{1}{2} = \frac{3! (4!)^3}{8} =$$

De forma que temos 10368 contrações diferentes que levam à mesma expressão 60.2. Note no entanto que este número praticamente cancela o coeficiente presente em 60.2:

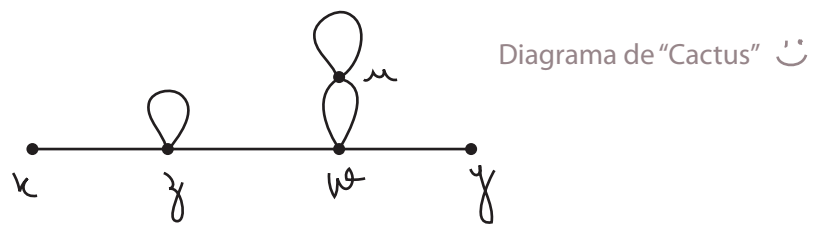
$$\left(\text{Soma sobre todas as contrações} \right) = -\frac{i\lambda}{8} \int d^4z \int d^4w \int d^4\mu D_F(x-z) D_F(y-w) D_F(z-z) D_F(z-w) D_F^2(w-\mu) D_F(\mu-\mu)$$

Este cancelamento não é tão impressionante se pensarmos a respeito:

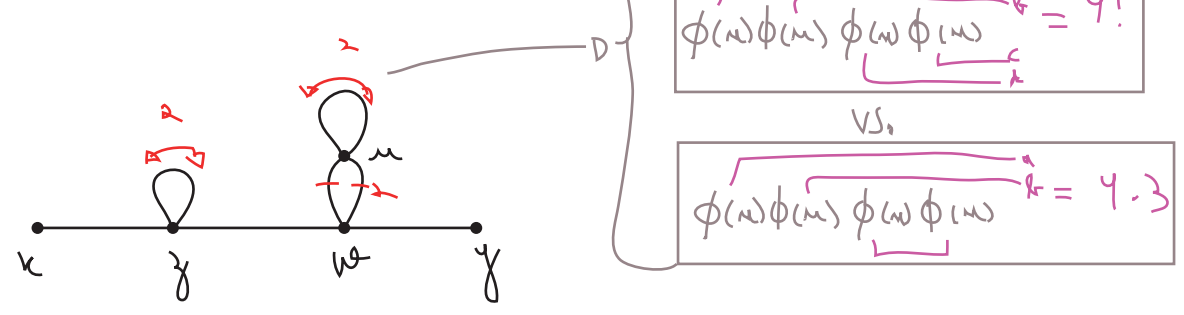
- (1) o fator 3! que vem da troca dos nomes dos pontos internos vai em geral cancelar com o 3! da série de Taylor da exponencial
- (2) cada um destes pontos internos tem 4 linhas saindo, e isso (inocentemente) nos dá um 4! para cada ponto interno, que cancela o 1/4! que está no Hamiltoniano de interação (de fato é por isso que definimos o Hamiltoniano com este 4!).

O ponto (2) acima não é totalmente verdade, **por conta das duplas contagens** e é isso que faz o cancelamento não ser exato e produz aquele "8" que sobrou no final. Isso quer dizer que simplesmente ignorando o 3! da série e os 4! do Hamiltoniano faremos uma sobrecontagem - que devemos dividir por um fator que dê conta das duplas contagens. Este fator que sobra é chamado de **Fator de Simetria** do diagrama e é nele que estamos interessados.

Como vemos este fator direto do diagrama? Baseado nos propagadores podemos desenhar:



E o fator de simetria vem de:



(pode ainda haver uma simetria por equivalência de dois pontos, mas esta não aparece neste diagrama)

$S = 2 \times 2 \times 2 = 8$

Fator de Simetria

Voltando aos fatores da expressão 59.1:

$S = 8 \Rightarrow$

$$-\frac{i\lambda}{8} D_F(x-y) \int d^4z D_F(z-z) D_F(z-z)$$

$S = 2 \Rightarrow$

$$-\frac{i\lambda}{2} D_F(x-y) \int d^4z D_F(z-z) D_F(z-z)$$

e isto aqui? $\rightarrow e^{-i\int \mathcal{H}_I} = \frac{-i\lambda}{4!} \int \phi^4$

para cada ponto interno terei um fator deste

O fator que resta vem de estabelecer uma regra para o **vértice** da teoria:

$$\text{Vértice} \quad \left(\text{diagrama de 4 linhas} \right) \equiv -i\lambda \quad (\text{eq. 62.1})$$

(note que o vértice é este ponto de onde saem 4 linhas, as linhas em si tem regras próprias dadas por 58.1)

E como este vértice é um ponto "interno" do diagrama, ele também contribui com uma integral em z . Para cada vértice no diagrama vai entrar um fator $(-i\lambda)$ e farei uma integral. Com isso, temos um conjunto de regras **para esta teoria** (campo escalar real com interação ϕ^4) que nos permite transformar um diagrama qualquer e um expressão analítica:

- (1) para cada propagador: $x_1 \text{---} x_2 = D_F(x_1 - x_2)$
- (2) para cada vértice: $\text{diagrama de 4 linhas} = (-i\lambda) \int d^4z$
- (3) para cada ponto externo: $x_1 \text{---} = 1$ (isto é trivial aqui, mas não será assim na versão final das regras)
- (4) divida tudo pelo fator de simetria

Regras (provisórias) de Feynman de $\lambda\phi^4$ no espaço das posições (eq. 62.2)

Mais alguns exemplos:

$$\text{diagrama de 2 pontos com 1 loop} = \frac{(-i\lambda)^2}{3!} \int d^4z_1 \int d^4z_2 D_F(x_1 - z_1) D_F(x_2 - z_2) D_F(z_1 - z_2)$$

↳ 3! trocas de linhas

$$\text{diagrama de 2 pontos com 2 loops} = \frac{(-i\lambda)^3}{3! \cdot 2} \int d^4z_1 d^4z_2 d^4z_3 D_F(x_1 - z_1) D_F(x_2 - z_1) D_F(z_1 - z_2) D_F(z_1 - z_3) D_F^3(z_2 - z_3)$$

$S = 3! \cdot 2$

Notando finalmente que para calcular um dado elemento de matriz, temos que somar sobre todos os diagramas possíveis até um certa ordem perturbativa:

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 - i\epsilon)} \frac{1}{N} \left\{ \underbrace{\text{diagrama de 2 pontos}}_{\mathcal{O}(\lambda^0)} + \underbrace{\text{diagrama de 2 pontos com 1 loop}}_{\mathcal{O}(\lambda)} + \underbrace{\text{diagrama de 2 pontos com 2 loops}}_{\mathcal{O}(\lambda^2)} + \dots \right\}$$

Veremos que em geral estamos interessados em calcular estes elementos no espaço dos momentos, não da posição, então é bem útil escrever as regras de Feynman também para os momentos. Note que:

eq. 46.1 $\Rightarrow D_F(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \underbrace{\frac{-i}{p^2 + m^2 - i\epsilon}}_{D_F(p)} e^{i p \cdot (y-x)}$

note que podia ser (x-y) pois o sinal de p é arbitrário, a escolha é feita por consistência com as linhas externas (veja no fim da pg 64)

Note que:

$\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \} | 0 \rangle = \theta(z_3 > z_1 > z_2) \langle 0 | \phi_3 \phi_4 \phi_1 \phi_2 | 0 \rangle + \dots$

outros ordenamentos temp.

$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} a_{\vec{p}_3}^\dagger e^{-i p_3 x_3}$

De forma que cada elemento no espaço das posições contém uma infinidade de possibilidades no espaço dos momentos

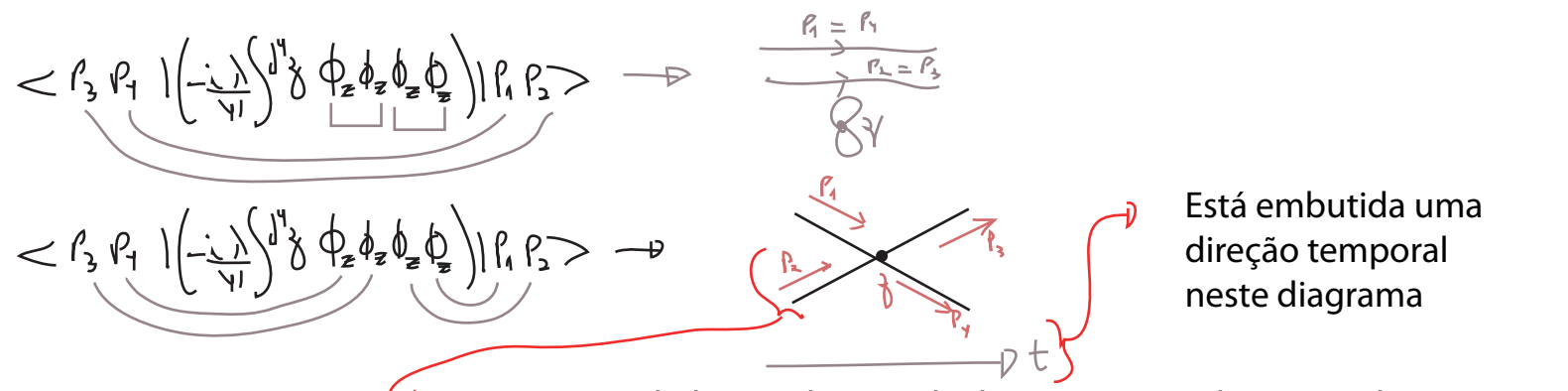
$\langle 0 | \phi_3 \phi_4 \phi_1 \phi_2 | 0 \rangle \sim \int d^4 p_1 \int d^4 p_2 \int d^4 p_3 \int d^4 p_4 \langle p_3 p_4 | p_1 p_2 \rangle$

queremos regras para estes (com escolha específica de $p_1 \dots p_4$)

No caso de uma inserção da interação temos:

$\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \left(\frac{-i\lambda}{4!} \int d^4 z \phi_z \phi_z \phi_z \phi_z \right) \} | 0 \rangle \sim \dots + \int \langle p_3 p_4 | \left(\frac{-i\lambda}{4!} \int d^4 z \phi_z \phi_z \phi_z \phi_z \right) | p_1 p_2 \rangle$

de novo há várias possibilidades do que pode ocorrer:



Note que esta linha até de z, vinda de um ponto indeterminado, porque passamos da representação em x_2 para uma em p_2 . Chamamos isto de **linha externa**.

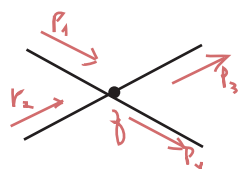
$\phi^+ \phi^+ \phi^+ \phi^- = 0$
 assim todos com número diferente de criações e aniquilações

Suponha que estejamos interessados em:

eq. 55.2 $\langle p_3 p_4 | (\phi_z^+ + \phi_z^-) (\phi_z^+ + \phi_z^-) (\phi_z^+ + \phi_z^-) (\phi_z^+ + \phi_z^-) | p_1 p_2 \rangle$

4! formas de fazer isto

aniqu. / cria



$$\begin{aligned} \phi_z^+ |P_1\rangle &= \int \frac{d^3 P_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{P_2}}} \underbrace{a_{P_2} e^{+iP_2 z}}_{\text{comut.}} \sqrt{2E_{P_1}} a_{P_1}^+ |0\rangle = \\ &= \int \frac{d^3 P_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{P_2}}} e^{+iP_2 z} \sqrt{2E_{P_1}} (2\pi)^3 \delta(P_2 - P_1) |0\rangle = \underbrace{e^{+iP_1 z}}_{\sim e^{-1E_{P_1}(z^0 - z_1^0)}} |0\rangle \end{aligned} \quad (\text{eq. 64.1})$$

Da mesma forma:

$$\langle P_3 | \phi_z = \langle 0 | e^{-iP_3 z} \quad (\text{eq. 64.2})$$

(partícula indo para um tempo posterior a z^0)
(partícula vinda de um tempo anterior a z^0)

O que nos mostra que cada linha externa contribuirá com:



Ainda resta a integral em z:

$$= \frac{(-i\lambda)}{4!} \int d^4 z e^{+ip_1 z} e^{+ip_2 z} e^{-ip_3 z} e^{-ip_4 z} =$$

4! formas de fazer isto

$$= \frac{(-i\lambda)}{4!} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)$$

contribuição do vértice (a integração na posição do vértice garantiu conservação de momento no mesmo)

No caso de um diagrama mais complicado:

$$= \langle P_3 P_4 | \underbrace{\left(\frac{-i\lambda}{4!} \int d^4 z_2 \phi_{z_2} \phi_{z_2} \phi_{z_2} \phi_{z_2} \right)}_{4.3} \underbrace{\left(\frac{-i\lambda}{4!} \int d^4 z_1 \phi_{z_1} \phi_{z_1} \phi_{z_1} \phi_{z_1} \right)}_2 | P_1 P_2 \rangle =$$

escolho o sinal de k para manter a direção de momento igual a das linhas externas: $Exp[ik_1 z_2]$ para momento entrando em z_2 e $Exp[-ik_1 z_1]$ para momento saindo de z_1 .

$$= \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int d^4 z_1 d^4 z_2 \int \frac{d^4 k_1 d^4 k_2}{(2\pi)^8} D_F(k_1) D_F(k_2) e^{i k_1^0 (\delta_1 - \delta_2)} e^{i k_2^0 (\delta_2 - \delta_1)} e^{+i P_1 z_1} e^{+i P_2 z_1} e^{-i P_3 z_2} e^{-i P_4 z_2}$$

fator de simetria propagadores linhas externas

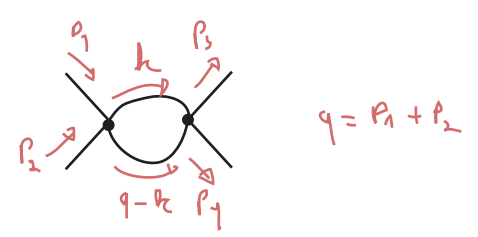
$$= \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \underbrace{d^4 k_1}_{k_1 = k} d^4 k_2 \underbrace{\delta^4(+P_1 + P_2 - k_1 - k_2)}_{P_1 + P_2 = q} \delta^4(+k_1 + k_2 - P_3 - P_4) D_F(k_1) D_F(k_2)$$

$\delta^4(-k_2 + (q - k))$

$$= \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int d^4k \delta^4(+k + (q-k) - p_3 - p_4) D_F(k) D_F(q-k) =$$

$$= \frac{(-i\lambda)^2 (2\pi)^4}{2} \delta^4(-p_3 - p_4 + p_1 + p_2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_F(k) D_F(p_1 + p_2 - k)$$

↳ mais tarde ficará claro porque queremos isto em evidência



Podemos então escrever as regras para obter diretamente a expressão no espaço dos momentos:

- (1) para cada propagador de momento p: $= D_F(p) = \frac{-i}{p^2 + m^2 - i\epsilon}$
- (2) para cada vértice: $= -i\lambda$
- (3) para linha externa: $= 1$
- (4) imponha conservação de momento em cada vértice (re-escrevendo os momentos internos)
- (5) integre sobre cada momento não determinado: $\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$
- (6) divida pelo fator de simetria
- (7) multiplique por: $(2\pi)^4 \delta^4(\sum P_\alpha)$ ↗ momentos externos

Regras (provisórias) de Feynman de $\lambda\phi^4$ no espaço dos momentos (eq. 65.1)

Mais alguns exemplos:

$$= (2\pi)^4 \delta(p_1 - p_2) \frac{(-i\lambda)}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_F(k)$$

$$= (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_F(k) D_F(q-k)$$

$q = p_1 - p_3$

Conservação nos vértices: $\left. \begin{aligned} p_1 &= p_3 + k_2 + k \\ p_2 + k_2 + k_1 &= p_1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} p_1 - p_3 &= q = p_1 - p_3 = k_2 + k \\ k_2 &= q - k \end{aligned}$

Com isso temos um conjunto de regras completo para calcular estes produtos temporalmente ordenados, mas cabem alguns comentários para amarrar as pontas soltas. Primeiramente note que, na eq. 55.1, estamos dizendo que todos estes correlatores serão calculados para:

$$T \rightarrow \infty (1 - i\epsilon)$$