

Quantização do Campo Escalar por Path Integrals

(Nastase 9, Peskin 9.2, Ryder 6.1 a 6.5, Ramond 3.1 e 3.2)

Usaremos as idéias das últimas 20 página para quantizar o campo escalar usando integrais de trajetória. Resumindo, o caminho mais curto e seguro que encontramos para quantizar o oscilador harmônico forçado foi:

- (1) Escrever uma função de partição do sistema como uma integral de trajetória, sobre um caminho fechado, no espaço Euclidiano (esta integral é bem definida e não tem bordas para criar problemas)
- (2) Para projetar sobre os estados do vácuo, tomamos $\beta \rightarrow 0$ (período infinito na integral de traj.)
- (3) Rodamos o resultado para o espaço físico (de Minkowski), tomando cuidado de não tocar os polos (o que nos leva invariavelmente a um propagador de Feynman)

Para passar para uma teoria de campos, faremos a substituição:

$$q_\mu(t) \rightarrow \phi_{\vec{x}}(t) \equiv \phi(\vec{x}, t) \equiv \phi(x)$$

↑ tem uma discretização do espaço aqui

A ação do campo escalar, no espaço de Minkowski, é:

$$i S[\phi] = i \int d^4x \left[-\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - V(\phi) \right]$$

e as funções de n pontos:

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | T \{ \hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_n) \} | 0 \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{i S[\phi]} \phi(x_1) \dots \phi(x_n)$$

e estas podem ser obtidas a partir de integrais de trajetória sobre trajetórias periódicas de período infinito, usando a seguinte ação Euclidiana:

$$-S_E[\phi] = - \int d^4x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\mu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + V(\phi) \right] \quad (\text{eq. 91.1})$$

(todos os índices "E" foram suprimidos)

EUCLID: $a_\mu b_\mu = a_\mu b^\mu = a_\mu b_\nu \delta^{\mu\nu}$

$t = x^0 = -x_0 \equiv -i t_E$

$t_E \equiv x^1 \equiv x_1$ $x^1 = i x^0$

$$\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi = - \frac{\partial \phi}{\partial x^0} \frac{\partial \phi}{\partial x^0} + \partial_i \phi \partial_i \phi =$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial x^1} \frac{\partial \phi}{\partial x^1} + \partial_i \phi \partial_i \phi = \partial_\mu^E \phi \partial_\mu^E \phi$$

As funções de Green Euclidianas são:

$$G_n^{(E)}(x_1, \dots, x_n) = \int \mathcal{D}\phi \ e^{-S_E[\phi]} \phi(x_1) \dots \phi(x_n)$$

Podemos escrever o funcional gerador / função de partição para um período β :

$$Z[\beta, J] = \text{Tr} \left\{ e^{-\beta \hat{H}_3} \right\} = \int \mathcal{D}\phi \ e^{-S_E[\phi] + J\phi}$$

$\phi(\vec{x}, t_E + \beta) = \phi(\vec{x}, t_E)$

$J\phi = \int d^d x \ J(x)\phi(x)$

$\beta \rightarrow \infty$

$$\hookrightarrow Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \ e^{-S_E[\phi] + J\phi} \equiv \langle 0|0 \rangle_J \quad (\text{eq. 92.1})$$

estamos generalizando o raciocínio a seguir para um número arbitrário de dimensões

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{\int \mathcal{D}\phi \ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{-S_E[\phi] + J\phi}}{\int \mathcal{D}\phi \ e^{-S_E[\phi] + J\phi}} \Bigg|_{J=0} \quad (\text{eq. 92.2})$$

e (por definição):

$$Z[J] = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \int \prod_{i=1}^n d^d x_i \ G_n(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \dots J(x_n) \quad (\text{eq. 92.3})$$

Teoria de Perturbação

Vamos assumir agora que este campo tem uma interação tratável em teoria de perturbação, e fazer a divisão usual:

$$S[\phi] = S_0[\phi] + S_I[\phi]$$

A funções de Green no espaço dos momentos são:

$$\tilde{G}_n(p_1, \dots, p_n) = \int d^d x_1 \dots d^d x_n \ e^{i(p_1 x_1 + \dots + p_n x_n)} G_n(x_1, \dots, x_n)$$

Qualquer teoria que seja invariante por translações (ou seja, que conserve momento e energia):

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = G_n(x_1 - X, x_2 - X, \dots, x_n - X)$$

escolhendo: $X = x_1$ e mudando as integrais: $x_i \rightarrow x_i + X \quad i \geq 2$

$$\tilde{G}_n(p_1, \dots, p_n) = \left[\int d^d x_1 \ e^{i x_1 (p_1 + \dots + p_n)} \right] \left[\int d^d x_2 \dots d^d x_n \ e^{i(x_2 p_2 + \dots + x_n p_n)} G_n(0, x_2, \dots, x_n) \right]$$

$$= (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \dots + p_n) G_n(p_1, \dots, p_n)$$

tendo em mente que a dependência de p_1 entra por meio da soma dos outros momentos

nestas funções a conservação de momento já está garantida

Um resultado importante, chamado de fórmula de Dyson, pode ser obtido começando com o VEV (valor esperado no vácuo) de operadores **quaisquer** no vácuo da teoria livre:

$$\langle 0 | \hat{O}[\{\hat{\phi}\}] | 0 \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_0[\phi]} \mathcal{O}[\{\phi\}]$$

vácuo da teoria livre

deste lado a informação vácuo está no fato de tomarmos configurações periódicas $\phi(\vec{x}, t_E + \beta) = \phi(\vec{x}, t_E)$ com β infinito e sabemos que é o vácuo da teoria livre pois usamos S_0 na função de partição

Suponha que: $\hat{O} = e^{-S_I[\phi]}$

temos então:

$$\langle 0 | e^{-S_I[\phi]} | 0 \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_0[\phi] - S_I[\phi]} \quad (\text{eq. 93.1})$$

e se: $\hat{O} = \hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_n) e^{-S_I[\phi]}$

$$\langle 0 | \hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_n) e^{-S_I[\phi]} | 0 \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_0[\phi] - S_I[\phi]} \phi(x_1) \dots \phi(x_n) = G_n(x_1, \dots, x_n)$$

(lembre que quando rodarmos de volta para o espaço de Minkowski vamos obter o ordenamento temporal)

(eq. 93.2)

finalmente, se: $\hat{O} = e^{-S_I[\phi]} e^{\int d^4x \mathcal{J}(x) \phi(x)}$

$$\langle 0 | e^{-S_I[\phi]} e^{\int d^4x \mathcal{J}(x) \phi(x)} | 0 \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_0[\phi] - S_I[\phi] + \mathcal{J} \cdot \phi} = Z[\mathcal{J}]$$

Fórmula de Dyson

(eq. 93.3)

Solução da Teoria Livre

Para $S_I[\phi] = 0$

$$\begin{aligned} Z_0[\mathcal{J}] &= \int \mathcal{D}\phi e^{-S_0[\mathcal{J}] + \mathcal{J} \cdot \phi} = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x [\partial_\mu \phi \partial_\mu \phi + m^2 \phi^2] + \mathcal{J} \cdot \phi \right\} \\ &= \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x \phi \underbrace{[-\partial_\mu \partial_\mu + m^2]}_{\Delta^{-1}} \phi + \mathcal{J} \cdot \phi \right\} \end{aligned}$$

Note que:

$$-\frac{1}{i} (\phi - \mathcal{J} \cdot \Delta) \cdot \Delta^{-1} \cdot (\phi - \Delta \cdot \mathcal{J}) = -\frac{1}{2} \phi \Delta^{-1} \phi + \underbrace{\frac{1}{2} \phi \cdot \mathcal{J} + \frac{1}{2} \mathcal{J} \cdot \phi}_{\mathcal{J} \cdot \phi} - \underbrace{\frac{1}{2} \mathcal{J} \cdot \Delta \cdot \mathcal{J}}_{\text{sobrando}}$$

Logo:

$$Z_0[\mathcal{J}] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -\frac{1}{i} (\phi - \mathcal{J} \cdot \Delta) \cdot \Delta^{-1} \cdot (\phi - \Delta \cdot \mathcal{J}) + \frac{1}{2} \mathcal{J} \cdot \Delta \cdot \mathcal{J} \right\} =$$

$$\underbrace{\int \mathcal{D}\phi'}_{\phi' \quad (\mathcal{D}\phi' = \mathcal{D}\phi)}$$

$$= e^{\frac{1}{2} \mathcal{J} \Delta \mathcal{J}} \int \mathcal{D}\phi' \underbrace{e^{-\frac{1}{2} \phi' \Delta^{-1} \phi'}}_{\langle 0|0 \rangle_0} \quad (\text{eq. 92.1})$$

$$Z_0[\mathcal{J}] = e^{\frac{1}{2} \mathcal{J} \Delta \mathcal{J}} \langle 0|0 \rangle_0 \quad (\text{eq. 94.1}) \quad Z_0[0] = \langle 0|0 \rangle_0 = 1 \quad (\text{normalização})$$

O propagador é tal que: $\Delta^{-1} = -\partial_\mu \partial_\mu + m^2$

e portanto:
$$\Delta(x, y) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{e^{i p(x-y)}}{p^2 + m^2} \quad (\text{eq. 94.2})$$

que não tem polos. A rotação de volta para Minkowski, assim como no caso do oscilador forçado (pg 90) leva a polos ($|p| = \pm i m$), então a rotação feita em p^0 deve ser de $(\pi/2 - \epsilon)$ ao invés de $(\pi/2)$:

$$p_E^0 = e^{-i(\frac{\pi}{2} - \epsilon)} p^0 = -i(p^0 + i\epsilon)$$

$$p_E^2 + m^2 = (p_E^0)^2 + (\vec{p}^T)^2 + m^2 = -(p^0 + i\epsilon)^2 + (\vec{p}^T)^2 + m^2 = -\underbrace{(p^0)^2 + (\vec{p}^T)^2}_{p_\mu p^\mu} + m^2 - i\epsilon = p^2 + m^2 - i\epsilon$$

e obtemos (agora tudo no espaço de Minkowski):

$$\Delta(t_E = it, \vec{x}; y=0) = \Delta_F(t, \vec{x}) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{-i e^{i p x}}{p^2 + m^2 - i\epsilon} \quad (\text{eq. 94.3})$$

Teorema de Wick:

Vejamos que forma toma o teorema de Wick neste formalismo. Considere a função:

$$F[\psi\{\phi\}] = \phi^2(x_1) \phi(x_2) \phi^4(x_3)$$

$$\langle 0|F[\psi\{\phi\}]|0\rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_0[\phi]} \phi^2(x_1) \phi(x_2) \phi^4(x_3)$$

Note que: $\frac{\delta}{\delta J(x_1)} e^{J \cdot \phi} = e^{J \cdot \phi} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \left(\int d^4x J(x) \phi(x) \right) = e^{J \cdot \phi} \phi(x_1)$

$J \cdot \phi = \int d^4x J(x) \phi(x)$

$\frac{\delta J(x)}{\delta J(x_1)} = \delta^4(x - x_1)$

Logo:

$$\langle 0|F[\psi\{\phi\}]|0\rangle = \left(\frac{\delta}{\delta J(x_1)} \right)^2 \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \left(\frac{\delta}{\delta J(x_3)} \right)^4 \int \mathcal{D}\phi e^{-S_0[\phi] + J \cdot \phi} \Big|_{J=0}$$

$Z_0 \rightarrow$ teoria livre

Podemos, de fato, fazer o mesmo para uma função arbitrária (caso ela não seja um polinômio, podemos considerar que está definida por sua série de potências):

$$\langle 0|F[\psi\{\phi\}]|0\rangle_J = F\left[\left\{\frac{\delta}{\delta J}\right\}\right] Z_0[J] \quad (\text{eq. 95.1})$$

Voltando então na fórmula de Dyson (eq. 93.3), temos:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_0[\phi] - S_I[\phi] + J \cdot \phi} = \langle 0| e^{-\int d^4x V(\phi(x))} |0\rangle_J$$

$F[\phi]$

$$Z[J] = e^{-\int d^4x V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)} Z_0[J] = e^{-\int d^4x V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)} e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \quad (\text{eq. 95.2})$$

(compare com 55.1 - esta expressão gera correladores essencialmente iguais ao numerador do lado direito daquela equação)

interação **parte livre (Δ é o propagador da teoria livre)**

Não é muito óbvio, mas este é o teorema de Wick no formalismo de integrais de trajetória. De novo temos uma solução exata da teoria interagente (neste caso a função de partição), mas esta só é útil se pudermos expandir a exponencial da interação e truncar a expansão, ou seja, em teoria de perturbação.

Regras de Feynman

Para perceber que a equação 95.2 é de fato equivalente ao teorema de Wick, vamos calcular algumas funções de green usando-a. Definindo a notação:

$$G_n^{(p)}(x_1, \dots, x_n)$$

em ordem p da expansão perturbativa

função de n pontos

Podemos obter estas funções a partir do funcional gerador, também calculado até alguma ordem em teoria de perturbação:

$$\begin{aligned} Z[J] &= e^{-\int d^4x V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)} e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} = \\ &= \left[1 - \int d^4x V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) + \frac{1}{2!} \int d^4x V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) \int d^4y V\left(\frac{\delta}{\delta J(y)}\right) + \dots \right] e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} = \\ &\equiv Z_0[J] + Z_1[J] + Z_2[J] + \dots \end{aligned} \quad (\text{eq. 96.1})$$

$$G_n^{(p)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta J(x_n)} Z_p[J] \Big|_{J=0} \quad (\text{eq. 96.2})$$

O objeto mais simples que podemos calcular é:

$$\begin{aligned} G_1^{(0)}(x_1)_J &= \frac{\delta}{\delta J(x_1)} e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} = e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \left\{ \frac{1}{2} \int d^4x d^4x' J(x) \Delta(x, x') J(x') \right\} = \\ &= e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \frac{1}{2} \int d^4x d^4x' \left\{ \delta(x-x_1) \Delta(x, x') J(x') + \underbrace{J(x) \Delta(x, x') \delta(x'-x_1)}_{\vdots} \right\} = \\ &= e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \int d^4x \underbrace{\Delta(x_1, x) J(x)}_{(\Delta \cdot J)(x_1)} = \\ &= (\Delta \cdot J)(x_1) e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \end{aligned}$$

$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{+ip(x-x')}}{p^2+m^2} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-x')}}{p^2+m^2}$

que, para $J=0$, é nula: $G_1^{(0)}(x_1) = 0$ (eq. 96.3)

É fácil ver que todas as funções com um número ímpar de pontos são nulas, pois temos dois J 's em Z e fazendo um número ímpar de derivadas vai sobrar sempre um J multiplicando tudo, o que anula a função quando fazemos $J = 0$.

$$k = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow G_{2k+1}^{(0)}(x_1, \dots, x_{2k+1}) = 0 \quad (\text{eq. 97.1})$$

A função de 2 pontos fica:

$$\begin{aligned} G_2^{(0)}(x_1, x_2)_J &= \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \underbrace{\frac{\delta}{\delta J(x_2)} e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J}}_{G_1^{(0)}(x_2)_J} = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \left[(\Delta \cdot J)(x_2) e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \right] = \\ &= \frac{\delta}{\delta J(x_1)} (\Delta \cdot J)(x_2) = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \int d^d x \Delta(x, x_2) J(x) = \int d^d x \Delta(x, x_2) \delta(x - x_1) = \Delta(x_1, x_2) \\ &= \Delta(x_1, x_2) e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} + (\Delta \cdot J)(x_2) (\Delta \cdot J)(x_1) e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \end{aligned}$$

$$J = 0 \Rightarrow G_2^{(0)}(x_1, x_2) = \Delta(x_1, x_2) \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \\ x_1 \qquad x_2 \end{array}$$

A função de 3 pontos é zero, como já adiantamos, pois:

$$\begin{aligned} G_3^{(0)}(x_1, x_2, x_3)_J &= \frac{\delta}{\delta J(x_3)} G_2^{(0)}(x_1, x_2)_J = \left[\Delta(x_1, x_2) (\Delta \cdot J)(x_3) + \Delta(x_2, x_3) (\Delta \cdot J)(x_1) + \right. \\ &\quad \left. + (\Delta \cdot J)(x_2) \Delta(x_1, x_3) + (\Delta \cdot J)(x_2) (\Delta \cdot J)(x_1) (\Delta \cdot J)(x_3) \right] e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \quad (J=0) \end{aligned}$$

A próxima função não trivial é (exercício):

$$\begin{aligned} G_4^{(0)}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta J(x_4)} e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \Bigg|_{J=0} = \\ &= \Delta(x_1, x_2) \Delta(x_3, x_4) + \Delta(x_1, x_3) \Delta(x_2, x_4) + \Delta(x_1, x_4) \Delta(x_2, x_3) \end{aligned} \quad (\text{eq. 97.2})$$

Que, em diagramas, é exatamente o mesmo que obtivemos na pg 58:

