

de onde fica claro que a lógica por trás do Teorema de Wick (conectar os pontos externos de todas as formas possíveis) aqui é implementada pela regra do produto da derivada.

Passemos para o caso com interação, considerando agora a teoria $\lambda\phi^3$:

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{3!} \phi^3 \quad (\text{note que só queremos ver como saem as regras de Feynman, esta teoria é problemática pois o potencial não tem mínimo global, e energias infinitamente negativas são permitidas})$$

Em ordem λ , temos:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_1[J] &= - \int d^d x V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} = - \int d^d x \frac{\lambda}{3!} \left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^3 e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} = \\ &= - \frac{\lambda}{3!} \int d^d x \left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^2 \left[(\Delta \cdot J)(x) e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \right] = - \frac{\lambda}{3!} \int d^d x \left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) \left[\Delta(x, x) + (\Delta \cdot J)^2(x) \right] e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} = \\ &= - \frac{\lambda}{3!} \int d^d x \left[\Delta(x, x) (\Delta \cdot J)(x) + \Delta(x, x) (\Delta \cdot J)(x) + (\Delta \cdot J)(x) \Delta(x, x) + (\Delta \cdot J)^3(x) \right] e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} = \\ &= - \frac{\lambda}{3!} \int d^d x \left[3 \Delta(x, x) (\Delta \cdot J)(x) + (\Delta \cdot J)^3(x) \right] e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \quad (\text{eq. 98.1}) \end{aligned}$$

Note que este funcional gerador agora tem sempre potências ímpares de J , de forma que as funções de n pontos serão nulas para n par:

$$G_{2k}^{(1)}(x_1, \dots, x_{2k}) = 0 \quad (\text{eq. 98.2})$$

A função de 1 ponto é dada por:

$$\begin{aligned} G_1^{(1)}(x_1) &= \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \mathbb{Z}_1[J] \Big|_{J=0} = - \frac{\lambda}{3!} \int d^d x \left[3 \Delta(x, x) \Delta(x, x_1) + 3 \Delta(x, x) (\Delta \cdot J)(x) (\Delta \cdot J)(x_1) + \right. \\ &\quad \left. + 3 \Delta(x, x_1) (\Delta \cdot J)(x) + (\Delta \cdot J)^3(x) (\Delta \cdot J)(x_1) \right] e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \Big|_{J=0} = \\ &= - \frac{\lambda}{2} \int d^d x \Delta(x, x) \Delta(x, x_1) \end{aligned}$$

cujo diagrama é:

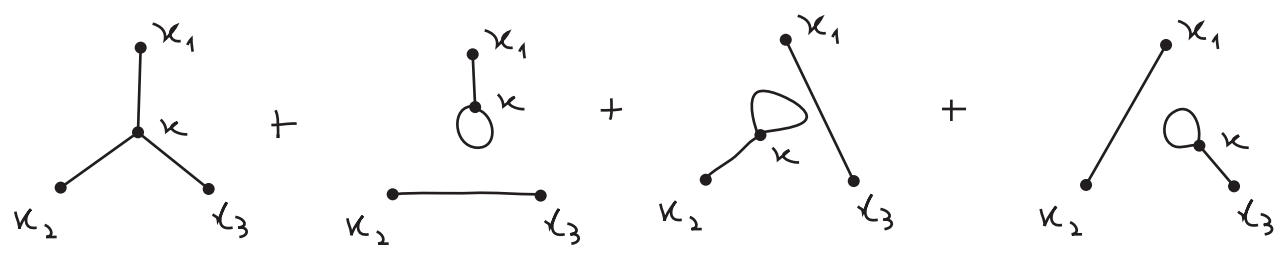


A função de 2 pontos dá zero (cheque!) e a função de 3 pontos é:

$$G_3^{(1)}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \frac{\delta}{\delta J(x_3)} Z_1[J] \Big|_{J=0} =$$

$$= -\lambda \int d^d x \left\{ \Delta(x, x_1) \Delta(x, x_2) \Delta(x, x_3) + \frac{1}{2} \Delta(x, x) [\Delta(x, x_1) \Delta(x, x_3) + \Delta(x, x_2) \Delta(x, x_3) + \Delta(x, x_3) \Delta(x, x_2)] \right\}$$

que em diagramas fica:



Podemos obter as bolhas no vácuo calculando diretamente a função de 0 pontos, dada pelo próprio funcional gerador (pois fazemos zero derivadas), que em segunda ordem de perturbação é:

$$Z_2[J] = + \frac{1}{2!} \int d^d x \frac{\lambda}{3!} \left(\frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^3 \int d^d y \frac{\lambda}{3!} \left(\frac{\delta}{\delta J(y)} \right)^3 e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J}$$

ao invés de fazer a regra da cadeia, posso pensar esta exponencial em termos de sua expansão. Como temos 6 derivadas em J e no fim faremos J=0, somente o termo com 6 J's vai sobreviver

$$Z_2[J=0] = \frac{1}{2!} \int d^d x \frac{\lambda}{3!} \left(\frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^3 \int d^d y \frac{\lambda}{3!} \left(\frac{\delta}{\delta J(y)} \right)^3 \left\{ \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{2} \right)^3 \int d^3 z_1 d^3 z_2 d^3 z_3 d^3 z'_1 d^3 z'_2 d^3 z'_3 \times \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^3 \int d^3 z_1 d^3 z_2 d^3 z_3 d^3 z'_1 d^3 z'_2 d^3 z'_3 \times \right\} \Big|_{J=0}$$

exercício

$$Z_2[J=0] = \frac{\lambda^2}{2^3} \int d^d x d^d y \Delta(x, x) \Delta(x, y) \Delta(y, y) + \frac{\lambda^2}{2 \cdot 3!} \int d^d x d^d y \Delta^3(x, y)$$

em termos de diagramas (note que os fatores de simetria também já saíram certos):



Regras de Feynman no espaço das posições

Primeiramente vamos re-escrever o teorema de Wick em um formato mais útil para obter as regras de Feynman:

$$Z[J] = e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi_a} \cdot \Delta \cdot \frac{\delta}{\delta \phi_a}} \left\{ e^{-\int d^4x V(\phi_a) + J \cdot \phi_a} \right\} \Big|_{\phi=0} = \text{EXP} \left[\frac{1}{2} \int d^4x d^4y \Delta(x-y) \frac{\delta}{\delta \phi_a(x)} \frac{\delta}{\delta \phi_a(y)} \right] \left\{ e^{-\int d^4x V(\phi_a) + J \cdot \phi_a} \right\} \Big|_{\phi=0} \quad (\text{eq. 100.1})$$

eq. 95.2 → $Z[J] = e^{-\int d^4x V(\frac{\delta}{\delta J(x)})} \left\{ e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \right\}$

não ficaremos carregando esta notação, mas perceba que este campo que fazemos ir a zero é o campo clássico, e:
 $J \rightarrow 0 \Leftrightarrow \phi_{cl} = 0$
 (não provamos isso para o campo, mas é análogo às pgs. 74 e 75)

\\ Demonstração //

Essencialmente queremos provar que, dadas duas funções de múltiplas variáveis (mesmo número para ambas):

$$F(x) = F(x_1, \dots, x_n) \quad G(y) = G(y_1, \dots, y_n)$$

$$\Rightarrow F\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) G(x) = G\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \left[F(y) e^{x \cdot y} \right]_{y=0} \quad (\text{Lemma de Coleman}) \quad (\text{eq. 100.2})$$

PROVA: podemos considerar a série de Fourier de F e G e aí basta provar o Lemma acima para

$$F(x) = e^{a \cdot x} \quad G(y) = e^{b \cdot y} \quad \left(a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots \right)^m e^{b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + \dots} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} e^{b \cdot x} &= b_i e^{b \cdot x} \\ \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)^n e^{b \cdot x} &= (b_i)^n e^{b \cdot x} \end{aligned} \right.$$

$$F\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) G(x) = e^{a \cdot \frac{\partial}{\partial x}} e^{b \cdot x} = \sum_m \frac{1}{m!} \left(a \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right)^m e^{b \cdot x} = \sum_m \frac{1}{m!} (a \cdot b)^m e^{b \cdot x} = e^{b \cdot (a+x)} = e^{a \cdot b} \quad \checkmark \text{OK!}$$

$$G\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \left[F(y) e^{x \cdot y} \right]_{y=0} = e^{b \cdot \frac{\partial}{\partial y}} \left[e^{a \cdot y} e^{x \cdot y} \right]_{y=0} = e^{b \cdot (a+x)} \left[e^{a \cdot y} e^{x \cdot y} \right]_{y=0} = e^{b \cdot (a+x)}$$

$\underbrace{x = \{x_1, \dots, x_n\}}_{\text{vetor}} \rightarrow \underbrace{J(x)}_{\text{vetor}}$
 $y = \{y_1, \dots, y_n\} \rightarrow \phi(x)$

estamos generalizando de um conjunto discreto de variáveis para um contínuo

$$\hookrightarrow \boxed{F\left[\frac{\delta}{\delta J}\right] G[J] = G\left[\frac{\delta}{\delta \phi}\right] \left[F[\phi] e^{J \cdot \phi} \right]_{\phi=0}} \quad (\text{eq. 101.1})$$

Logo, partindo do teorema de Wick na forma anterior:

$$Z[J] = \underbrace{e^{-\int d^4x V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)}}_{F\left[\frac{\delta}{\delta J}\right]} \underbrace{\left\{ e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \right\}}_{G[J]} = \underbrace{e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi} \cdot \Delta \cdot \frac{\delta}{\delta \phi}}}_{G\left[\frac{\delta}{\delta \phi}\right]} \underbrace{\left\{ e^{-\int d^4x V(\phi)} e^{J \cdot \phi} \right\}}_{\left[F[\phi] e^{J \cdot \phi} \right]_{\phi=0}} \Big|_{\phi=0}$$

que é a eq. 100.1


 aqui termina a Lecture 10 do Nastase
 (nas pg. 89 e 90 ele mostra um outro jeito de obter (graficamente) o fator de simetria dos diagramas, que é equivalente ao que mostramos no contexto do formalismo canônico - recomendável para quem ainda não entendeu o fator de simetria)

Podemos então obter as regras de Feynman para um potencial mais geral:

$$V(\phi) = \lambda \phi^p$$

$$\begin{aligned}
 G_n(x_1, \dots, x_n) &= \left. \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \right|_{J=0} = \\
 &= \left. \frac{\delta^n}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \left\{ e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi} \cdot \Delta \cdot \frac{\delta}{\delta \phi}} \left[e^{-\int d^4x V(\phi) + J \cdot \phi} \right]_{\phi=0} \right\} \right|_{J=0} = \\
 &= e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi} \cdot \Delta \cdot \frac{\delta}{\delta \phi}} \left\{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{-\int d^4x V(\phi) + J \cdot \phi} \right\}_{\phi=0, J=0}
 \end{aligned}$$

este termo já se tornou obsoleto, pois depois das derivadas em ϕ , qualquer termo que sobrar com J multiplicado vai ser nulo (quando $J=0$)

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi} \cdot \Delta \cdot \frac{\delta}{\delta \phi}} \left\{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{-\int d^d x V(\phi)} \right\}_{\phi=0} \quad (\text{eq. 102.1})$$

Em ordem N de perturbação:

$$G_n^{(N)}(x_1, \dots, x_n) = e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi} \cdot \Delta \cdot \frac{\delta}{\delta \phi}} \left\{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \frac{(-\lambda)^N}{N!} \int d^d y_1 \dots d^d y_N \phi^P(y_1) \dots \phi^P(y_N) \right\}_{\phi=0}$$

estas derivadas vão agir sobre um produto de Q campos ϕ , onde:

$$Q = n + pN$$

Se aplicarmos mais do que Q derivadas a função se anula e se aplicamos mais do que Q derivadas também (pois nesse caso sobram ϕ 's que serão levados a zero). Assim, da expansão da exponencial contendo Q derivadas temos (e note Q deve ser obrigatoriamente par pois temos duas derivadas na exponencial):

$$(Q = 2q = n + pN)$$

$$G_n^{(N)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{q! 2^q} \int d^d z_1 d^d w_1 \dots d^d z_q d^d w_q \frac{\delta}{\delta \phi(z_1)} \Delta(z_1 - w_1) \frac{\delta}{\delta \phi(w_1)} \dots \frac{\delta}{\delta \phi(z_q)} \Delta(z_q - w_q) \frac{\delta}{\delta \phi(w_q)} \times \left\{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \frac{(-\lambda)^N}{N!} \int d^d y_1 \dots d^d y_N \phi^P(y_1) \dots \phi^P(y_N) \right\}_{\phi=0}$$

(eq. 102.2)

Temos que agir com estas derivadas sobre todos os campos. Note que, quando aplicamos o par

$$\int d^d z_i d^d w_i \frac{\delta}{\delta \phi(z_i)} \Delta(z_i - w_i) \frac{\delta}{\delta \phi(w_i)}$$

sobre um par qualquer: $\phi(x) \phi(y)$

$$\text{obtemos: } \int d^d z_i d^d w_i \left[\delta^d(x - z_i) \delta^d(y - w_i) \Delta(z_i - w_i) + \delta^d(y - z_i) \delta^d(x - w_i) \Delta(z_i - w_i) \right] = 2 \Delta(x - y)$$

como temos q fatores de 2 deste tipo, o 2^q em 102.2 é cancelado

O q! é cancelado pelo fato de termos q! formas de agir as 2q derivadas nos 2q campos (e pelo fato das coordenadas nas derivadas serem variáveis mudas de integração). Notem que novamente o que está acontecendo é que estamos conectando pontos externos e vértices de todas as formas possíveis.

Mesmo depois de levar em conta as repetições que cancelam $q! 2^q$ ainda sobram muitos termos iguais: o fato de ainda termos N variáveis de integração mudas cancela o $N!$ advindo da expansão da exponencial com a interação e o fato de cada termo de interação conter p campos calculados no mesmo ponto introduz um $(p!)^N$ que cancelamos redefinindo:

$$\lambda = \frac{\lambda_p}{p!}$$

Sabemos (do formalismo canônico), que o cancelamento deste $N!(p!)^N$ não é exato, dependendo de detalhes das contrações escolhidas. Assim como antes definimos um fator de simetria:

$$S = \frac{N! (p!)^N}{(\# \text{ de diagramas equivalentes})}$$

Este fator pode ser maior que 1 se tivermos menos diagramas equivalentes do que inocentemente se esperaria. Para ver como isto aparece aqui, considere o caso $n = 0, p = 2, N = 2 (Q = 4, q = 2)$:

$$A = \frac{1}{2!2^2} \int d^4z_i d^4w_i d^4z_j d^4w_j d^4x d^4y \frac{\delta}{\delta\phi(z_i)} \Delta(z_i - w_i) \frac{\delta}{\delta\phi(w_i)} \frac{\delta}{\delta\phi(z_j)} \Delta(z_j - w_j) \frac{\delta}{\delta\phi(w_j)} \phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)$$

↪ (não confundir o cancelamento destes com o de $N!$ e $p!^N$)

de onde podemos extrair todos os termos que contribuem para:



Inocentemente teríamos $2!$ advindo das integrais em x e y e $(2!)^2$ advindo do fato de termos dois campos em x e dois em y , para um total de 8 termos iguais. Mas veja:

$$A = \frac{1}{8} \int d^4z_i d^4w_i d^4z_j d^4w_j d^4x d^4y \Delta(z_i - w_i) \Delta(z_j - w_j) \frac{\delta}{\delta\phi(z_i)} \frac{\delta}{\delta\phi(w_i)} \frac{\delta}{\delta\phi(z_j)} \times$$

$$\left\{ 2 \delta(x - w_j) \phi(x) \phi(y) \phi(y) + 2 \delta(y - w_j) \phi(x) \phi(x) \phi(y) \right\} =$$

ignoro os termos em que $\frac{\delta}{\delta\phi(z_j)}$ age em no mesmo campo em que agiu $\frac{\delta}{\delta\phi(w_j)}$ pois estes contribuem

para $\left(\begin{matrix} \circ & \circ \\ x & y \end{matrix} \right)$

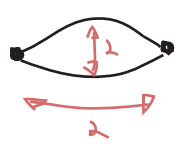
$$= \frac{1}{2} \int \dots \Delta \Delta \cdot \frac{\delta}{\delta\phi(z_i)} \frac{\delta}{\delta\phi(w_i)} \left\{ 2 \delta(x - w_j) \delta(z_j - y) \phi(x) \phi(y) + 2 \delta(y - w_j) \delta(z_j - x) \phi(x) \phi(y) \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \dots \Delta \Delta \cdot \frac{\delta}{\delta\phi(z_i)} \times$$

$$\times \left\{ \delta(x - w_j) \delta(z_j - y) \left[\delta(x - w_i) \phi(y) + \delta(y - w_i) \phi(x) \right] + \delta(y - w_j) \delta(z_j - x) \left[\delta(w_i - x) \phi(y) + \delta(w_i - y) \phi(x) \right] \right\} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int \dots \int \Delta \Delta \left\{ \delta(x-w_j) \delta(y_j-y) \delta(x-w_i) \delta(y-z_i) + \delta(x-w_j) \delta(y_j-y) \delta(y-w_i) \delta(x-z_i) + \right. \\
 &\quad \left. + \delta(y-w_j) \delta(y_j-x) \delta(w_i-x) \delta(y-z_i) + \delta(y-w_j) \delta(y_j-x) \delta(w_i-y) \delta(z_i-x) \right\} = \\
 &= \frac{1}{2} \int d^d x d^d y \ 4 \Delta^2(x-y) = 2 \int d^d x d^d y \ \Delta^2(x-y)
 \end{aligned}$$

O que é 4 vezes menos termos iguais do que esperávamos. O fator de simetria aqui é 4. De fato:



(mais uma vez há uma outra forma de olhar diagramas para obter o fator de simetria na pg 94 do Nastase)

Vemos que estamos obtendo as mesmas regras do formalismo canônico (só que no espaço Euclideano):

- (1) para cada propagador: $x_1 \text{ --- } x_2 = \Delta(x_1 - x_2)$
- (2) para cada vértice: $\begin{matrix} \text{p linhas} \\ \nearrow \\ \bullet \\ \searrow \\ j \end{matrix} = (-i\lambda_p) \int d^d \gamma$
- (3) para cada ponto externo: $x_1 \text{ --- } = 1$
- (4) divida tudo pelo fator de simetria

(eq. 104.1)

Regras de Feynman no espaço dos momentos

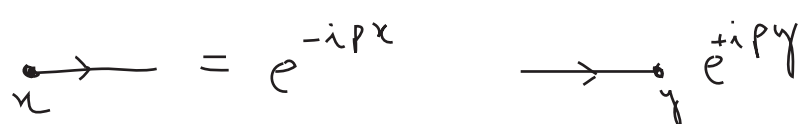
Conforme visto na pg 93:

$$\tilde{G}(p_1, \dots, p_n) = (2\pi)^d \delta^d(p_1 + \dots + p_n) \underbrace{G(p_1, \dots, p_n)}_{\text{satisfazem conserv. de momento}}$$

O propagador Euclideano é (eq. 94.2):

$$\Delta(y-x) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{e^{ip(y-x)}}{p^2 + m^2} \quad \therefore \quad \boxed{\Delta(p) = \frac{1}{p^2 + m^2}} \quad (\text{eq. 104.2})$$

E adotamos novamente a convenção para direção de momento:



Como derivamos as regras no espaço dos momentos a partir das regras no espaço das posições, e já mostramos que estas são as mesmas obtidas na quantização canônica, não há novidade alguma aqui. Uma discussão mais cuidadosa da linhas externas (que no formalismo presente não são escritas como operadores de criação agindo no vácuo) será feita quando definirmos a matriz S e os observáveis da teoria. Só para deixar claro o que falta discutir em relação às pernas externas, observe o seguinte diagrama

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \times_1 \end{array} \text{---} \begin{array}{c} \bullet \\ \delta_1 \end{array} \text{---} \begin{array}{c} \bullet \\ \delta_2 \end{array} \text{---} \begin{array}{c} \bullet \\ \times_2 \end{array} = \frac{\lambda^2}{3!} \int d^4 z_1 d^4 z_2 \Delta(z_1 - x_1) \Delta(x_2 - z_2) \Delta^3(z_2 - z_1) = G(x_1, x_2)$$

Tomemos a sua transformada de Fourier:

$$\begin{aligned}
 \tilde{G}(p_1, p_2) &= \int d^4 x_1 d^4 x_2 e^{i p_1 x_1} e^{i p_2 x_2} \frac{\lambda^2}{3!} \int d^4 z_1 d^4 z_2 \Delta(z_1 - x_1) \Delta(x_2 - z_2) \Delta^3(z_2 - z_1) = \\
 &= \int d^4 x_1 d^4 x_2 e^{i p_1 x_1} e^{i p_2 x_2} \frac{\lambda^2}{3!} \int d^4 z_1 d^4 z_2 \int \frac{d^4 p_3}{(2\pi)^4} e^{i p_3 (z_1 - x_1)} \Delta(p_3) \int \frac{d^4 p_4}{(2\pi)^4} e^{i p_4 (x_2 - z_2)} \Delta(p_4) \times \\
 &\quad \times \int \frac{d^4 p_5}{(2\pi)^4} e^{i p_5 (z_2 - z_1)} \Delta(p_5) \int \frac{d^4 p_6}{(2\pi)^4} e^{i p_6 (z_2 - z_1)} \Delta(p_6) \int \frac{d^4 p_7}{(2\pi)^4} e^{i p_7 (z_2 - z_1)} \Delta(p_7) =
 \end{aligned}$$

$$\int d^4 x_1 \rightarrow \delta(p_1 - p_3) \quad \int d^4 x_2 \rightarrow \delta(p_2 + p_4)$$

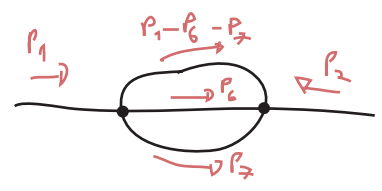
$$= \frac{\lambda^2}{3!} \int d^4 z_1 d^4 z_2 e^{i p_1 z_1} \Delta(p_1) e^{i p_2 z_2} \Delta(-p_2) \int \int \int (\dots) =$$

$$\int d^4 z_1 \rightarrow \delta(p_1 - p_5 - p_6 - p_7)$$

$$= \frac{\lambda^2}{3!} \int d^4 z_2 \Delta(p_1) \Delta(-p_2) e^{i p_2 z_2} e^{i (p_1 - p_5 - p_6 - p_7) z_2} \int \int \Delta(p_1 - p_5 - p_6 - p_7) (\dots) =$$

$$z_2 \rightarrow \delta(p_2 + p_1 - p_5 - p_6 - p_7 + p_5 + p_6 + p_7) = \delta(p_2 + p_1)$$

$$= \frac{\lambda^2}{3!} \Delta(p_1) \Delta(-p_2) (2\pi)^4 \delta(p_2 + p_1) \int \frac{d^4 p_5}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_7}{(2\pi)^4} \Delta(p_1 - p_5 - p_7) \Delta(p_5) \Delta(p_7)$$



Estes dois "propagadores externos" não pareceram nas regras de Feynman deduzidas anterior-

mente pois tratamos os estados iniciais e finais com mais detalhe (ainda que de forma heurística), como ondas planas. Veremos que na versão final da história, quando estivermos calculando espalhamentos, estes dois propagadores vão sumir (aí sim de forma rigorosa) deixando-nos com regras de Feynman idênticas às obtidas anteriormente (note também que isto nada tem a ver com diferenças entre o formalismo canônico ou de integral de trajetória, se tivéssemos, ao invés de olhar com cuidado os estados assintóticos como fizemos nas pags 63 e 64, simplesmente feito a transf. de Fourier das expressões obtidas no espaço das posições, chegaríamos no mesmo resultado)

Regras de Feynman para uma teoria Bosônica em geral

Suponha agora uma teoria mais geral composta de um número arbitrário de campos bosônicos (veremos adiante que a quantização de campos fermiônicos é mais complicada), que agruparemos usando um índice r :

$$\phi_r \quad \text{EX: } \phi = \{ \phi_1, \phi_2, \phi_3 = A_0, \phi_4 = A_1, \phi_5 = A_2, \phi_6 = A_3 \} = \{ \phi, \phi_2, A_\mu \}$$

Com a ação livre dada por:

$$S_0 = \frac{1}{2} \int d^d x \sum_{r,s} \phi_r(x) \Delta_{r,s}^{-1} \phi_s(x)$$

$$\text{EX: } \Delta^{-1} = \begin{pmatrix} -\partial_\mu \partial^\mu + m_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\partial_\mu \partial^\mu + m_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & (g_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu)_{4 \times 4} \end{pmatrix}$$

Este operador deve ser invertido para podermos encontrar os propagadores. Quando ele não é invertível, em geral existem problemas na definição dos campos. Vamos assumir que conseguimos resolver estes problema e encontrar uma base apropriada, aonde ele pode ser invertido (mais tarde veremos um exemplo específico, o campo do fóton). A interação também pode ser escrita em um forma genérica:

$$S_{r_1, \dots, r_p} = \int d^d z \underbrace{A_{r_1, \dots, r_p}}_{\substack{\text{pode conter constantes (acoplamentos) ou operadores} \\ \text{diferenciais agindo em um ou mais campos (o que torna isso} \\ \text{bem mais geral que } \phi^n)}} \underbrace{\phi_{r_1}(z) \dots \phi_{r_p}(z)}_{\text{não há soma subentendida!}}$$

Interação envolvendo p campos (r_i e r_j são genéricos, não necessariamente iguais nem diferentes)

Independentemente da forma de $A_{\{r_i\}}$, esta interação colocará p campos agindo no mesmo ponto, o que leva a um vértice com p linhas saindo. A forma mais simples de ver a regra para o vértice