

$$\therefore \Psi_L = P_L \Psi_D \quad \Psi_R = P_R \Psi_D \quad (\text{eq. 112.1})$$

$$\begin{aligned} P_L^2 &= P_L & P_R^2 &= P_R \\ P_L P_R &= P_R P_L = 0 \\ P_L + P_R &= 1 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{(operadores de projeção)} \\ \text{(eq. 112.2)} \end{array}$$

$$\Psi_L + \Psi_R = P_L \Psi_D + P_R \Psi_D = (P_L + P_R) \Psi_D = \Psi_D$$

Além destas duas representações irredutíveis (chamada de **Espinores de Weyl**), ainda temos uma terceira, definida pela propriedade:

$$\bar{\Psi} = \Psi^c \quad \text{condição de realidade} \quad (\text{eq. 112.3})$$

$$\Psi^c \equiv \Psi^T C$$

A matriz  $C$  é chamada de matriz de conjugação de carga e satisfaz as seguintes propriedades (válidas em Minkowski 4D):

$$C^T = -C \quad C \gamma^\mu C^{-1} = (-\gamma^\mu)^T \quad (\text{eq. 112.4})$$

Na representação de Weyl, satisfazemos estas equações escolhendo:

$$C = \begin{pmatrix} -i\sigma^2 & 0 \\ 0 & i\sigma^2 \end{pmatrix} = -i\gamma^0\gamma^2$$

$\sigma^2^T = -\sigma^2$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma^2 \end{pmatrix} = -C$$

nesta representação  $C^{-1} = C^T = -C$

Os espinores que satisfizerem esta condição são chamados **Espinores de Majorana**, e no caso deles não podemos tratar  $\bar{\psi}$  como independente de  $\psi$  (os dois estão ligados pela eq 112.3) e temos que modificar a ação para obter um termo cinético canonicamente normalizado:

$$S_\psi = -\frac{1}{2} \int d^4x \bar{\psi} (\not{\partial} + m) \psi$$

Esse fator global na ação não parece ter importância, e de fato não afeta a solução clássica, mas quando quantizarmos faz toda diferença ter um fator 2 no operador que estamos invertendo (obtemos um propagador que é o dobro). Fisicamente é importante notar que a ação tem dimensão de  $\hbar$ , e que as trajetórias não clássicas são suprimidas em relação a  $\hbar$ . Isto fica escondido aqui porque  $\hbar = 1$ .

### Representações e Fenomenologia

Qual destas representações descreve os férmions na natureza? A resposta depende de qual partícula você quer descrever. Para começar note que:

$$\bar{\psi}(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi = \frac{1}{2} \bar{\psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + \frac{1}{2} \bar{\psi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \psi_R + \frac{m}{2} \bar{\psi}_L \psi_R + \frac{m}{2} \bar{\psi}_R \psi_L$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 0 \Rightarrow P_L \gamma^\mu = \gamma^\mu P_R$$

$$\bar{\psi}_L \psi_R = i(P_L \psi)^\dagger \gamma^0 (P_R \psi) = i \psi^\dagger \underbrace{P_L^\dagger}_{P_L} \gamma^0 \underbrace{P_R}_{P_R} \psi = i \bar{\psi} \underbrace{P_R^\dagger}_{P_R} \psi = i \bar{\psi} \psi$$

$$\bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R = i(P_R \psi)^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu (P_R \psi) = i \psi^\dagger P_R \gamma^0 \gamma^\mu P_R \psi = i \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$$

Note que o termo de massa mistura os campos R e L (isso quer dizer que as equações de movimento para ambos vão ser acopladas). O que quer dizer que é "incomodo" descrever partículas com massa em termos de spinores de Weyl, que é bem mais útil para partículas sem massa.

Os espinores de Majorana podem ser usados para descrever partículas completamente neutras (nenhuma simetria local interna) e que são a própria antipartícula.

### Soluções (Clássicas) da Equação de Dirac

Começemos notando que o operador de Dirac:  $\hat{D} = \not{\partial} + m$

e seu adjunto:  $\hat{D}^\dagger = \not{\partial} - m$

tem a propriedade:

$$\hat{D}^\dagger \hat{D} = (\not{\partial} + m)(\not{\partial} - m) = (\not{\partial}^2 - m^2) = \hat{D}_{KG} = \hat{D}^\dagger \hat{D}$$

$$\not{\partial} \not{\partial} = \gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu = \frac{1}{2} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \partial_\mu \partial_\nu = \gamma^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \partial^2$$

simetria

o que quer dizer que qualquer campo que satisfaça  $\hat{D} \psi = 0$  ou  $\hat{D}^\dagger \bar{\psi} = 0$  vai satisfazer também:

$$\hat{D}_{KG} \psi = 0$$

Ou seja, as soluções da equação de Dirac têm que ser também soluções da equação de Klein-Gordon. Isso nos diz que estas são do tipo:

$$K e^{\pm i p \cdot x} \iff p^2 + m^2 = 0$$

Onde claramente o coeficiente K deve ser uma matriz, pois estes campos se transformam sob aplicação das matrizes de Dirac. Parametrizemos primeiro as soluções de frequência positiva:

$$\psi(x) = u(p) e^{i p \cdot x} \quad \begin{matrix} p^2 + m^2 = 0 \\ p^0 > 0 \end{matrix}$$

$$(\not{\partial} + m)\psi(x) = 0 \implies (i \not{p} + m) u(p) = 0$$

$\uparrow$   
 $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$

As duas soluções desta equação podem ser compactadas em:

$$S = 1, 2 \Rightarrow u^S(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{-p \cdot \sigma} \xi^S \\ \sqrt{-p \cdot \bar{\sigma}} \xi^S \end{pmatrix} \quad (\text{eq. 114.1})$$

$$\xi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\xi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{A^T} = B \quad B^T = A$$

(matrizes)

Que no referencial de repouso vira:

$$(\sqrt{-p \cdot \sigma} = \sqrt{m \cdot \hat{1}})$$

$$\vec{p}' = 0 \quad p^0 = m$$

$$u^1(p) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u^2(p) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

As duas soluções de frequência negativa são

$$\psi(x) = v^S(p) e^{-i p \cdot x}$$

$$\Downarrow$$

$$(-i \not{p} + m) v^S(p) = 0$$

$$p^2 + m^2 = 0$$

$$p^0 > 0$$

$$v^S(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{-p \cdot \sigma} \eta^S \\ -\sqrt{-p \cdot \bar{\sigma}} \eta^S \end{pmatrix} \quad (\text{eq. 114.2})$$

$$\eta^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\eta^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que no referencial de repouso:

$$v^1(p) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$v^2(p) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

As condições de normalização (usadas para obter os  $\xi$  acima) são:

$$\bar{u}^R(p) u^S(p) = 2m \delta^{RS}$$

$$\bar{v}^R(p) v^S(p) = -2m \delta^{RS} \quad (\text{eq. 114.3})$$

Ou, em termos de  $u^\dagger$  e  $v^\dagger$ :

$$u^{\dagger R}(p) u^S(p) = 2E_p \delta^{RS}$$

$$v^{\dagger R}(p) v^S(p) = 2E_p \delta^{RS} \quad (\text{eq. 114.4})$$

E valem:

$$\bar{u}^R(p) v^S(p) = \bar{v}^R(p) u^S(p) = 0$$

$$u^{\dagger R}(p) v^S(p) \neq 0 \quad v^{\dagger R}(p) u^S(p) \neq 0$$

$$u^{\dagger R}(p^0, \vec{p}^j) v^S(p^0, -\vec{p}^j) = v^{\dagger R}(p^0, -\vec{p}^j) u^S(p^0, \vec{p}^j) = 0 \quad (\text{eq. 114.5})$$

## Quantização do campo de Dirac

Sabemos (olhando as transformações sobre rotação em 3D) que este campo descreve partículas de spin 1/2, e que portanto devem obedecer estatística de Fermi. Em termos da quantização canônica isso significa que devemos usar anticomutadores ao invés de comutadores para fazer a quantização

é bastante rápido mostrar que, usando:  $[\Psi_\alpha(\vec{x}), \Psi_\beta^\dagger(\vec{y})] = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{\alpha\beta}$   
(Peskin 3.5, até eq. 3.90)

$$x^0 = y^0$$

chegamos a 
$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s \left( E_p a_p^{s\dagger} a_p^s - E_p b_p^{s\dagger} b_p^s \right)$$

operadores de criação e aniq.  
energia **arbitrariamente negativa!**

e que isso é resolvido com a quantização correta:  $\{\Psi_\alpha(\vec{x}), \Psi_\beta^\dagger(\vec{y})\} = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{\alpha\beta}$

que, consistentemente, também garante que não consigamos criar duas partículas no mesmo estado, implementando o princípio de exclusão de Pauli

A lagrangeana é:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m \bar{\Psi} \Psi = -\Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m \Psi^\dagger \gamma^0 \Psi \\ &= +\underbrace{\Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0}_{\Psi^\dagger \dot{\Psi}} \partial_0 \Psi - \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^i \partial_i \Psi - m \Psi^\dagger \gamma^0 \Psi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \pi_\Psi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}} = i \Psi^\dagger & \mathcal{H} &= \pi_\Psi \dot{\Psi} - \mathcal{L} \\ & & &= \cancel{\pi_\Psi \dot{\Psi}} - \underbrace{i \Psi^\dagger \dot{\Psi}}_{\pi_\Psi} + \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^i \partial_i \Psi + m \Psi^\dagger \gamma^0 \Psi \end{aligned}$$

$$H = i \int d^3x \Psi^\dagger \left[ \gamma^0 \gamma^i \partial_i + m \gamma^0 \right] \Psi \quad (\text{eq. 115.1})$$

Quantizando:  $\{\Psi_\alpha(\vec{x}, t), \Psi_\beta^\dagger(\vec{y}, t)\} = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{\alpha\beta}$

$$\{\Psi_\alpha(\vec{x}, t), \Psi_\beta(\vec{y}, t)\} = \{\Psi_\alpha^\dagger(\vec{x}, t), \Psi_\beta^\dagger(\vec{y}, t)\} = 0$$

O procedimento então é o mesmo que usamos para o campo escalar, só que agora sabemos que os coeficientes da solução geral são matrizes 4x1:

$$\Psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{E_p}} \left( A_{\lambda}(p) e^{ipx} + B_{\lambda}(p) e^{-ipx} \right)$$

$\lambda = 1, \dots, 4$   
 (índices espinoriais):  $(\gamma^{\mu})_{ij} \Psi_j$

Conhecendo a solução clássica, vou parametrizar estes coeficientes na forma:

$$A_{\lambda}(p) = \sum_s a_{\vec{p}}^s u_{\lambda}^s(p) \quad B_{\lambda}(p) = \sum_s b_{\vec{p}}^{s+} v_{\lambda}^s(p)$$

$\rightarrow$  função (ou conjunto de 4 funções), carrega o índice espinorial  
 $\rightarrow$  operador que vai dar conta das relações de comutação

Assim, expandimos o campo na forma:

$$\Psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s (a_{\vec{p}}^s u^s(p) e^{ipx} + b_{\vec{p}}^{s+} v^s(p) e^{-ipx})$$

$$\bar{\Psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s (b_{\vec{p}}^s \bar{v}^s(p) e^{ipx} + a_{\vec{p}}^{s+} \bar{u}^s(p) e^{-ipx})$$

(eq. 116.1)

As relações de anticomutação para os campos implicam que:

$$\{a_{\vec{p}}^{\alpha}, a_{\vec{q}}^{\beta+}\} = \{b_{\vec{p}}^{\alpha}, b_{\vec{q}}^{\beta+}\} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}-\vec{q}) \delta^{\alpha\beta}$$

(qualquer outra combinação = 0)

Temos, assim como no caso bosônico, um vácuo no espaço de Fock:

$$a_{\vec{p}}^s |0\rangle = b_{\vec{p}}^{s+} |0\rangle = 0$$

E criamos estados de uma partícula agindo com os operadores de criação neste vácuo:

$$|\vec{p}, s\rangle_{\pm} = \sqrt{2E_p} a_{\vec{p}}^{s+} |0\rangle$$

$$|\vec{p}, s\rangle_{\pm} = \sqrt{2E_p} b_{\vec{p}}^{s+} |0\rangle$$

Só que os anticomutadores implicam que:  $(a_{\vec{p}}^{s+})^2 = (b_{\vec{p}}^{s+})^2 = 0$ , o que torna impossível adicionar outra partícula com mesmo momento e spin a este estado. E também:

$$|\vec{p}, s; \vec{k}, s\rangle = \mathcal{N} a_{\vec{p}}^{s+} a_{\vec{k}}^{s+} |0\rangle = -\mathcal{N} a_{\vec{k}}^{s+} a_{\vec{p}}^{s+} |0\rangle = -|\vec{k}, s; \vec{p}, s\rangle$$

O operador hamiltoniano será dado por:

$$H = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sum_S E_p \left( a_{\vec{p}}^{+S} a_{\vec{p}}^S - b_{\vec{p}}^S b_{\vec{p}}^{+S} \right) =$$

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sum_S E_p \left( a_{\vec{p}}^{+S} a_{\vec{p}}^S + b_{\vec{p}}^{+S} b_{\vec{p}}^S - \{b_{\vec{p}}^{+S}, b_{\vec{p}}^S\} \right)$$

Mais uma vez temos uma energia infinita no vácuo dada pelo último termo acima. Mais uma vez definiremos o ordenamento normal. A novidade aqui é que, para passar da primeira linha acima para a segunda o sinal do termo com 2 b's foi invertido. Então se quisermos somente descartar o efeito do vácuo de forma consistente com a estatística de Fermi, devemos fazer:

$$: a_{\vec{p}}^{\pi} a_{\vec{q}}^S : = a_{\vec{p}}^{\pi} a_{\vec{q}}^S$$

$$: a_{\vec{q}}^S a_{\vec{p}}^{\pi} : = a_{\vec{q}}^S a_{\vec{p}}^{\pi} = -a_{\vec{p}}^{\pi} a_{\vec{q}}^S$$

E o mesmo deve valer para quando o produto já não começa ordenado:

$$: a_{\vec{p}}^{\pi} a_{\vec{q}}^{S\dagger} : = -a_{\vec{q}}^{S\dagger} a_{\vec{p}}^{\pi} \quad (\text{eq. 117.2})$$

Moral da história, o ordenamento normal para férmions carrega um sinal (para vários campos multiplicados é necessário contar quantas vezes um operador fermiônico passar por outros para sair da ordem inicial e chegar na final, e multiplicar por -1 para cada passagem).

## A integral de trajetória fermiônica

Precisamos então pensar em como transportar esta anti-comutação de forma consistente para o formalismo de integral de trajetória. O problema é que neste formalismo, trocamos os operadores por funções, que comutam entre si.

Podemos pensar, que no caso bôsonico, as funções são obtidas a partir dos operadores no limite:

$$[a, a^{\dagger}] = \hbar \rightarrow 0$$

Então agora, deveríamos obter

$$\{a, a^{\dagger}\} = \hbar \rightarrow 0$$

que não são as funções ou números usuais, pois anticomutam (seguem a chamada [Álgebra de Grassmann](#)). Podemos dividir o conjunto destes [Números de Grassmann](#) em dois:

Parte **ímpar** da álgebra:  $a, a^{\dagger} : \{a, a^{\dagger}\} = \{a, a\} = \{a^{\dagger}, a^{\dagger}\} = 0$

Parte **par** da álgebra:  $aa^{\dagger} : [aa^{\dagger}, aa^{\dagger}] = 0$

De forma que o produto de duas funções fermiônicas (ímpar) vai ser bosônica (par)

(e é fácil ver que [par . par = par] e [ímpar . par = ímpar])

## Números de Grassmann, definições e propriedades

Precisamos de funções definidas em um espaço de **números complexos que anti-comutem**, o que já havia sido proposto antes por Grassmann. Os números de Grassmann satisfazem a seguinte propriedade:

$$\{\theta, \eta\} = \theta\eta + \eta\theta = 0$$

O que tem diversas consequências:

$$\theta^2 = 0 \quad (\text{eq. 118.1})$$

elemento "par" da álgebra (commutative-number)

elemento "ímpar" (anticommutative-number)

um par de números de Grassmann se comporta como um c-number

$$\eta_1 \eta_2 \eta_3 = -\eta_1 \eta_3 \eta_2 = \eta_3 \eta_1 \eta_2$$

$$f(\theta, \eta) = a_0 + a_1 \theta + a_2 \eta + a_3 \theta \eta + a_4 \theta^2 \eta + a_5 \theta \eta^2$$

se a função tiver paridade definida ela é a-number ou c-number  
 assim, se  $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$  então  $a_0 = a_3 = 0$  ou  $a_1 = a_2 = 0$  (ou então os próprios a's devem ser Grassmann)  
 Na maior parte do segue, vamos assumir coeficientes pares, o que significa que estamos tomando a álgebra de Grassmann finita, o que quer dizer que, no exemplo abaixo, não há outros ímpares além de  $\theta, \eta$  e  $\rho$  para aparecer nos coeficientes:

$$f(\theta, \eta, \rho) = a_0 + a_1 \theta + a_2 \eta + a_3 \rho + a_4 \theta \eta + a_5 \theta \rho + a_6 \eta \rho + a_7 \theta \eta \rho$$

e considerando funções mais gerais (sem paridade, ou supernumbers)

Há uma ambiguidade na definição de derivada (temos que decidir se ela age pela direita ou esquerda):

$$\begin{aligned} \frac{d^L}{d\theta} f(\theta, \eta) &= a_1 + a_3 \eta & \frac{d^R}{d\theta} f(\theta, \eta) &= a_1 - a_3 \eta \\ \frac{d^L}{d\eta} f(\theta, \eta) &= a_2 - a_3 \theta & \frac{d^R}{d\eta} f(\theta, \eta) &= a_2 + a_3 \theta \end{aligned}$$

Definiremos:  $\frac{d}{d\eta} = \frac{d^L}{d\eta}$  (quando for necessário usar a derivada pela direita indicaremos isto explicitamente)

$$\eta \frac{d}{d\eta} f = a_2 \eta - a_3 \eta \theta = a_2 \eta + a_3 \theta \eta$$

$$\eta f = a_0 \eta + a_1 \eta \theta \Rightarrow \frac{d}{d\eta} (\eta f) = a_0 + a_1 \theta$$

$$\left( \eta \frac{d}{d\eta} + \frac{d}{d\eta} \eta \right) f = f$$

A consequência é que a regra do produto também fica modificada:

$$\frac{d}{d\eta} (\eta f) = f - \eta \frac{d}{d\eta} f$$