## Números de Grassmann, definições e propriedades

Precisamos de funções definindas em um espaço de números complexos que anti-comutem, o que já havia sido proposto antes por Grassmann. Os números de Grassmann satisfazem a seguinte propriedade:

$$\boxed{\{\theta,\eta\} = \theta\eta + \eta\theta = 0}$$

O que tem diversas consequências:

$$\boxed{\theta^2 = 0} \quad \text{( eq. 118.1 )}$$

elemento "par" da álgebra (commutative-number)

elemento "ímpar" (anticommutative-number)

$$\eta_1\eta_2\eta_3 = -\eta_1\eta_3\eta_2 = \eta_3\eta_1\eta_2$$

um par de números de Grassmann se comporta como um c-number

$$f(\theta,\eta) = a_0 + a_1\theta + a_2\eta + a_3\theta\eta + a_4\theta^2\eta + a_5\theta\eta^2$$

se a função tiver paridade definida ela é a-number ou c-number

assim, se $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$ então $a_0 = a_3 = 0$ ou $a_1 = a_2 = 0$ (ou então os próprios a's devem ser Grassmann)

Na maior parte do segue, vamos assumir coeficientes pares, o que significa que estamos tomando a álgebra de Grassmann finita, o que quer dizer que, no exemplo abaixo, não há outros ímpares além de $\theta$, $\eta$ e $\rho$ para aparecer nos coeficientes:

$$f(\theta,\eta,\rho) = a_0 + a_1\theta + a_2\eta + a_3\rho + a_4\theta\eta + a_5\theta\rho + a_6\eta\rho + a_7\theta\eta\rho$$

e considerando funções mais gerais (sem paridade, ou supernumbers)

Há uma ambiguidade na definição de derivada (temos que decidir se ela age pela direita ou esquerda):

$$\frac{\partial^L}{\partial\theta} f(\theta,\eta) = a_1 + a_3\eta \qquad \frac{\partial^R}{\partial\theta} f(\theta,\eta) = a_1 - a_3\eta$$

$$\frac{\partial^L}{\partial\eta} f(\theta,\eta) = a_2 - a_3\theta \qquad \frac{\partial^R}{\partial\eta} f(\theta,\eta) = a_2 + a_3\theta$$

Definiremos: $\boxed{\dfrac{\partial}{\partial\eta} = \dfrac{\partial^L}{\partial\eta}}$ ( quando for necessário usar a derivada pela direita indicaremos isto explicitamente)

$$\eta\frac{\partial f}{\partial\eta} = a_2\eta - a_3\eta\theta = \underbrace{a_2\eta + a_3\theta\eta}_{f}$$

$$\eta f = a_0\eta + a_1\eta\theta \Rightarrow \frac{\partial}{\partial\eta}(\eta f) = \underbrace{a_0 + a_1\theta}$$

$$\left(\eta\frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{\partial}{\partial\eta}\eta\right) f = f$$

A consequência é que a regra do produto também fica modificada:

$$\frac{\partial}{\partial\eta}(\eta f) = f - \eta\frac{\partial f}{\partial\eta}$$

$$\boxed{\left\{\eta_i , \frac{\partial}{\partial \eta_j}\right\} = \delta_{ij}} \qquad \text{( eq. 119.1 )}$$

$$\boxed{\left\{\frac{\partial}{\partial \eta} , \frac{\partial}{\partial \theta}\right\} = 0} \qquad \text{( eq. 119.2 )}$$

E num caso mais geral:

$$\frac{\partial}{\partial \eta_j}\left(\eta_1 \eta_2 \eta_3 \cdots \eta_n\right) = \delta_{1j}\, \eta_2 \eta_3 \cdots \eta_n - \delta_{2j}\, \eta_1 \eta_3 \cdots \eta_n + \delta_{3j}\, \eta_1 \eta_2 \eta_4 \cdots \eta_n - \cdots$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_k} e^{\sum \theta_i \eta_i} = \eta_k\, e^{\underbrace{\sum \theta_i \eta_i}_{\text{PAR}}} \qquad \frac{\partial}{\partial \eta_k} e^{\sum \theta_i \eta_i} = -\theta_k\, e^{\sum \theta_i \eta_i}$$

$$a = \sum \theta_i \eta_i$$

$$e^a = 1 + \sum \theta_i \eta_i + \frac{1}{2!}\left(\sum \theta_i \eta_i\right)\left(\sum \theta_j \eta_j\right) + \ldots = 1 + \sum \theta_i \eta_i + \frac{1}{2!}\left(\sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \theta_i \eta_i \theta_j \eta_j\right) + \frac{1}{3!}\left(\sum_{\substack{i,j,k \\ i\neq j,\ j\neq k \\ i \neq k}} \theta_i \eta_i \theta_j \eta_j \theta_k \eta_k\right) =$$

$$\frac{d}{d\eta_\ell} e^a = 0 - \theta_\ell + \frac{1}{2!}\left[\sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}}\left(-\theta_i \delta_{i\ell} \theta_j \eta_j - \theta_i \eta_i \theta_j \delta_{\ell j}\right)\right] + \ldots = -\theta_\ell - \theta_\ell \sum_i \theta_i \eta_i - \theta_\ell \frac{1}{2!} \sum_{\substack{i,j \\ j > i}} \theta_i \eta_i \theta_j \eta_j$$

$$= -\theta_\ell \left(1 + \sum_i \theta_i \eta_i + \frac{1}{2!}\sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \theta_i \eta_i \theta_j \eta_j + \ldots\right) = -\theta_\ell\, e^a \;//$$

Para definir integrais é natural assumir que os infinitesimais de Grassmann também anti-comutam:

$$\{\theta, d\eta\} = 0$$

$$\{d\theta, d\eta\} = 0$$

que resolve outra ambiguidade de sinal (se fizemos primeiro a integral de fora o sinal fica invertido)

$$\int d\theta\, d\eta\, f(\theta,\eta) \equiv \int d\theta \left[\int d\eta\, f(\theta,\eta)\right]$$

$$f(\theta,\eta) = 1 \Rightarrow \left(\int d\theta\right)^2 = \int d\theta \int d\eta = \int d\theta\, d\eta = -\int d\eta\, d\theta = -\left(\int d\theta\right)^2$$

$$\boxed{\int d\theta = 0} \qquad \text{( eq. 119.3 )}$$

$F(\theta) = \int d\theta\, f(\theta)$

$F(\theta)$ tem que ser linear, já que todas expansões aqui só vao até ordem 1

$$\int d\theta\, f(\theta) = \int d\theta \left(a_1 + a_2 \theta\right) = a_2 \int d\theta\, \theta \Rightarrow \int d\theta\, \theta = ?$$

Para fixar esta parte basta notar que queremos:

$$\theta \to \theta + \eta \Rightarrow \int d\theta\, f(\theta) = \int d\theta\, f(\theta+\eta)$$

$$F(\theta) = F(\theta+\eta)$$

$$A + B\theta = A + B(\theta+\eta)$$

$$\forall\, \theta, \eta \Rightarrow B = 0$$

$\int d\theta\, \theta = A$ deve portanto ser par, tomaremos:

$$\boxed{\int d\theta\, \theta = 1}$$ ( eq. 120.1 )

$$\int d\theta\, f(\theta,\eta) = \int d\theta \left(a_0 + a_1\theta + a_2\eta + a_3\theta\eta\right) = a_1 + a_3\eta = \frac{\partial}{\partial\theta} f(\theta,\eta)$$

o que pode ser mostrado em geral, ou seja a integração e a diferenciação tem o mesmo efeito.

A função delta também pode ser definida, usando uma função η: $g(\eta)$

$$g(\eta) = a + b\eta$$

queremos:

$$\int d\eta\, \delta(\eta-\rho)\, g(\eta) = g(\rho) = a + b\rho$$

$$\int d\eta\, \delta(\eta-\rho)[a + b\eta] = a \underbrace{\int d\eta\, \delta(\eta-\rho)}_{1} + b \underbrace{\int d\eta\, \delta(\eta-\rho)\,\eta}_{\rho}$$

O que é obtido com: $\boxed{\delta(\eta-\rho) = \eta - \rho}$ ( eq. 120.2 )

$$\int d\eta\,(\eta-\rho) = \underbrace{\int d\eta\,\eta}_{1} - \underbrace{\int d\eta\,\rho}_{0} \qquad \int d\eta\,(\eta-\rho)\eta = \underbrace{\int d\eta\,\eta\eta}_{0} \overset{(-)}{-} \underbrace{\int d\eta\,\rho\eta}_{\rho}$$

A mudança de variáveis multiplicativa (por um número complexo) na integração também parece mais com uma mudança em derivadas:

$$\int dx\, x = 1 \qquad \underset{-}{y} = \underset{+}{a}\,\underset{-}{x} \qquad \int dy\, y = 1 = a \int dy\, x$$

$$\boxed{dy = \frac{1}{a}\,dx}$$ ( eq. 120.3 )

---

aqui termina a lec 12 do Nastase

Para números de Grassmann complexos:

$$(\theta\eta)^* = \eta^*\theta^* = -\theta^*\eta^* \quad \left\{ \int d\eta = \int d\eta^* = 0 \quad \& \quad \int d\eta\,\eta = \int d\eta^*\eta^* = 1 \right\}$$

$$e^{-\eta^*\eta} = 1 - \eta^*\eta$$

$$\int d\eta^* d\eta\, e^{-\eta^* b\eta} = \int d\eta^* d\eta\,(1-\eta^* b\eta) = \int d\eta^* d\eta\,(1+\eta\eta^* b) = b$$

$$\boxed{\int d\eta^* d\eta\, e^{-\eta^* b\eta} = b}$$ (eq. 121.1)

$$\int d\eta^* d\eta\, \eta\eta^* e^{-\eta^* b\eta} = \int d\eta^* d\eta\, \eta\eta^* (1 - \overset{0}{\eta^* b\eta}) = 1$$

$$\boxed{\int d\eta^* d\eta\, \eta\eta^* e^{-\eta^* b\eta} = \frac{1}{b}\cdot b}$$ (eq. 121.2)

... ou $\int d\eta^* d\eta\, \eta\eta^* e^{-\eta^* b\eta} = \frac{d}{db}\int d\eta^* d\eta\, e^{-\eta^* b\eta}$

Isto é análogo ao que teríamos obtido para integral gaussiana de váriáveis complexas:

$$\boxed{\int \frac{dz^*}{(2\pi i)^{1/2}}\frac{dz}{(2\pi i)^{1/2}}\, e^{-z^*\cdot bz} = \frac{1}{b}}$$ (eq. 121.3)

$$\boxed{\int \frac{dz^*}{(2\pi i)^{1/2}}\frac{dz}{(2\pi i)^{1/2}}\, z^* z\, e^{-z^*\cdot bz} = \frac{1}{b}\cdot\frac{1}{b}}$$ (eq. 121.4)

Exercício extra (incluir na lista da lecture 13): provar 121.3 e 121.4

$-\frac{d}{db}\int \frac{dz\,dz}{\ldots}\, e^{-z^* b z} = \ldots$

Suponha um caso bidimensional:

$$\eta = \begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix} \qquad \bar\eta = \begin{pmatrix}\eta_1^* & \eta_2^*\end{pmatrix}$$

$$(\bar\eta\eta)^2 = (\eta_1^*\eta_1 + \eta_2^*\eta_2)^2 = \eta_1^*\eta_1\eta_2^*\eta_2 + \eta_2^*\eta_2\eta_1^*\eta_1 = 2\eta_1^*\eta_1\eta_2^*\eta_2$$

$$e^{-\bar\eta\eta} = 1 - \eta_1^*\eta_1 + \eta_2^*\eta_2 + \eta_1^*\eta_1\eta_2^*\eta_2$$

$$d\bar\eta\, d\eta \equiv d\eta_1^*\, d\eta_1\, d\eta_2^*\, d\eta_2$$

$$\int d\bar{\eta}\, d\eta\, e^{-\bar{\eta}\eta} = \int d\eta_1^* \, d\eta_1 \, d\eta_2^* \, d\eta_2 \, \eta_1^* \eta_1 \eta_2^* \eta_2 = 1$$

$$\boxed{\int d\bar{\eta}\, d\eta\, e^{-\bar{\eta}\eta} = 1}$$ ( eq. 122.1 )

Fazendo uma mudança de variáveis,obtemos:

$$\eta = M\alpha \qquad M, N \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$
$$\bar{\eta} = \bar{\alpha} N$$

$$\eta_1 \eta_2 = (M_{11}\alpha_1 + M_{12}\alpha_2)(M_{21}\alpha_1 + M_{22}\alpha_2) =$$
$$= (M_{11} M_{22} + M_{12} M_{21})\alpha_1 \alpha_2 = \mathrm{DET}[M]\alpha_1\alpha_2$$

Então, se queremos que: $\int d\eta_1 \, d\eta_2 \, \eta_1 \eta_2 = \int d\alpha_1 \, d\alpha_2 \, \alpha_1 \alpha_2$

temos que exigir: $d\eta_1 \, d\eta_2 = (\mathrm{DET}[M])^{-1} d\alpha_1 \, d\alpha_2$

(como já tínhamos visto na mudança de uma variável)

da mesma forma: $d\eta_1^* \, d\eta_2^* = (\mathrm{DET}[N])^{-1} d\alpha_1^* \, d\alpha_2^*$

então:

$$1 = \int d\eta_1^* \, d\eta_1 \, d\eta_2^* \, d\eta_2 \, e^{-\bar{\eta}\eta} = - \int \frac{d\alpha_1^* \, d\alpha_2^*}{\mathrm{DET}[N]} \frac{d\alpha_1 \, d\alpha_2}{\mathrm{DET}[M]} e^{-\bar{\alpha} N M \alpha} =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{DET}[\underbrace{NM}_{A}]} \int d\alpha_1^* \, d\alpha_1 \, d\alpha_2^* \, d\alpha_2 \, e^{-\bar{\alpha}\overbrace{NM}^{A}\alpha}$$

$$\boxed{\int d^n\bar{\alpha}\, d^n\alpha \, e^{-\bar{\alpha}\cdot A\alpha} = \mathrm{DET}[A]}$$ ( eq. 122.2 )

Provamos isso para 2D, mas a mesma coisa poderia ter sido feita para mais dimensões.

compare com: $\int \frac{d^n z^*}{(2\pi i)^{n/2}} \frac{d^n z}{(2\pi i)^{n/2}} e^{-\vec{z}^{*}\cdot A\vec{z}} = (\mathrm{DET}\ A)^{-1}$

Usando derivadas em a, podemos também mostrar que:

$$\boxed{\int d^n\bar{\alpha}\, d^n\alpha\; \alpha_i \bar{\alpha}_j \; e^{-\bar{\alpha}\cdot A\alpha} = (A^{-1})_{ij}\, \mathrm{Det}[A]}$$ (eq. 123.1)

Podemos definir uma "função de Grassmann" (que é ímpar, para cada valor x, fornece um a-number) como:

$$\psi(x) = \sum_i \psi_i\, \phi_i(x)$$

$\psi_i$: coeficientes são números de Grassmann

$\{\phi_i\}$ base de funções usuais $(\phi_i \in \mathbb{C})$

E generalizar as integrais funcionais Gaussianas para funções deste tipo:

$$\boxed{\int D\bar{\psi}\, D\psi \; e^{-\bar{\psi}\cdot A\psi} = \mathrm{Det}[A]}$$ (eq. 123.2)

## O Oscilador Harmônico Fermiônico

O operador hamiltoniano de um oscilador harmônico quantizado como um férmion, antes de dispensarmos a energia do vácuo, é:

$$\hat{H}_F = \omega\left(\hat{b}^+\hat{b} - \frac{1}{2}\right) \qquad \{\hat{b}, \hat{b}^+\} = 1$$

Consideremos, assim como no caso bosônico, o estado coerente:

$$|\beta\rangle = e^{\hat{b}^+\beta}|0\rangle = (1+\hat{b}^+\beta)|0\rangle = (1-\beta\hat{b}^+)|0\rangle$$

$$\hat{b}|\beta\rangle = (\cancel{\hat{b}} + \beta\underbrace{\hat{b}\hat{b}^+}_{1-\hat{b}^+\hat{b}})|0\rangle = \beta|0\rangle = \beta(1-\overbrace{\beta\hat{b}^+}^{\beta^2=0})|0\rangle = \beta|\beta\rangle$$

Temos a relação de completeza:

$$\hat{1} = \int d\beta^* d\beta\, |\beta\rangle\langle\beta^*|\, e^{-\beta^*\beta}$$

E o hamiltoniano na presença de fontes (oscilador forçado) será escrito como:

$$H(b^+, b; t) = \omega\, b^+ b - b^+\eta(t) - \bar{\eta}(t)\, b$$

Queremos calcular a amplitude de transição: