

Usando derivadas em a, podemos também mostrar que:

$$\int \prod_i d\bar{\alpha}_i d\alpha_i \alpha_i \bar{\alpha}_j e^{-\bar{\alpha} \cdot A \alpha} = (A^{-1})_{ij} D_{\epsilon_T} [A] \quad (\text{eq. 123.1})$$

Podemos definir uma "função de Grassmann" (que é ímpar, para cada valor x, fornece um a-number)

como:

$$\psi(x) = \sum_i \psi_i \phi_i(x)$$

$\{ \phi_i \}$ base de funções usuais ($\phi_i \in \mathbb{C}$)
 coeficientes são números de Grassmann

E generalizar as integrais funcionais Gaussianas para funções deste tipo:

$$\int D\bar{\psi} D\psi e^{-\bar{\psi} \cdot A \psi} = D_{\epsilon_T} [A] \quad (\text{eq. 123.2})$$

O Oscilador Harmônico Fermiônico

O operador hamiltoniano de um oscilador harmônico quantizado como um férmion, antes de dispensarmos a energia do vácuo, é:

$$\hat{H}_F = \omega \left(\hat{b}^\dagger \hat{b} - \frac{1}{2} \right) \quad \{ \hat{b}, \hat{b}^\dagger \} = 1$$

Consideremos, assim como no caso bosônico, o estado coerente:

$$|\beta\rangle = e^{\hat{b}^\dagger \beta} |0\rangle = (1 + \hat{b}^\dagger \beta) |0\rangle = (1 - \beta \hat{b}^\dagger) |0\rangle$$

$$\hat{b} |\beta\rangle = \left(\hat{b} + \beta \hat{b} \hat{b}^\dagger \right) |0\rangle = \beta |0\rangle = \beta (1 - \beta \hat{b}^\dagger) |0\rangle = \beta |\beta\rangle$$

Temos a relação de completeza:

$$\hat{1} = \int d\beta^* d\beta |\beta\rangle \langle \beta^*| e^{-\beta^* \beta}$$

E o hamiltoniano na presença de fontes (oscilador forçado) será escrito como:

$$H(b^\dagger, b; t) = \omega b^\dagger b - b^\dagger \eta(t) - \bar{\eta}(t) b$$

Queremos calcular a amplitude de transição:

$$F(\beta^*, t'; \beta, t) = \langle \beta^*, t' | \beta, t \rangle$$

para a qual seguimos os mesmos passos de sempre para encontrar a integral funcional:

$$F(\beta^*, t'; \beta, t) = \int \mathcal{D}\beta^* \mathcal{D}\beta \exp \left\{ i \int_t^{t'} dt \left[-i \dot{\beta}^*(t) \beta(t) - H(\beta, \dot{\beta}, t) \right] + \beta^*(t') \beta(t) \right\}$$

As equações de Hamilton na presença de fontes são:

$$\begin{aligned} \dot{\beta}^*(z) - i\omega \beta^*(z) + i\bar{\eta}(z) &= 0 \\ \dot{\beta}(z) + i\omega \beta(z) - i\eta(z) &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \beta(t) &= \beta \\ \beta^*(t') &= \beta^* \end{aligned} \quad (\text{eq. 124.1})$$

Com soluções:

$$\begin{aligned} \beta_\omega(z) &= \beta e^{i\omega(t-z)} + i \int_t^z e^{i\omega(s-z)} \eta(s) ds \\ \beta_\omega^*(z) &= \beta^* e^{i\omega(z-t')} + i \int_z^{t'} e^{i\omega(z-s)} \bar{\eta}(s) ds \end{aligned} \quad (\text{eq. 124.2})$$

Que podemos projetar no vácuo fazendo: $\left. \begin{aligned} \beta &= \beta^* = 0 \\ t &\rightarrow -\infty \\ t' &\rightarrow +\infty \end{aligned} \right\}$

E neste caso (exercício, mas a dedução prossegue de maneira análoga ao caso bosônico - pg 79):

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = F(0, \infty; 0, -\infty) = \langle 0 | 0 \rangle \exp \left\{ - \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} ds e^{i\omega(t-s)} \bar{\eta}(s) \eta(s) \right\} \quad (\text{eq. 124.2})$$

Generalizando para o caso de um campo (em 0+1 dim), teríamos:

$\beta \rightarrow \psi \quad \beta^* \rightarrow \bar{\psi}$

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ i \int dt \left[\underbrace{-i \dot{\bar{\psi}} \psi}_{i \bar{\psi} \dot{\psi}} - \omega \bar{\psi} \psi + \bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi \right] \right\} =$$

$$= \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ i \int dt \left[\bar{\psi} (i \dot{\psi} - \omega) \psi + \bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi \right] \right\} =$$

$\mathcal{D}_F^{-1} = -i(i \dot{\psi} - \omega)$

$$= \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ \int dt \left[-\bar{\psi} D_F^{-1} \psi \right] + \lambda \int dt \left[\bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi \right] \right\}$$

$$\therefore Z[\eta, \bar{\eta}] = Z[0, 0] \exp \left\{ - \int ds dz \bar{\eta}(s) D_F(s, z) \eta(z) \right\} \quad (\text{eq. 125.1})$$

$$D_F(s, z) = \left[-\lambda (\lambda \partial_t - \omega) \right]^{-1} = \lambda \int \frac{dE}{2\pi} \frac{e^{-iE(s-z)}}{E - \omega + i\epsilon} = \Theta(s-z) e^{-i\omega(s-z)} \quad (\text{eq. 125.2})$$

Note que: (1) Temos apenas um polo, em $E = \omega - i\epsilon$

(2) Isso significa que se fizemos a integral no hemisfério superior ($\text{Im } E > 0$) ela dá zero, e somos forçados a fazer isso se ($s < \tau$), portanto a integral é zero para ($s < \tau$). No outro hemisfério (obrigatório se $s > \tau$) pegamos o polo e obtemos o resultado não nulo acima.

$$-iE(s-z) \sim \text{Im}(E)(s-z)$$

(3) Basta substituir a última expressão em 125.1 para obter 124.2 (incluindo o limite de integração, que impõe $s > \tau$)

Passando para o espaço Euclidiano: $\tau = -i t_E$

$$Z_E[\eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ \int dt_E \bar{\psi}_E (-\partial_{t_E} - \omega) \psi_E + \int dt_E \bar{\psi}_E \eta_E + \bar{\eta}_E \psi_E \right\}$$

suprimindo o "E"

$$= Z[0, 0] \exp \left\{ \int dz ds \bar{\eta}(s) D(s, z) \eta(z) \right\}$$

$$-S_E = -\bar{\psi} \cdot D^{-1} \psi + \bar{\psi} \cdot \eta + \bar{\eta} \cdot \psi \quad (\text{eq. 125.3})$$

$$D[s, z] = (\partial_t + \omega)^{-1} = \lambda \int \frac{dE}{2\pi} \frac{e^{-iE(s-z)}}{E + i\omega} \quad (\text{eq. 125.4})$$

E rodando de volta para Minkowski com $E_E = (-i + \epsilon) E$ (para evitar o polo), voltamos ao propagador em 125.2

Agora basta aumentar o número de coordenadas espaciais para obter uma teoria de campo. A lagrangeana (em Mink.) é:

$$\mathcal{L}_F^{(M)} = -\bar{\psi} (\not{\partial} + m) \psi$$

Passando para o Euclideano:

$$\mathcal{L}_F^{(E)} = \bar{\psi}(\not{\partial} + m)\psi$$

Tomando o cuidado de manter a álgebra de Clifford funcionando: $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$

$$(\gamma^0)^2 = -1 \Rightarrow (\gamma^i)^2 = +1$$

$$\gamma^1 = i\gamma^0$$

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger i\gamma^0 = \psi^\dagger \gamma^1$$

E, nesta representação: $\gamma_\mu = \gamma^\mu = (\gamma^\mu)^\dagger$

A função de partição obtida é:

$$Z_F^{(E)}[\bar{\eta}, \eta] = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ - \int d^4x \bar{\psi}(\not{\partial} + m)\psi + \int d^4x (\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta) \right\} = \tag{eq. 126.1}$$

$$= Z(0,0) e^{\bar{\eta}(\not{\partial} + m)^{-1}\eta}$$

Atenção para o índice Espinorial:
 $\int d^4x \bar{\eta}\psi = \int d^4x \bar{\eta}_\alpha(x)\psi_\alpha(x)$ $\alpha=1,2,3,4$
 $\bar{\eta}(\not{\partial} + m)^{-1}\eta = \int d^4x d^4y \bar{\eta}_\alpha(x) (\not{\partial} + m)^{-1}_{\alpha\beta} \eta_\beta(y)$

$$S_F(x, y) = (\not{\partial}_x + m)^{-1} = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{i p \cdot (x-y)}}{-\not{p} + im}$$

(eq. 126.2)

$$(\not{\partial}_x + m) S_F(x, y) = \delta^4(x-y) \quad \text{pois} \quad \not{\partial}_x e^{ipx} = i\not{p} e^{ipx}$$

Usaremos com frequência a seguinte relação:

$$\frac{1}{-\not{p} + im} = \frac{-\not{p} - im}{p^2 + m^2} = \frac{-\not{p}_{\alpha\beta} - im \uparrow_{\alpha\beta}}{p^2 + m^2}$$

$$\not{p}\not{p} = \gamma^\mu p_\mu \gamma^\nu p_\nu = 2g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu - \underbrace{\gamma^\mu \gamma^\nu p_\mu p_\nu}_{\gamma^\nu \gamma^\mu p_\nu p_\mu} \Rightarrow 2p^2 = 2\not{p}\not{p}$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$$

Voltando para Minkowski, obtemos:

$$S_F^{(E)}(x, y) = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{i p \cdot (x-y)}}{-\not{p} + im} = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-\not{p} - im}{p^2 + m^2} e^{i p \cdot (x-y)}$$

$$t_E = i t \quad p_E^0 = (-i + \epsilon) p^0 \quad p_E^2 + m^2 = p^2 + m^2 - i \epsilon$$

$$p^E = \gamma^1 p_E^0 + \gamma^i p_{Ei} = i \gamma^0 (-i + \epsilon) p^0 + \gamma^i p_{i} = \gamma^0 p^0 + \gamma^i p_i + i \gamma^0 \epsilon$$

$$S_F^{(M)}(x, y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{i[p^0(x^0 - y^0) + p^i(x^i - y^i)]} \frac{-\gamma^0 p^0 - \gamma^i p_i - i m}{p^2 + m^2 - i \epsilon} =$$

$p_i \rightarrow -p_i$

$$= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{i p(x - y)} \frac{-\not{p} - i m}{p^2 + m^2 - i \epsilon}$$

Teorema de Wick para Campos Fermiônicos

Como um exemplo, consideremos uma teoria com um escalar ϕ (com fonte J) e um férmion ψ , interagindo por meio de um termo $S_I[\bar{\psi}, \psi, \phi]$, neste caso poderíamos escrever:

$$Z[\bar{\eta}, \eta, J] = e^{-S_I\left[-\frac{\delta}{\delta \eta}, \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}}, \frac{\delta}{\delta J}\right]} Z_F^{(0)}[\bar{\eta}, \eta] Z_\phi^{(0)}[J] \tag{eq. 127.1}$$

que é obtida segundo exatamente o mesmo procedimento usado na pag 95. A única diferença está no termo $-\frac{\delta}{\delta \eta}$ que tem este sinal pois o termo de fonte tem a forma: $\bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta$

Logo: $\psi e^{\int d^4x \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta} = - \int \frac{\delta}{\delta \eta} e^{\int d^4x \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta}$

O lema de Coleman (eq. 100.2) também ganha um sinal pelo mesmo motivo:

$$F\left(-\frac{\delta}{\delta \eta}, \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}}\right) Z[\bar{\eta}, \eta] = Z\left[-\frac{\delta}{\delta \psi}, \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}}\right] \left(F(\bar{\psi}, \psi) e^{\bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi} \right)_{\bar{\psi} = \psi = 0} \tag{eq. 127.2}$$

$$Z[\bar{\eta}, \eta, J] = e^{-S_I\left(-\frac{\delta}{\delta \eta}, \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}}, \frac{\delta}{\delta J}\right)} e^{\bar{\eta} S_F \eta} Z_\phi^{(0)}[J] =$$

(eq. 127.3)

$$= e^{-\frac{\delta}{\delta \psi} S_F \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}}} e^{-S_I(\bar{\psi}, \psi, \frac{\delta}{\delta J}) + \bar{\psi} \cdot \eta + \bar{\eta} \cdot \psi} Z_\phi^{(0)}[J] \Big|_{\psi = \bar{\psi} = J = 0} =$$

$$= e^{-\frac{\delta}{\delta \psi} S_F \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}}} e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi} \Delta \frac{\delta}{\delta \phi}} \left\{ e^{-S_I(\bar{\psi}, \psi, \phi) + \bar{\psi} \cdot \eta + \bar{\eta} \cdot \psi + J \cdot \phi} \right\}_{\psi = \bar{\psi} = \phi = 0}$$