

Regras de Feynman para Férmions (Interação de Yukawa)

$$\mathcal{L}_Y = g \bar{\Psi} \Psi \phi$$

$$Z[\bar{\eta}, \eta, J] = e^{-\frac{\delta}{\delta \Psi} S_F \frac{\delta}{\delta \bar{\Psi}}} e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi} \Delta \frac{\delta}{\delta \phi}} \left\{ e^{-g \int d^4x \bar{\Psi} \Psi \phi + \bar{\eta} \cdot \eta + \bar{\eta} \cdot \Psi + J \cdot \phi} \right\}_{\Psi = \bar{\Psi} = \phi = 0}$$

Começemos com a função de dois pontos livre (onde os dois pontos são aplicações do campo fermiônico):

$G_{(n,m)}^{(N)}$   
 ↳ ordem na expansão perturbativa  
 ↳ numero de pontos externos bosônicos  
 ↳ numero de pontos externos fermiônicos

$$G_{(2,0)}^{(0)} = \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle = \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} \left( - \frac{\delta}{\delta \eta(y)} \right) Z_0(\bar{\eta}, \eta, J) \Big|_{\eta = \bar{\eta} = J = 0}$$

note que, trivialmente, temos  $\langle 0 | \psi \psi | 0 \rangle = \langle 0 | \bar{\psi} \bar{\psi} | 0 \rangle = 0$

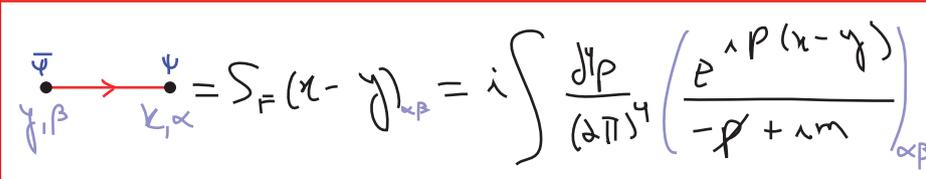
$$Z_0[\bar{\eta}, \eta, J] = e^{-\frac{\delta}{\delta \Psi} S_F \frac{\delta}{\delta \bar{\Psi}}} e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi} \Delta \frac{\delta}{\delta \phi}} \left\{ e^{-\bar{\eta} \cdot \eta + \bar{\eta} \cdot \Psi + J \cdot \phi} \right\}_{\Psi = \bar{\Psi} = \phi = 0} =$$

↳ Só estou interessado na parte que contribui para  $G_{(2,0)}^{(0)}$  ou seja com  $\eta \cdot \bar{\eta}$

$$= - \frac{\delta}{\delta \Psi} S_F \frac{\delta}{\delta \bar{\Psi}} e^{\bar{\eta} \cdot \eta + \bar{\eta} \cdot \Psi} = \bar{\eta} \cdot S_F \cdot \eta e^{\bar{\eta} \cdot \eta} \Big|_{\bar{\Psi} = \Psi = 0} = \bar{\eta} \cdot S_F \cdot \eta$$

$$G_{(2,0)}^{(0)} = \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} \left( - \frac{\delta}{\delta \eta(y)} \right) \bar{\eta} \cdot S_F \cdot \eta = \int d^4z_1 d^4z_2 \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} \bar{\eta}(z_1) S_F(z_1 - z_2) \delta_{\beta\alpha} \frac{\delta}{\delta \eta(y)} \eta(z_2)_{\alpha\beta} = S_F(x - y)_{\alpha\beta}$$

$\delta^4(y - z_2) \delta_{\beta\alpha}$



$$= S_F(x - y)_{\alpha\beta} = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left( \frac{e^{i p \cdot (x - y)}}{-\not{p} + m} \right)_{\alpha\beta}$$

(eq. 128.1)

Note que agora o sinal do momento (ou a ordem de x e y) importa!

A regra para o vértice vem trivialmente da função de três pontos:

$$G_{(2,1)}^{(1)} = \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} \left( - \frac{\delta}{\delta \eta(y)} \right) \frac{\delta}{\delta J(z)} e^{-\frac{\delta}{\delta \Psi} S_F \frac{\delta}{\delta \bar{\Psi}}} e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi} \Delta \frac{\delta}{\delta \phi}} \left\{ e^{-g \int d^4x \bar{\Psi} \Psi \phi + \bar{\eta} \cdot \eta + \bar{\eta} \cdot \Psi + J \cdot \phi} \right\}_{\Psi = \bar{\Psi} = \phi = 0}$$

↳ índice espinoriais subentendidos

$$= e^{-\frac{\delta}{\delta\psi} S_F \frac{\delta}{\delta\psi}} e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta\phi} \Delta \frac{\delta}{\delta\phi}} \left\{ \phi(z) \psi(x) \bar{\psi}(y) \underbrace{e^{-g \int d^4w \bar{\psi} \psi \phi}}_{\text{só quero o termo } O(g^1)} \right\} =$$

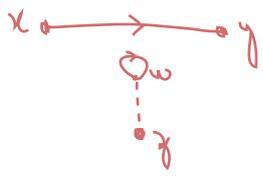
$$= e^{-\frac{\delta}{\delta\psi} S_F \frac{\delta}{\delta\psi}} e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta\phi} \Delta \frac{\delta}{\delta\phi}} (-g) \phi(z) \psi(x) \bar{\psi}(y) \int d^4w \bar{\psi}_\beta(w) \psi_\alpha(w) \phi(w) =$$

índice espinoriais subentendidos

$$= -g \int d^4w \Delta(z-w) \frac{1}{2} \left( -\frac{\delta}{\delta\psi} \cdot S_F \cdot \frac{\delta}{\delta\psi} \right) \left( -\frac{\delta}{\delta\psi} \cdot S_F \cdot \frac{\delta}{\delta\psi} \right) \psi(x) \bar{\psi}(y) \bar{\psi}_\beta(w) \psi_\alpha(w) =$$

$$\left( -\frac{\delta}{\delta\psi} \cdot S_F \cdot \frac{\delta}{\delta\psi} \right) \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) \bar{\psi}_\delta(w) \psi_\epsilon(w) =$$

$$= \int d^4z_1 d^4z_2 \left( -\frac{\delta}{\delta\psi(z_1)} S_F(z_1 - z_2) \right) \left[ -\psi_\alpha(x) \delta(z_2 - y) \delta_{\alpha\beta} \bar{\psi}_\delta(w) \psi_\epsilon(w) + \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) \delta(w - z_2) \delta_{\delta\epsilon} \psi_\epsilon(w) \right] =$$



Não quero o diagrama de bolha no vácuo:

$$= \int d^4z_1 d^4z_2 \left( -S_F(z_1 - z_2) \right) \left[ -\psi_\alpha(x) \delta(z_2 - y) \bar{\psi}_\delta(w) \delta(z_1 - w) \delta_{\alpha\beta} \delta_{\delta\epsilon} + \delta(x - z_1) \bar{\psi}_\beta(y) \delta(w - z_2) \psi_\epsilon(w) \delta_{\alpha\epsilon} \delta_{\delta\epsilon} \right] + \text{BOLHAS}$$

$$= +S_F(w - y)_{\delta\beta} \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\delta(w) - S_F(x - w)_{\alpha\delta} \bar{\psi}_\beta(y) \psi_\epsilon(w) + \text{BOLHAS}$$

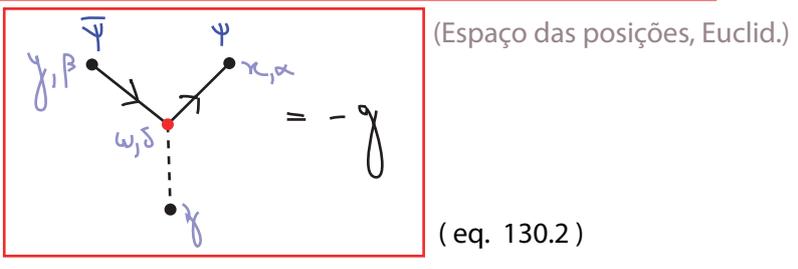
$$= -g \int d^4w \Delta(z-w) \frac{1}{2} \int d^4z_3 d^4z_4 \left( -\frac{\delta}{\delta\psi(z_3)} \cdot S_F(z_3 - z_4) \cdot \frac{\delta}{\delta\psi(z_4)} \right) \left[ +S_F(w - y) \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(w) - S_F(x - w) \bar{\psi}_\beta(y) \psi_\alpha(w) \right] =$$

$$= -g \int d^4w \Delta(z-w) \frac{1}{2} \int d^4z_3 d^4z_4 \left( -S_F(z_3 - z_4) \right) \left[ -S_F(w - y) \psi_\alpha(x) \delta(w - z_4) - S_F(x - w) \delta(y - z_4) \psi_\alpha(w) \right] =$$

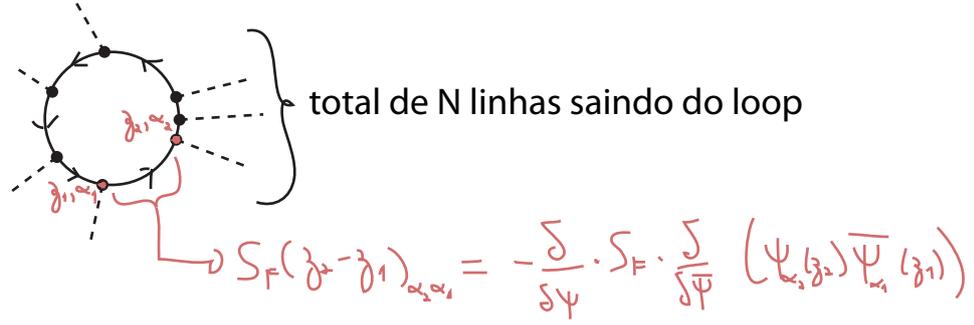
$$= -g \int d^4w \Delta(z-w) \frac{1}{2} \int d^4z_3 d^4z_4 \left( -S_F(z_3 - z_4) \right) \left[ -S_F(w - y) \delta(x - z_3) \delta(w - z_4) - S_F(x - w) \delta(y - z_4) \delta(w - z_3) \right] =$$

$$= -g \int d^4w \Delta(z-w) \frac{1}{2} \left[ S_F(x - w)_{\alpha\delta} S_F(w - y)_{\delta\beta} + S_F(w - y)_{\delta\beta} S_F(x - w)_{\alpha\delta} \right] =$$

$$G_{(A,1)}^{(1)} = -g \int d^4\omega \Delta(\gamma-\omega) S_F(x-\omega) S_F(\omega-\gamma) \quad (\text{eq. 130.1})$$



A importância do ordenamento do campo fermiônico cria uma importante diferença entre um loop fermiônico e um loop bosônico, pense no seguinte diagrama:



Temos vários termos deste tipo:

$$\left(-\frac{\delta}{\delta\psi} \cdot S_F \cdot \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}}\right) \dots \left(-\frac{\delta}{\delta\psi} \cdot S_F \cdot \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}}\right) \left(\bar{\psi}\psi\right)_1 \dots \left(\bar{\psi}\psi\right)_N \quad \leftrightarrow \quad (\bar{\psi}\psi)_i = \bar{\psi}(z_i) \psi(z_i)$$

note que estes vêm todos da interação, por isso a ordem  $\bar{\psi}\psi$

Para obter a combinação cíclica (já que é um loop):

$$S_F(z_N-z_1)_{\alpha_N\alpha_1} S_F(z_1-z_2)_{\alpha_1\alpha_2} \dots S_F(z_{N-1}-z_N)_{\alpha_{N-1}\alpha_N} = \text{Tr} \left[ S_F(z_1-z_2) \dots S_F(z_{N-1}-z_N) \right]$$

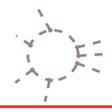
(loops de férmions geram traços)

temos que trazer o último campo para a primeira posição e então aplicar as derivadas:

$$\left(\bar{\psi}\psi\right)_1 \dots \left(\bar{\psi}\psi\right)_N = -\psi(z_N) \bar{\psi}\psi_1 \dots \bar{\psi}\psi_{N-1} \psi_N(z_N)$$

passo por 2N-1 campos

De onde vemos que, além de qualquer sinal que venha dos vértices  $(-g)^N$ , temos uma regra de Feynman nova, devemos multiplicar por sinal total negativo toda vez que aparecer um loop fermiônico. Você pode checar, por exemplo que o mesmo loop gerado em uma teoria  $\lambda\phi^3$  não tem sinal algum além do que vem dos vértices.



Regras de Feynman para interação de Yukawa:

Para uma interação geral entre férmions e um número arbitrário de escalares:

$$S_I(\bar{\Psi}, \Psi, \phi_1, \dots, \phi_n)$$

Temos uma expressão semelhante a 108.0, a regra do vértice é dada por:

$$\int d^4x d^4y d^4z_1 \dots d^4z_n e^{-i(p \cdot x + p' \cdot y + q_1 \cdot z_1 + \dots + q_n \cdot z_n)} \times$$

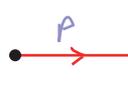
$$\times \frac{\delta}{\delta \phi_1(z_1)} \dots \frac{\delta}{\delta \phi_n(z_n)} \left( - \frac{\delta}{\delta \bar{\Psi}(y)} \frac{\delta}{\delta \Psi(x)} \right) \left[ - S_I[\bar{\Psi}, \Psi, \phi_1, \dots, \phi_n] \right]$$

(eq. 131.1)

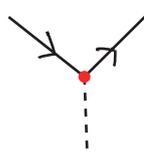
### Regras de Feynman no Espaço de Minkowsky:

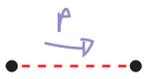
Basta fazer a rotação de volta na expressão 130.1 (os propagadores já tinham sido deduzidos anteriormente) para mostrar que

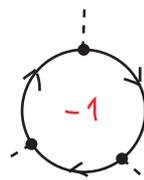
Regras de Feynman para interação de Yukawa (Minkowski):


 $= -i \frac{-i \not{p} + m}{p^2 + m^2 - i\epsilon}$ 

(direção é importante)


 $= -i g$


 $= \frac{-i}{p^2 + M^2 - i\epsilon}$



(multiplico por  $-1^L$ , onde  $L = \#$  loops fermiônicos)  
(a contração dos índices espinoriais vai produzir um traço)

(Espaço dos momentos, Mink.) (eq. 131.2)

Lembrando que um estado fermiônico pode ser escrito como:

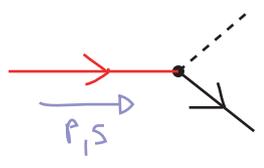
$$|p, s\rangle = \sqrt{2E_p} \alpha_p^{s+} |0\rangle$$

Então:

$$\Psi(x) |p, s\rangle = \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{p'}}} \sum_{s'} \alpha_{p'}^{s'} u^{s'}(p') e^{ip' \cdot x} \sqrt{2E_p} \alpha_p^{s+} |0\rangle =$$

$$= e^{ip \cdot x} u^s(p) |0\rangle \quad \text{(note que especificamos também o spin)}$$

estamos evitando uma discussão mais precisa das linhas externas fermiônicas até que possamos fazer isto rigorosamente (definindo a matriz de espalhamento) mas, comparando isto com o que fizemos nas páginas 64 e 65, dá para intuir que as exponenciais serão convertidas na conservação de momento total, deixando como regra da linha externa:


 $= u^s(p)$

usando o mesmo raciocínio para  $a^\dagger$ ,  $b$  e  $b^\dagger$ , chegamos a (note que estas regras só fazem sentido no espaço de Minkowski onde podemos definir um espalhamento):

Linhas externas fermiônicas

(eq. 132.1)

## Somas de Spin, Bilineares e simetrias discretas C, P e T

(Natase 14; Peskin 3.4 e 3.6)

Frequentemente estaremos calculando espalhamentos entre férmions onde:

- (1) Temos partículas sem qualquer polarização definida no início
- (2) Queremos saber a probabilidade de espalhamento, independentemente da direção do spin final

Para dar conta de um estado inicial totalmente “despolarizado” o que podemos fazer é escrever (estamos pensando em uma única partícula sendo espalhada por alguma coisa “externa”):

$$P(|N_i = \uparrow\rangle) = P(|N_i = \downarrow\rangle) = \frac{1}{2}$$

E queremos obter uma probabilidade total que é (mais a frente veremos como calcular estas amplitudes, note que os estados iniciais e finais estão em tempos diferentes):

$$P(|N_i \rightarrow \uparrow\rangle) + P(|N_i \rightarrow \downarrow\rangle)$$

Acontece que, para o estado inicial despolarizado acima:

$$P(|N_i \rightarrow \uparrow\rangle) = \frac{1}{2} P(\uparrow \rightarrow \uparrow) + \frac{1}{2} P(\downarrow \rightarrow \uparrow)$$

De forma que enfim:

$$P_{TOTAL} = \frac{1}{2} P(\uparrow \rightarrow \uparrow) + \frac{1}{2} P(\downarrow \rightarrow \uparrow) + \frac{1}{2} P(\uparrow \rightarrow \downarrow) + \frac{1}{2} P(\downarrow \rightarrow \downarrow)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{S, R = \uparrow, \downarrow} P(S \rightarrow R)$$

Na (densidade de) probabilidade final, somamos sobre os spins finais e tiramos uma média sobre os iniciais (o mesmo acontece com qualquer outro numero quântico que não observamos, por exemplo a “cor” da QCD)

Na prática, estas somas sobre spins externos, haja visto as regras 132.1, vão nos levar a calcular expressões do tipo:

$$\sum_{S=1,2} u^S(p) \bar{u}^S(p) = \sum_S \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi^S \\ \sqrt{-p \cdot \sigma} \xi^S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^{S\dagger} \sqrt{p \cdot \sigma} & \xi^{S\dagger} \sqrt{-p \cdot \sigma} \end{pmatrix} \underbrace{i \gamma^0}_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} =$$

$$= \sum_s \begin{pmatrix} \sqrt{-p \cdot \sigma} \sqrt{-p \cdot \bar{\sigma}} \xi^s \xi^{s\dagger} & \sqrt{-p \cdot \sigma} \sqrt{-p \cdot \sigma} \xi^s \xi^{s\dagger} \\ \sqrt{-p \cdot \bar{\sigma}} \sqrt{-p \cdot \bar{\sigma}} \xi^s \xi^{s\dagger} & \sqrt{-p \cdot \bar{\sigma}} \sqrt{-p \cdot \sigma} \xi^s \xi^{s\dagger} \end{pmatrix} =$$

$$\sum_s \xi^s \xi^{s\dagger} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \hat{1}_{2 \times 2}$$

$$\begin{aligned} (p_\mu \cdot \sigma^\mu)(p_\nu \cdot \bar{\sigma}^\nu) &= p_0 \sigma^0 p_0 \bar{\sigma}^0 + p_i \sigma^i p_0 \bar{\sigma}^0 + p_0 \sigma^0 p_i \bar{\sigma}^i + p_i \sigma^i p_j \bar{\sigma}^j = \\ &= (p_0)^2 - p_i p_j \sigma^i \sigma^j + p_i \sigma^i p_0 - p_0 p_i \sigma^i = \end{aligned}$$

$$p_i p_j \sigma^i \sigma^j = p_i p_j (2\delta^{ij} - \sigma^i \sigma^j) \rightarrow p_i p_j \sigma^i \sigma^j = (p_i)^2$$

$$= (p_0)^2 - (p_i)^2 = -p_\mu p^\mu = m^2$$

$$= \begin{pmatrix} m & -p \cdot \sigma \\ -p \cdot \bar{\sigma} & m \end{pmatrix} = -i \not{p} + m \hat{1}$$

$$\gamma^\mu = -i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \sum_s \vec{u}^s(p) \bar{u}^s(p) = -i \not{p} + m \quad (\text{eq. 133.1})$$

Analogamente:

$$\sum_s v^s(p) \bar{v}^s(p) = -i \not{p} - m \quad (\text{eq. 133.2})$$

## Bilineares do Campo de Dirac

Claramente, qualquer grandeza observável vai ter que ser composta do produto de um número par de campos de Dirac, uma vez que estes são números de Grassmann. Assim, qualquer objeto observável vai ser construído a partir de bilineares, que são números usuais que comutam. Mesmo em grandezas não observáveis em teoria de campos (e.g. o propagador) é comum o aparecimento de bilineares, por isso é importante entender suas propriedades. Vamos começar com o bilinear mais simples:

$j_s = \bar{\Psi} \Psi \rightarrow$  Escalar de Lorentz (por construção, inventamos  $\bar{\Psi}$  justamente para este fim)

O próximo que nos interessa é:

$$j^N = \bar{\Psi} \gamma^N \Psi \longrightarrow \bar{\Psi} M_D^{-1} \gamma^N M_D \Psi = \Lambda^N_\nu \bar{\Psi} \gamma^\nu \Psi = \Lambda^N_\nu j^\nu$$

$M_D^{-1}(\Lambda) \gamma^N M_D(\Lambda) = \Lambda^N_\nu \gamma^\nu$