$$=\sum_s \begin{pmatrix} \sqrt{-p\cdot\sigma}\sqrt{-p\cdot\bar{\sigma}}\;\xi^s\xi^{s+} & \sqrt{-p\cdot\sigma}\sqrt{-p\cdot\sigma}\;\xi^s\xi^{s+} \\ \sqrt{-p\cdot\bar{\sigma}}\sqrt{-p\cdot\bar{\sigma}}\;\xi^s\xi^{s+} & \sqrt{-p\cdot\bar{\sigma}}\sqrt{-p\cdot\sigma}\;\xi^s\xi^{s+} \end{pmatrix} =$$

$$\sum_s \xi^s\xi^{s+} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(1\ \ 0) + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(0\ \ 1) = \hat{1}_{2\times 2}$$

$$(p_\mu\cdot\sigma^\mu)(p_\nu\bar{\sigma}^\nu) = p_0\sigma^0 p_0\bar{\sigma}^0 + p_i\sigma^i p_0\bar{\sigma}^0 + \underbrace{p_0\sigma^0 p_i\bar{\sigma}^i} + p_i\sigma^i p_j\bar{\sigma}^j =$$

$$= (p_0)^2 - p_i p_j \sigma^i\sigma^j + p_i\sigma^i p_0 - p_0 p_i\sigma^i =$$

$$p_i p_j \sigma^i\sigma^j = p_i p_j(2\delta^{ij} - \sigma^j\sigma^i) \longrightarrow p_i p_j \sigma^i\sigma^j = (p_i)^2$$

$$= (p_0)^2 - (p_i)^2 = -p_\mu p^\mu = m^2$$

$$= \begin{pmatrix} m & -p\cdot\sigma \\ -p\cdot\bar{\sigma} & m \end{pmatrix} = -i\not{p} + m\hat{1}$$

$$\gamma^\mu = -i\begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \boxed{\sum_s u^s(p)\,\bar{u}^s(p) = -i\not{p} + m} \quad \text{(eq. 133.1)}$$

Analogamente:

$$\boxed{\sum_s v^s(p)\,\bar{v}^s(p) = -i\not{p} - m} \quad \text{(eq. 133.2)}$$

Bilineares do Campo de Dirac

Claramente, qualquer grandeza observável vai ter que ser composta do produto de um número par de campos de Dirac, uma vez que estes são números de Grassmann. Assim, qualquer objeto observável vai ser construído a partir de bilineares, que são números usuais que comutam. Mesmo em grandezas não observáveis em teoria de campos (e.g. o propagador) é comum o aparecimento de bilineares, por isso é importante entender suas propriedades. Vamos começar com o bilinear mais simples:

$j_s = \bar{\psi}\psi \longrightarrow$ Escalar de Lorentz (por construção, inventamos $\bar{\psi}$ justamente para este fim)

O próximo que nos interessa é:

$$M_D^{-1}(\Lambda)\,\gamma^\mu M_D(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu\,\gamma^\nu$$

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \longrightarrow \bar{\psi} M_D^{-1}\gamma^\mu M_D\psi = \Lambda^\mu{}_\nu\,\bar{\psi}\gamma^\nu\psi = \Lambda^\mu{}_\nu\, j^\nu$$

Que outros poderíamos ter? A forma mais sistemática de buscar seria definir:

$$j_\Gamma = \bar{\psi}\,\Gamma\,\psi$$

Onde Γ é qualquer matriz 4x4, e então decompor esta matriz em uma base para as matrizes 4x4. Dada esta base, podemos definir um produto escalar neste espaço de matrizes e construir uma métrica:

$$Tr\left[\Gamma_a \Gamma_b\right] = g_{ab}$$

(produto escalar)

$a, b = 1, \ldots, 16$

Que pode ser usada, para baixar e levantar índices: $\Gamma^a = g^{ab}\,\Gamma_b$

Qualquer matriz pode ser expandida nesta base: $\underbrace{M}_{\text{matrizes}} = \underbrace{M^a}_{\text{número}} \underbrace{\Gamma_a}_{\text{matrizes}}$

$$\boxed{M^a = Tr\left(M\,\Gamma^a\right)} \quad \text{(eq. 134.1)}$$

$M^a = Tr\left(M^b \Gamma_b \Gamma^a\right) = M^b\, Tr\left(\Gamma_b \Gamma^a\right) =$
$= M^b g_b{}^a$

$$M_{ij} = M_{lk}\left(\Gamma^a\right)_{kl}\left(\Gamma_a\right)_{ij}$$

$$\delta_{il}\,\delta_{jk}\,M_{lk} = M_{lk}\left(\Gamma^a\right)_{kl}\left(\Gamma_a\right)_{ij}$$

$$\boxed{\delta_{il}\,\delta_{jk} = \left(\Gamma^a\right)_{kl}\left(\Gamma_a\right)_{ij}} \quad \text{(eq. 134.2)}$$

Suponha agora que estejamos calculando:

$$\left(\bar{\psi}_1 A \psi_2\right)\left(\bar{\psi}_3 B \psi_4\right) = \left(\bar{\psi}_1\right)_i A_{ij}\left(\psi_2\right)_j \left(\bar{\psi}_3\right)_k B_{kl}\left(\psi_4\right)_l$$

$$A_{ij} B_{kl} = A^a B^b \left(\Gamma_a\right)_{ij}\left(\Gamma_b\right)_{kl}$$

Podemos reescrever a mesma expressão em termos de outras duas matrizes, para as quais valha:

$$\left(\bar{\psi}_1 M \psi_4\right)\left(\bar{\psi}_3 N \psi_2\right) = \left(\bar{\psi}_1\right)_i M_{il}\left(\psi_4\right)_l \left(\bar{\psi}_3\right)_k N_{kj}\left(\psi_2\right)_j$$

$$M_{il} N_{kj} = M^c N^d \left(\Gamma_c\right)_{il}\left(\Gamma_d\right)_{kj}$$

Para encontrar a relação entre $A_{ij} B_{kl}$ e $M_{il} N_{kj}$ basta encontrar a relação entre $\left(\Gamma_a\right)_{ij}\left(\Gamma_b\right)_{kl}$ e $\left(\Gamma_a\right)_{il}\left(\Gamma_b\right)_{kj}$ dada pela combinação linear:

$$\boxed{\left(\Gamma_a\right)_{ij}\left(\Gamma_b\right)_{kl} = C_{ab}{}^{cd}\left(\Gamma_c\right)_{il}\left(\Gamma_d\right)_{kj}} \quad \text{(eq. 134.3)}$$

Multiplicando esta expressão por $(\Gamma_e)_{\ell n}(\Gamma_f)_{jk}$ temos:

$$\underbrace{(\Gamma_a)_{ij}(\Gamma_b)_{k\ell}(\Gamma_e)_{\ell n}(\Gamma_f)_{jk}}_{Tr[\Gamma_a \Gamma_f \Gamma_b \Gamma_e]} = C_{ab}^{\ \ cd}\,(\Gamma_c)_{i\ell}(\Gamma_d)_{kj}(\Gamma_e)_{\ell n}(\Gamma_f)_{jk}$$

$$\to Tr[\Gamma_c \Gamma_e] = g_{ce} \qquad \to g_{df}$$

$$\boxed{C_{abcd} = Tr[\Gamma_a \Gamma_d \Gamma_b \Gamma_c]}$$ (eq. 135.1)

As equações 134.3 e 135.1 nos permitem re-arranjar produtos de bilineares e são conhecidas como fórmulas de rearranjo de Fierz. Conhecendo o coeficiente 135.1 podemos escrever:

$$A_{ij}B_{k\ell} = A^a B^b (\Gamma_a)_{ij}(\Gamma_b)_{k\ell} = A^a B^b C_{ab}^{\ \ cd}(\Gamma_c)_{i\ell}(\Gamma_d)_{kj}$$

$$\times (\bar{\psi}_1)_i (\psi_2)_j (\bar{\psi}_3)_k (\psi_4)_\ell$$

$$(\bar{\psi}_1 A \psi_2)(\bar{\psi}_3 B \psi_4) = A^a B^b (\bar{\psi}_1 \Gamma_a \psi_2)(\bar{\psi}_3 \Gamma_b \psi_4) =$$

$$= \underbrace{-A^a B^b C_{ab}^{\ \ cd}}_{M^c N^d}(\bar{\psi}_1 \Gamma_c \psi_4)(\bar{\psi}_3 \Gamma_d \psi_2)$$

Identidade de Fierz

$$\boxed{(\bar{\psi}_1 \Gamma_a \psi_2)(\bar{\psi}_3 \Gamma_b \psi_4) = -C_{ab}^{\ \ cd}(\bar{\psi}_1 \Gamma_c \psi_4)(\bar{\psi}_3 \Gamma_d \psi_2)}$$ (eq. 135.2)

Outra forma bastante útil é obtida multiplicando 134.2 por $(\psi_2)_\ell(\bar{\psi}_3)_k(B\psi_4)_j$

$$\Rightarrow (\psi_2)_i(\bar{\psi}_3 B \psi_4) = -(\bar{\psi}_3)_k(\Gamma^a)_{k\ell}(\psi_2)_\ell(\Gamma_a B\psi_4)_i$$

$$(\psi_2)_i(\bar{\psi}_3 B \psi_4) = -(B\psi_4)_i(\bar{\psi}_3 \Gamma^a \psi_2)$$

Que então multiplicamos por $(\bar{\psi}_1 A)_i$

$$\boxed{(\bar{\psi}_1 A \psi_2)(\bar{\psi}_3 B \psi_4) = -(\bar{\psi}_1 A \Gamma_a B \psi_4)(\bar{\psi}_3 \Gamma^a \psi_2)}$$ (eq. 135.3)

Especificando a base como:

$$O_i = \left\{ \underbrace{\hat{1}_{4\times4}}_{1\ \text{matriz}},\ \underbrace{\gamma^\mu}_{4},\ \underbrace{\gamma_5}_{1},\ \underbrace{\gamma^\mu\gamma_5}_{4},\ \gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu] \equiv \underbrace{\frac{1}{2}\gamma^{[\mu}\gamma^{\nu]}}_{6 = \frac{4\cdot 3}{2}} \right\}$$ (eq. 135.4)

$$\to [\gamma^\mu,\gamma^\nu] = -[\gamma^\nu,\gamma^\mu]$$

E exigindo a normalização:

$$\mathrm{Tr}\left[\mathcal{O}_i\,\mathcal{O}_j\right] = 4\,\delta_{ij}$$

Rigorosamente: $\mathcal{O} = \{\hat{1}, i\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma_5, \gamma^0\gamma^5, i\gamma^1\gamma^5, i\gamma^2\gamma^5, i\gamma^3\gamma^5, \gamma^{01}, \gamma^{02}, \gamma^{03}, i\gamma^{12}, i\gamma^{13}, i\gamma^{23}\}$

Temos a relação de completeza:

$$\delta^{\beta}{}_{\alpha}\,\delta^{\delta}{}_{\gamma} = \frac{1}{4}\left(\mathcal{O}_i\right)^{\delta}{}_{\alpha}\left(\mathcal{O}_i\right)^{\beta}{}_{\gamma}$$

SOMADO

Que leva a uma eq. equivalente a 135.3:

$$\boxed{\left(\bar{\Psi}_1 A \Psi_2\right)\left(\bar{\Psi}_3 B \Psi_4\right) = -\frac{1}{4}\left(\bar{\Psi}_1 A\,\mathcal{O}_i\,B\,\Psi_4\right)\left(\bar{\Psi}_3\,\mathcal{O}_i\,\Psi_2\right)} \qquad \text{(eq. 136.1)}$$

Dada a base 135.4, não precisamos nos preocupar com "estruturas" de Dirac mais complicadas, pois podem ser escritas nessa base. Por exemplo:

$$\gamma_{[\mu\nu\rho]} \equiv \underbrace{\gamma_{[\mu}\gamma_{\nu}\gamma_{\rho]}} \propto \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\gamma^{\sigma}\gamma_5$$

produto completamente antissimétrico

$\mu\nu\rho - \nu\mu\rho - \mu\rho\nu + \rho\mu\nu - \rho\nu\mu + \nu\rho\mu$

$$\gamma_{[\mu\nu\rho\sigma]} \propto \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\gamma_5$$

Definindo a terminologia, dado um bilinear $\bar{\psi}\Gamma\psi$, chamamos:

$\Gamma = \hat{1} \Rightarrow \bar{\psi}\psi$ escalar

$\Gamma = \gamma_5 \Rightarrow \bar{\psi}\psi$ pseudo-escalar

$\Gamma = \gamma^{\mu} \Rightarrow \bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$ vetor

$\Gamma = \gamma^{\mu}\gamma_5 \Rightarrow \bar{\psi}\gamma^{\mu}\gamma_5\psi$ pseudo-vetor ou vetor axial

$\Gamma = \gamma^{\mu\nu} \Rightarrow \bar{\psi}\gamma^{\mu\nu}\psi$ tensor antissimétrico

Se ψ satisfaz a equação de Dirac, vemos que a corrente vetorial é conservada:

$$j^\mu \equiv \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \Longrightarrow \boxed{\partial_\mu j^\mu = \underbrace{(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu}_{\not{\partial}\bar{\psi} = m\bar{\psi}}\psi + \bar{\psi}\underbrace{\gamma^\mu\partial_\mu\psi}_{\not{\partial}\psi = -m\psi} = m\bar{\psi}\psi - m\bar{\psi}\psi = 0}$$

(eq. 137.1)

No entanto a corrente axial:

$$\partial_\mu j^{\mu 5} \equiv \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi \Rightarrow \partial_\mu j^{\mu 5} = (\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\gamma_5\psi + \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\partial_\mu\psi =$$

$$= \not{\partial}\bar{\psi}\gamma_5\psi - \bar{\psi}\gamma_5\not{\partial}\psi = 2m\bar{\psi}\gamma_5\psi$$

só é conservada se o férmion em questão não tiver massa: $\boxed{m = 0 \Rightarrow \partial_\mu j^{\mu 5} = 0}$ (eq. 137.2)

Simetrias C, P e T para férmions

Além da simetria de Lorentz (uma transformação contínua do espaço tempo) podemos ver se a nossa Lagrangeana é simetrica sobre transformações discretas do espaço tempo. Definimos:

Transformação de Paridade: $P: \; (t, \vec{x}) \rightarrow (t, -\vec{x})$

Inversão temporal: $T: \; (t, \vec{x}) \rightarrow (-t, \vec{x})$

Estas transformações podem ou não ser simetrias, não há nada que as exija a priori. Embora estas transformações não sejam contínuas, elas mantém $s^2 = \vec{x}^2 - t^2$ invariante e fazem parte do grupo de Lorentz, que pode ser dividido:

Transformações de Lorentz (parte contínua do grupo)

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{L}^{\uparrow}_{+} & \overset{P}{\longleftrightarrow} & \mathbf{L}^{\uparrow}_{-} = P\mathbf{L}^{\uparrow}_{+} & & \text{“orthochronous”} \\
T \updownarrow & & \updownarrow T & & \\
\mathbf{L}^{\downarrow}_{+} = T\mathbf{L}^{\uparrow}_{+} & \underset{P}{\longleftrightarrow} & \mathbf{L}^{\downarrow}_{-} = PT\mathbf{L}^{\uparrow}_{+} & & \text{“nonorthochronous”} \\
\text{“proper”} & & \text{“improper”} & &
\end{array}$$

Podemos ainda definir uma outra transformação:

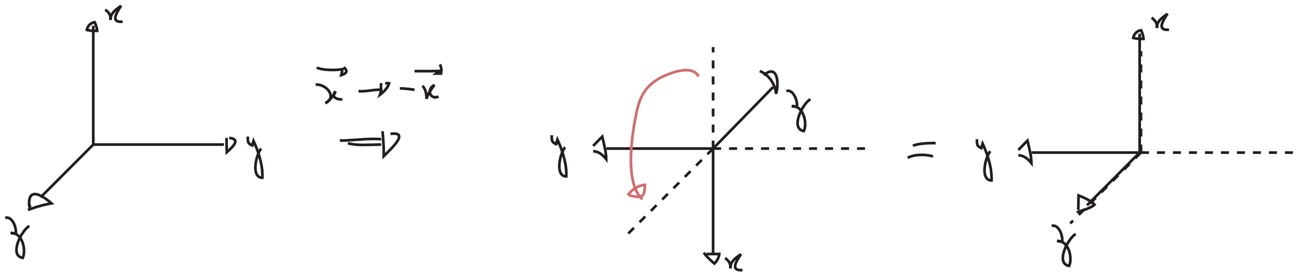
Conjugação de Carga: $C:$ PARTÍCULA ⟷ ANTI PARTÍCULA

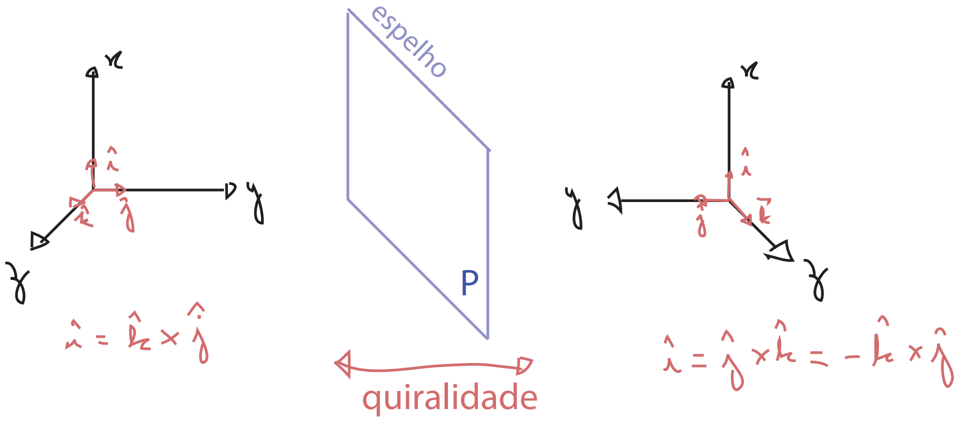
(veremos mais a frente como definir isso))

Por muito tempo acreditou-se que as simetrias C, P e T eram, SEPARADAMENTE, simetrias da física, pois tanto a gravitação quanto o eletromagnetismo (e depois as interações fortes) respeitavam esta simetria, mas aí as interações fracas vieram para estragar a alegria: as primeiras medidas indicavam que a teoria era invariante sobre transformações CP, mas não C e P separadamente (a quebra da simetria de paridade foi bastante surpreendente). Sabemos hoje que há também uma pequena violação de CP gerada pelas interações fracas e esperamos uma violação ainda maior proveniente de alguma teoria além do modelo padrão, pois esta é necessária para explicar a assimetria entre matéria e antimatéria. A simetria sobre transformações CPT no entanto deve ser respeitada (segundo o Teorema CPT, que assume uma série de coisas "sensatas": invariancia de Lorentz da teoria e do vácuo, energia tem um mínimo global, comutatividade das coordenadas espaciais, localidade, unitariedade - uma prova do teorema e mais referências podem ser encontradas na seção 5.8 do Weinberg) o que implica uma violação de T. Vamos encontrar representações destas transformações:

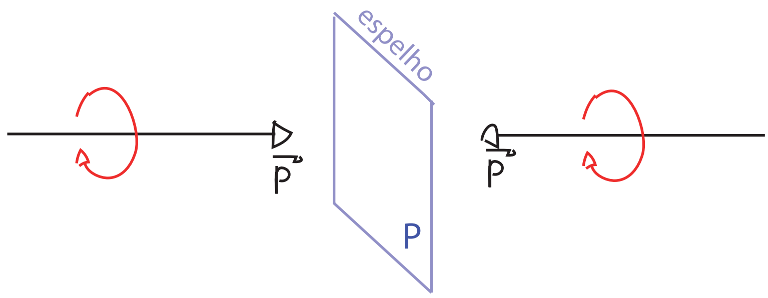
Paridade:

Primeiramente note que P é o mesmo que ocorre em uma reflexão no espelho:





Isso quer dizer, dado uma partícula com spin (ou helicidade ou qualquer momento angular), cuja projeção da direção do momento é representada por uma rotação em torno do eixo definido por este, sofrerá a seguinte transformação:



Note que o momento é invertido mas não o spin.

Se codificarmos toda a ação de P como um operador unitário agindo sobre os outros operadores da teoria (os de criação e aniquilação), isto implica que:

$$P a^s_{\vec{p}} P^{-1} = \underbrace{\eta_a} a^s_{-\vec{p}} \qquad\qquad P b^s_{\vec{p}} P^{-1} = \underbrace{\eta_b} b^s_{-\vec{p}} \qquad \text{(eq. 138.1)}$$

possíveis fases (paridade intrínseca)

Aplicar P duas vezes deveria nos trazer de volta ao sistema original, logo: $\boxed{P^2 = \mathbb{1}}$ (eq. 139.1)

$$P^{\dagger} = \boxed{P^{-1} = P} \quad \text{(eq. 139.2)}$$

unitária

$$\therefore \; \eta_a^2 = \eta_b^2 = \pm 1$$ (sinal que sempre vai sumir em bilineares)

definindo: $\tilde{p} = (p^0, -\vec{p})$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \gamma^0 = -i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{-p\cdot\sigma}\,\xi \\ \sqrt{-p\cdot\bar{\sigma}}\,\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{-\tilde{p}\cdot\bar{\sigma}}\,\xi \\ \sqrt{-\tilde{p}\cdot\sigma}\,\xi \end{pmatrix} = i\gamma^0 u(\tilde{p})$$

$$\bar{\sigma} = (1, -\vec{\sigma}), \quad \sigma = (1, \vec{\sigma}) \Rightarrow \begin{cases} p\cdot\sigma = -p^0\sigma^0 + \vec{p}\cdot\vec{\sigma} = \tilde{p}\cdot\bar{\sigma} \\ p\cdot\bar{\sigma} = -p^0\sigma^0 - \vec{p}\cdot\vec{\sigma} = \tilde{p}\cdot\sigma \end{cases}$$

$$v(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{-p\cdot\sigma}\,\xi \\ -\sqrt{-p\cdot\bar{\sigma}}\,\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{-\tilde{p}\cdot\bar{\sigma}}\,\xi \\ -\sqrt{-\tilde{p}\cdot\sigma}\,\xi \end{pmatrix} = -i\gamma^0 v(\tilde{p})$$

$$p\cdot x = -p^0 t + \vec{p}\cdot\vec{x} = -p^0 t - (-\vec{p})\cdot\vec{x} = \tilde{p}\cdot(t, -\vec{x})$$

então:

Note que P só agiu sobre a e b

$$P\psi(x)P^{\dagger} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}}\sum_s \left(\eta_a a^s_{-\vec{p}} u^s(p) e^{ipx} + \eta_b^* b^{s\dagger}_{-\vec{p}} v^s(p) e^{-ipx} \right) =$$

$$\boxed{= \int \frac{d^3\tilde{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{\tilde{p}}}}}\sum_s \left(\eta_a a^s_{\vec{\tilde{p}}}\, i\gamma^0 u^s(\tilde{p}) e^{i\tilde{p}(t,-\vec{x})} - \eta_b^* b^{s\dagger}_{\vec{\tilde{p}}}\, i\gamma^0 v^s(\tilde{p}) e^{-i\tilde{p}(t,-\vec{x})} \right)}$$

(note que a transformação de x saiu como esperado) (eq. 139.3)

Para que a integral acima seja outro campo ψ, ou seja, para que $\psi(x)|0\rangle$ tenha paridade bem definida, exigimos:

$$\eta_b^* = -\eta_a$$ (estamos escolhendo uma representação ao fazer isso)

neste caso: $\boxed{P\psi(x)P = \eta_a\, i\gamma^0 \psi(t, -\vec{x})}$ (eq. 139.4)

$$(P\psi(x)P)^{\dagger} = P\psi^{\dagger}(x)P = -i\eta_a^* \psi^{\dagger}(t,-\vec{x})\underbrace{\gamma^{0\dagger}}_{-\gamma^0} = i\eta_a^*\psi^{\dagger}(t,-\vec{x})\gamma^0$$

$$\therefore \; \boxed{P\bar{\psi}(x)P = P\psi^{\dagger} i\gamma^0 P} = (P\psi(x)P)^{\dagger} i\gamma^0 \boxed{= i\eta_a^*\, \bar{\psi}(t,-\vec{x})\gamma^0} \quad \text{(eq. 139.5)}$$

Vejamos agora as propriedades dos bilineares. O escalar de fato se comporta como tal:

$$\boxed{\bar\psi\psi} \xrightarrow{P} P\bar\psi\psi P = P\bar\psi \underbrace{PP}_{1}\psi P = -\underbrace{|\eta_a|^2}_{1}\,\bar\psi(t,-\vec{x})\underbrace{(\gamma^0)^2}_{-1}\psi(t,-\vec{x}) = \boxed{(\bar\psi\psi)(t,-\vec{x})}$$

(eq. 140.1)

já o pseudo-escalar (daí o "pseudo"):

$$\boxed{\bar\psi\gamma_5\psi} \xrightarrow{P} P\bar\psi P\gamma_5 P\psi P = -\bar\psi(t,-\vec{x})\,\gamma^0\underbrace{\gamma_5\gamma^0}_{-1}\psi(t,-\vec{x}) = \boxed{-(\bar\psi\gamma_5\psi)(t,-\vec{x})}$$

(eq. 140.2)

e:

$$\boxed{\bar\psi\gamma^\mu\psi} \xrightarrow{P} -\bar\psi(t,-\vec{x})\underbrace{\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0}\psi(t,-\vec{x}) = \boxed{(-1)^\mu(\bar\psi\gamma^\mu\psi)(t,-\vec{x})}$$

(eq. 140.3)

$\mu=0 \Rightarrow -\gamma^0$

$\mu=i \Rightarrow +\gamma^i$

$$(-1)^\mu = \begin{cases} 1 & \mu = 0 \\ -1 & \mu \neq 0 \end{cases}$$

(a parte espacial inverte de sinal e a temporal não, exatamente o que esperávamos de um vetor sob uma transformação de paridade)

$$\boxed{\bar\psi\gamma^\mu\gamma_5\psi} \xrightarrow{P} -\bar\psi(t,-\vec{x})\,\gamma^0\gamma^\mu\gamma_5\gamma^0\psi(t,-\vec{x}) = \boxed{-(-1)^\mu(\bar\psi\gamma^\mu\psi)(t,-\vec{x})}$$

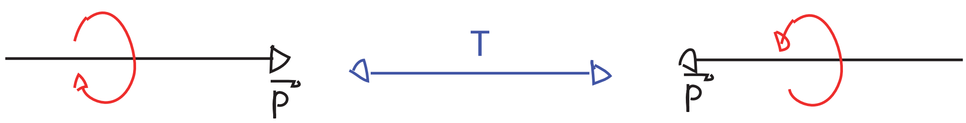
(eq. 140.4)

sinal extra

(como um vetor, mas com sinal errado, daí o pseudo-vetor)

Inversão Temporal:

A inversão temporal reverte na direção do tempo, isso significa que vamos inverter o momento e o sentido das rotações (e do spin):



queremos então: $\begin{cases} \vec{p} \to -\vec{p} \\ S \to -S \\ (t,\vec{x}) \to (-t,\vec{x}) \end{cases}$

momentos angulares (e spins) são invertidos

Mas já vimos acima que a inversão do momento, por meio de um operador linear, inverte o sinal da posição e não do tempo. Este aparente beco sem saída aparece porque T não pode ser implementada como um operador linear (tem uma prova disso na pg 67 do Peskin) mas sim por um operador antilinear:

$$T\underbrace{z}_{\text{c-number}} = z^* T \qquad T^\dagger = T^{-1}$$

(T age nos números complexos também)

mais uma vez: $T^2 = 1 \Rightarrow T^\dagger = T = T^{-1}$

e então: $$\boxed{T a^s_{\vec{p}} T = a^{-s}_{-\vec{p}}} \quad \boxed{T b^s_{\vec{p}} T = b^{-s}_{-\vec{p}}}$$

(eq. 140.5)

A antilinearidade implica em:

$$T a^s_{\vec{p}}\, u^s(p) e^{ipx} T = a^{-s}_{-\vec{p}} \left[u^s(p)\right]^* e^{-ipx}$$

$$T b^{s+}_{\vec{p}}\, v^s(p) e^{-ipx} T = -\left(b^{-s}_{-\vec{p}}\right)^+ \left[v^s(p)\right]^* e^{ipx}$$

Considere uma base de spin mais geral do que $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, com a orientação do spin dada por dois ângulos θ e ϕ em relação ao eixo z:

$$\xi(\uparrow) = R(\theta,\phi)\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{\hat{z}} = \begin{pmatrix}\cos(\theta/2)\\ e^{i\phi}\,\mathrm{sen}(\theta/2)\end{pmatrix}$$

$$\xi(\downarrow) = R(\theta,\phi)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-e^{i\phi}\,\mathrm{sen}(\theta/2)\\ \cos(\theta/2)\end{pmatrix}$$

$$\xi^s \begin{cases} \xi^1 = \xi(\uparrow) \\ \xi^2 = \xi(\downarrow)\end{cases} \qquad \xi^s = \left(\xi(\uparrow), \xi(\downarrow)\right)$$

preciso achar ξ^{-s}

dado que: $\vec{\sigma}\,\sigma_2 = \sigma_2\left(-\vec{\sigma}^*\right)$

Se escolhermos um eixo $\vec{n}$ tal que: $\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\,\xi^+ = +\xi^+$ então $(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\overbrace{\left(-i\sigma_2\xi^*\right)}^{\xi^-} =$

$$= \cancel{-}i\sigma_2\underbrace{\left(\cancel{-}\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right)^*\xi^*}_{\left(\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\,\xi\right)^* = +\xi} = i\sigma_2\xi^* = -\underbrace{\left(-i\sigma_2\xi^*\right)}_{\xi^-}$$

operador proj. de spin

$\vec{n} = (0,0,1)$

$\vec{n}\cdot\vec{\sigma} = \sigma^3 = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

$$\boxed{\xi^{-s} \equiv -i\sigma_2\left(\xi^s\right)^*} \quad \text{(eq. 141.1)}$$

$$-i\sigma_2 = \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} -i\sigma_2\,\xi(\uparrow) = \xi(\downarrow) \\ -i\sigma_2\,\xi(\downarrow) = -\xi(\uparrow) \\ -i\sigma_2(-\xi(\uparrow)) = -\xi(\downarrow) \\ -i\sigma_2(-\xi(\downarrow)) = \xi(\uparrow) \end{cases}$$

quatro inversões para chegar no orginal

duas inversões resultam em um sinal (-)

$$\xi^{-s} = \left(\xi(\downarrow), -\xi(\uparrow)\right) \Leftarrow$$

$a^{-s}_{\vec{p}}$ deve fazer o mesmo, trocando ξ^s por ξ^{-s} na função de onda do estado que ele cria, definimos:

$$\boxed{a^{-s}_{\vec{p}} = \left(a^2_{\vec{p}}, -a^1_{\vec{p}}\right) \quad \text{E} \quad b^{-s}_{\vec{p}} = \left(b^2_{\vec{p}}, -b^1_{\vec{p}}\right)} \quad \text{(eq. 141.1)}$$

Para os espinores temos:

$$u^{-s}(\tilde p) = \begin{pmatrix} \sqrt{-\tilde p\cdot\sigma}\,(-i\sigma^2\xi^{s*}) \\ \sqrt{-\tilde p\cdot\bar\sigma}\,(-i\sigma^2\xi^{s*})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sigma^2\sqrt{-p\cdot\sigma^*}\,\xi^{s*} \\ -i\sigma^2\sqrt{-p\cdot\bar\sigma^*}\,\xi^{s*}\end{pmatrix} =$$

(basta expandir a raiz em p e notar que:)

$$(\tilde p\cdot\sigma)\sigma^2 = \left[\tilde p^0\cdot\hat 1 - \tilde p^i\sigma^i\right]\sigma^2 = \sigma^2\left[\underbrace{\tilde p^0}_{p^0}\cdot\hat 1 + \underbrace{\tilde p^i}_{-p^i}(+\sigma^i)^*\right] = \sigma^2\left[p^0\cdot\hat 1 - p^i\sigma^{i*}\right] = \sigma^2(p\cdot\sigma^*)$$

$$= -i\begin{pmatrix}\sigma^2 & 0\\ 0 & \sigma^2\end{pmatrix}[u^s(p)]^* = \gamma^1\gamma^3[u^s(p)]^*$$

basta multiplicar os dois lados por $\gamma^1\gamma^3$ e: $\begin{cases}(\gamma^i)^2 = -1\\ \gamma^1\gamma^3 = -\gamma^3\gamma^1\end{cases}$

Invertendo a relação obtemos: $\boxed{[u^s(p)]^* = -\gamma^1\gamma^3 u^{-s}(\tilde p)}$ (eq. 142.1)

da mesma forma: $\boxed{[v^s(p)]^* = -\gamma^1\gamma^3 v^{-s}(\tilde p)}$ (eq. 142.2)

$$T b^s_{\vec p} T = b^{-s}_{-\vec p}\qquad T^\dagger b^{s\dagger}_{\vec p} T^\dagger = b^{-s\dagger}_{-\vec p}\qquad T = T^\dagger$$

Juntando tudo em ψ temos:

$$\boxed{T\psi T} = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\vec p}}}\sum_s T\left(a^s_{\vec p}\, u^s(p)\, e^{ipx} + b^{s\dagger}_{\vec p}\, v^s(p)\, e^{-ipx}\right)T =$$

$$= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\vec p}}}\sum_s\left(a^{-s}_{-\vec p}\,\underbrace{u^s(p)^*}_{-\gamma^1\gamma^3 u}\, e^{-ipx} + b^{-s\dagger}_{-\vec p}\,\underbrace{v^s(p)^*}_{-\gamma^1\gamma^3 v}\, e^{+ipx}\right) =$$

$$\{p\cdot x = \tilde p(t,-\vec x)\}$$

$$= -\gamma^1\gamma^3\int\frac{d^3\tilde p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{\tilde p}}}}\sum_s\left(a^{-s}_{\vec{\tilde p}}\, u^{-s}(\tilde p)\, e^{i\tilde p(-t,\vec x)} + b^{-s\dagger}_{-\vec p}\, v^{-s}(\tilde p)\, e^{-i\tilde p(-t,\vec x)}\right) =$$

$$\boxed{= -\gamma^1\gamma^3\,\psi(-t,\vec x)}$$ (eq. 142.3)

Para os bilineares precisamos de: $T\bar\psi T = T\psi^\dagger i\gamma^0 T = \underbrace{T\psi^\dagger T}_{-\psi^\dagger(-t,\vec x)\gamma^3\gamma^1}\underbrace{(i\gamma^0)^*}_{i\gamma^0} = \bar\psi(-t,\vec x)\gamma^1\gamma^3$

E obtemos:

$$T\bar\psi\psi T = \bar\psi_{-t}\gamma^1\gamma^3(-\gamma^1\gamma^3)\psi_{-t} = (\bar\psi\psi)(-t,\vec x)$$

$$T\bar\psi\gamma_5\psi T = \bar\psi_{-t}\gamma^1\gamma^3\gamma_5^*(-\gamma^1\gamma^3)\psi_{-t} = +(\bar\psi\gamma_5\psi)(-t,\vec x)$$

$$T\, i\bar\psi\gamma_5\psi T = i^*\,\bar\psi_{-t}\gamma^1\gamma^3\gamma_5^*(-\gamma^1\gamma^3)\psi_{-t} = -(i\bar\psi\gamma_5\psi)(-t,\vec x)$$

$$T\bar\psi\gamma^\mu\psi T = \bar\psi_{-t}\gamma^1\gamma^3\gamma^{\mu*}(-\gamma^1\gamma^3)\psi_{-t} = (-1)^\mu(\bar\psi\gamma^\mu\psi)(-t,\vec x)$$

$$\left.\begin{array}{l}\gamma^{0*} = -\gamma^0 \Rightarrow \gamma^1\gamma^3(-\gamma^0)\gamma^1\gamma^3 = \gamma^0\\ \gamma^{1*} = -\gamma^1 \Rightarrow \gamma^1\gamma^3(-\gamma^1)\gamma^1\gamma^3 = -\gamma^1\\ \gamma^{2*} = \gamma^2 \Rightarrow \gamma^1\gamma^3(+\gamma^2)\gamma^1\gamma^3 = -\gamma^2\\ \gamma^{3*} = -\gamma^3 \Rightarrow \gamma^1\gamma^3(-\gamma^3)\gamma^1\gamma^3 = -\gamma^3\end{array}\right\}\ \underbrace{(-1)^\mu}_{\substack{+1\ /\ \mu=0\\ -1\ /\ \mu=1,2,3}}\gamma^\mu$$