

Fazemos uma mudança de variáveis em A: $A \rightarrow A - \partial_\mu \chi$
 $\partial_\mu \chi A_\nu \rightarrow \partial_\mu A_\nu$

Já sabemos que a ação é invariante de Gauge, então: $S[A] \rightarrow S[A]$

e vamos assumir que $O[A]$ também tenha esta propriedade (o que é obrigatório para qualquer observável): $O[A] \rightarrow O[A]$

$$\therefore \int \mathcal{D}A e^{-S[A]} O[A] = \mathcal{D}_{ET}(-\partial^2) N(\epsilon) \left(\int \mathcal{D}\chi \right) \int \mathcal{D}A e^{-S[A] - \frac{1}{2\alpha} \int d^4x (\partial_\mu A_\mu)^2} O[A] \quad (\text{eq. 156.1})$$

Não há mais nada dependendo de χ , logo esta integral é só um número (infinito).

Esta é de fato a expressão que buscávamos, pois conseguimos fatorar a integração sobre o parâmetro de Gauge. Todas as constantes fora da integral em A são irrelevantes pois qualquer correlator vai ser obtido via:

$$\langle O[A] \rangle = \frac{\int \mathcal{D}A O(A) e^{-S[A]} \uparrow}{\int \mathcal{D}A e^{-S[A]} \uparrow} = \frac{\int \mathcal{D}A O(A) e^{-S_{\text{EFF}}[A]}}{\int \mathcal{D}A e^{-S_{\text{EFF}}[A]}}$$

Onde:

$$S_{\text{EFF}}[A] \equiv \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^2 + \underbrace{\frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A_\mu)^2}_{S_{\text{GF}} \text{ (Gauge Fixing)}} \quad (\text{eq. 156.2})$$

O propagador do Fóton:

Podemos agora usar a nova Lagrangeana para obter o propagador do fóton. Integrando por partes podemos escrever:

$$S_{\text{EFF}} = \int d^4x \left[-\frac{1}{2} A_\mu (\partial_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu) A_\nu \right] - \underbrace{\frac{1}{2\alpha} A_\mu \partial_\mu \partial_\nu A_\nu}_{\text{parte nova}} = \frac{1}{2} \int d^4x A_\mu(x) \left(-\partial_{\mu\nu} \partial^2 + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \partial_\mu \partial_\nu \right) A_\nu(x) \quad (\text{eq. 156.3})$$

$(G^{(0)})_{\mu\nu}^{-1}(x)$ (que agora é inversível)

$$S_{\text{EFF}} = \frac{1}{2} \int d^4x \int d^4k A_\mu(k) e^{ikx} \left(-\partial_{\mu\nu} \partial^2 + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \partial_\mu \partial_\nu \right) \int d^4x' A_\nu(x') e^{ik'x} =$$

$$= \frac{1}{2} \int d^4k d^4k' \delta^4(k+k') A_N(k) \left[+\delta_{\mu\nu} k'^2 - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) k'_\mu k'_\nu \right] A_\nu(k') =$$

$$\boxed{S_{\text{EFF}} = \frac{1}{2} \int d^4k A_N(-k) \left[\delta_{\mu\nu} k^2 - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) k_\mu k_\nu \right] A_\nu(k)} \quad (\text{eq. 157.1})$$

$G^{(0)-1}(k)_{\mu\nu}$

Finalmente:

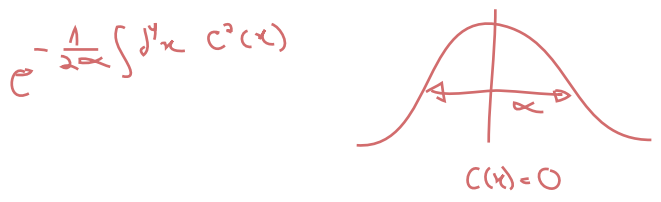
$$\left[\delta_{\mu\nu} k^2 - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) k_\mu k_\nu \right] G^{(0)}_{\nu\rho}(k) = \delta_{\nu\rho}$$

$$\boxed{G^{(0)}_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^2} \left(\delta_{\mu\nu} - (1 - \alpha) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right)} \quad (\text{eq. 157.2})$$

De onde vemos que o propagador de um bóson de Gauge depende deste parâmetro α (que está ligado a escolha de de Gauge). No chamado "Gauge" de Feynman $\alpha = 1$ e:

$$\boxed{G^{(0)}_{\mu\nu}(k; \alpha = 1) = \frac{1}{k^2} \delta_{\mu\nu}} \quad (\text{eq. 157.3})$$

fixamos o Gauge e depois integramos sobre todas as fixações possíveis com a seguinte distribuição:

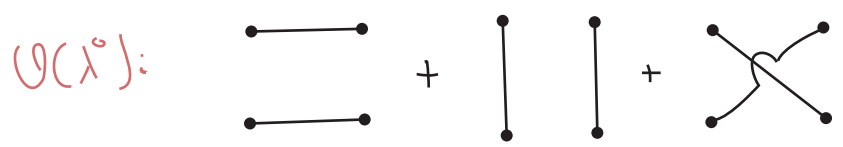


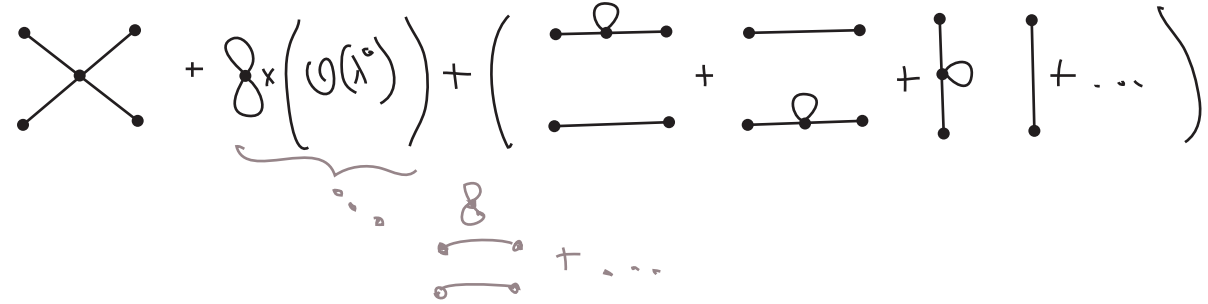
Com isso concluímos a parte de "quantização" do curso, no sentido em que já sabemos como tratar campos escalares, fermiônicos (de spin 1/2) e vetoriais (inclusive quando são campos de Gauge). Passaremos agora a caminhar na direção de relacionar estas teorias com observáveis físicos.

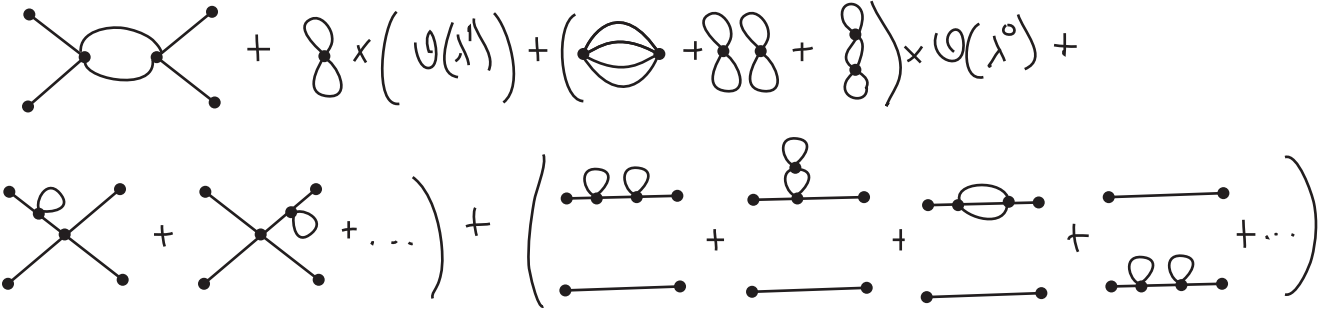
Funcional gerador para diagramas conectados e a ação efetiva

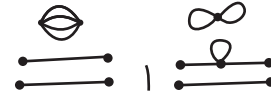
(Nastase 17; Ramond 3.1 - 3.3)

Considere a função de 4 pontos de uma teoria $\lambda\phi^4$, calculada em ordem λ^2 . Temos os seguintes diagramas:



$\mathcal{O}(\lambda^1)$: 

$\mathcal{O}(\lambda^2)$: 

(1) Diagramas contendo bolhas no vácuo, ex: 

Já vimos que as "bolhas" podem ser separadas como um fator multiplicando a parte do diagrama ligada a pontos externos, e então exponenciada (pgs 67 a 69). Esta exponencial é cancelada pela normalização de Z, e ficamos somente com diagramas sem bolhas, que caem em uma das duas outras categorias.

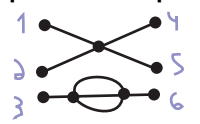
(2) **Diagramas desconectados** (note que agora estamos usando uma nova definição, diferente do que usamos na discussão das bolhas na pg 67, ficaremos com esta daqui em diante), são aqueles em que temos algum subconjunto de pontos externos que está desconectado dos outros. Ex:



(3) **Diagramas Conectados** são aqueles em que todos os pontos externos estão ligados uns aos outros por vértices e propagadores. Ex:



É razoável definir que, quando nos referimos à "um espalhamento entre duas partículas" estamos nos referindo ao caso em que tínhamos duas partículas no estado inicial, elas trocaram momento (e carga, sabor, cor, etc...) e isto resultou nas duas (ou mais) partículas no estado final. Ou seja, todas as excitações presentes no estado inicial e no estado final participaram de alguma forma do processo. Fica claro, por exemplo, que no diagrama seguinte:



A excitação que se propagou do ponto 3 ao 6 não teve influência alguma sobre o espalhamento que ocorreu entre os dois estados começando nos pontos 1 e 2 e terminando em 4 e 5. É também obrigatório que possamos encontrar alguma forma de separar os dois "subdiagramas" ali contidos, caso contrário teríamos que levar em conta todas as partículas expectadoras do universo para calcular um

simples espalhamento (isso se baseia na localidade da teoria).

Veremos agora que é possível definir um novo funcional gerador:

$$Z[J] \equiv e^{-W[J]} \quad (\text{eq. 159.1})$$

que gera funções de Green que só contém os diagramas conectados (3). Definamos as funções de Green na presença de fontes:

$$G_n(x_1, \dots, x_n)_J \equiv \frac{\delta^n}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} Z[J] \quad (\text{eq. 159.2})$$

para fazer um tratamento em termos de diagramas, vamos definir uma notação para a fonte e para a função de Green completa:

$$G_n(x_1, \dots, x_n)_J \equiv \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{array} \right] J \quad \longrightarrow \quad G_{\delta J} = Z[J] = \left[\begin{array}{c} \vdots \\ J \end{array} \right]$$

(basicamente uma soma de todas as bolhas no vácuo)

$$J(x) \equiv \begin{array}{c} \times \\ \text{---} \\ x \end{array} \quad (\text{eq. 159.4})$$

$$\Delta(x-y) \cdot J(x) \equiv \begin{array}{c} \times \\ \text{---} \\ x \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ y \end{array}$$

Também adotaremos a notação: $\bullet \text{---} \textcircled{J}$ para indicar os diagramas conectados (neste caso a soma de todos os diagramas conectados de um ponto). Veja, por exemplo, o cálculo desta função de um ponto para a teoria $\lambda\phi^4$ (veja pg 96):

$$G_1(x)_J = \int d^4y \underbrace{\Delta(x-y) J(y)}_{\mathcal{O}(\lambda^0)} e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} + \mathcal{O}(\lambda^1)$$

$$\mathcal{O}(\lambda^1) = \frac{\delta}{\delta J(x)} \left(-\frac{\lambda}{4!} \int d^4z \left(\frac{\delta}{\delta J(z)} \right)^4 e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \right) = \frac{\delta}{\delta J(x)} \left\{ -\frac{\lambda}{4!} \int d^4z \left(\frac{\delta}{\delta J(z)} \right)^3 (\Delta \cdot J)(z) e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \right\} =$$

$$= \frac{\delta}{\delta J(x)} \left(-\frac{\lambda}{4!} \int d^4z \left(\frac{\delta}{\delta J(z)} \right)^2 \left[\Delta(z-z) + (\Delta \cdot J)^2(z) \right] e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \right) =$$

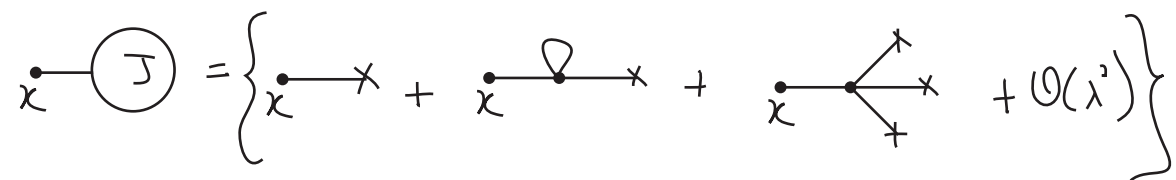
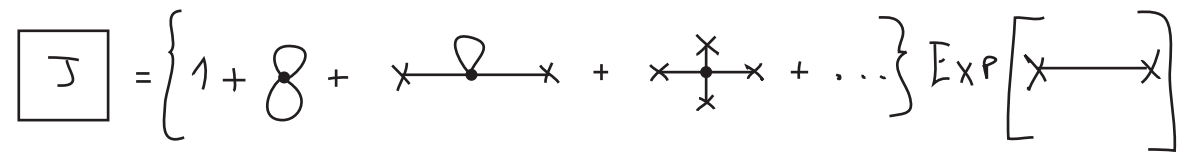
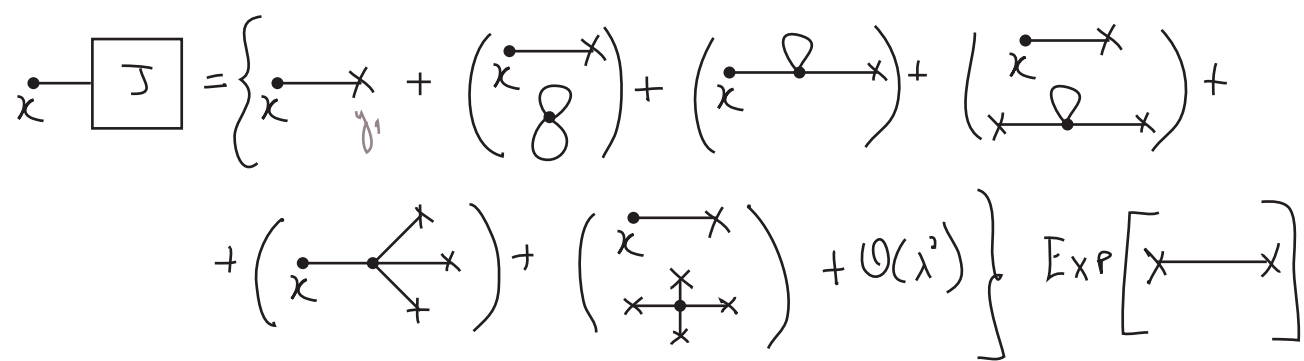
$$= \frac{\delta}{\delta J(x)} \left\{ -\frac{\lambda}{4!} \int d^4z \left(\frac{\delta}{\delta J(z)} \right) \left[\Delta(z-z) (\Delta \cdot J)(z) + 2 (\Delta \cdot J)(z) \Delta(z-z) + (\Delta \cdot J)^3(z) \right] e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \right\} =$$

$$= \frac{\delta}{\delta J(x)} \left\{ -\frac{\lambda}{4!} \int d^2 z \left[3 \Delta^2(z-z) + 6 \Delta(z-z) (\Delta \cdot J)^2(z) + (\Delta \cdot J)^4(z) \right] e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \right\} =$$

$$= -\frac{\lambda}{4!} \int d^2 z \left[3 \Delta^2(z-z) (\Delta \cdot J)(x) + 12 \Delta(z-z) \Delta(x-z) (\Delta \cdot J)(z) + 6 \Delta(z-z) (\Delta \cdot J)^2(z) (\Delta \cdot J)(x) + \right.$$

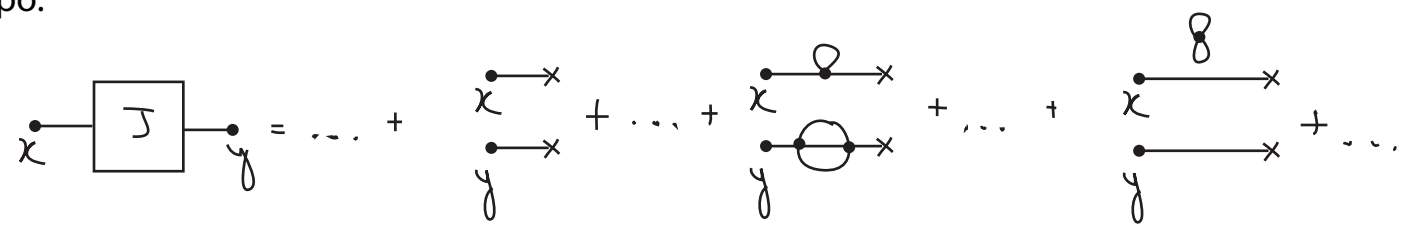
$$\left. 4 \Delta(x-z) (\Delta \cdot J)^3(z) + (\Delta \cdot J)^4(z) (\Delta \cdot J)(x) \right] e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J}$$

Lembrando que cada produto $(\Delta \cdot J)(z) = \int d^1 y_1 \Delta(y_1 - z) J(y_1)$ introduz uma nova coordenada, onde está aplicada a fonte, podemos representar isso em diagramas:

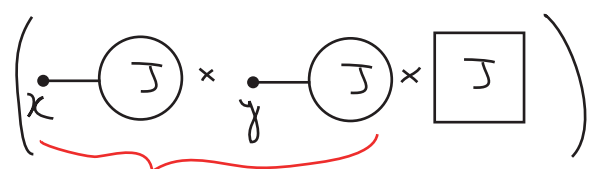


(eq. 160.1)

o que é o mesmo que fizemos na página 68 (para $J = 0$ e antes de exponenciar a soma das bolhas). Note que para a função de dois pontos a situação é um pouco mais complicada, pois ela contém contribuições do tipo:



\therefore \Rightarrow Pois temos também que remover de alguma forma as contribuições:



Diagramas desconectados segundo a definição (2) da pg 158

A equação 160.1 pode ser escrita como:

$$\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = - \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} Z[J] \quad (\text{eq. 161.1})$$



$$\Rightarrow -W[J] = \text{circled } J$$

Gerador das Funções Conectadas

$$\Rightarrow Z[J] = N e^{-W[J]}$$

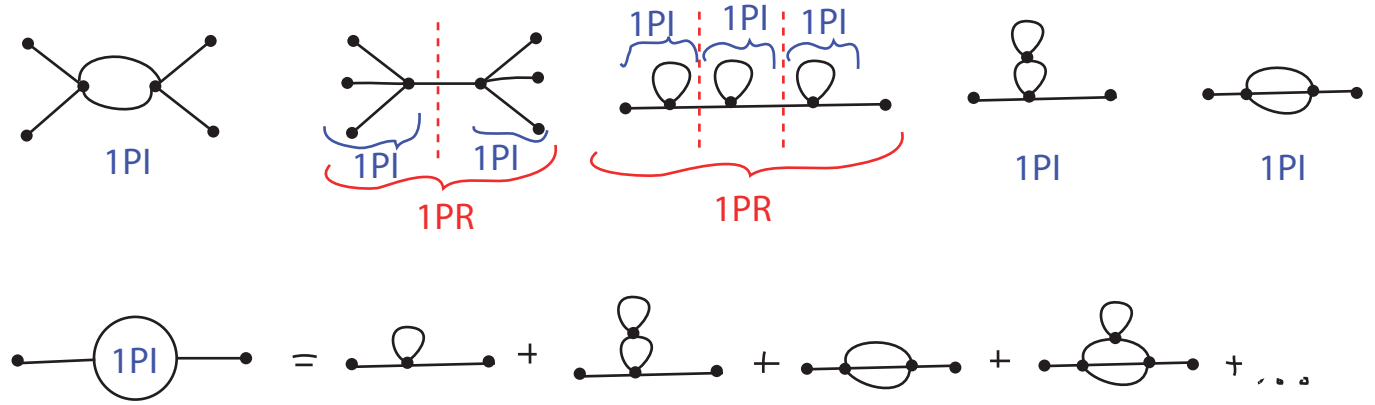
$$\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x) \delta J(y)} = \frac{\delta}{\delta J(x)} \left(Z[J] \frac{-\delta W[J]}{\delta J(y)} \right) = Z[J] \frac{-\delta W[J]}{\delta J(x)} \frac{-\delta W[J]}{\delta J(y)} + Z[J] \frac{-\delta^2 W[J]}{\delta J(x) \delta J(y)}$$

$$\text{Diagram: } x \text{---} \square \text{---} y = \left(x \text{---} \text{circled } J \text{---} y \text{---} \text{circled } J + x \text{---} \text{circled } J \text{---} y \right) \times \square \quad (\text{eq. 161.2})$$

A analogia com a termodinâmica também é clara, onde $W[J]$ seria a energia livre (a função de partição é a exponencial de menos a energia livre).

Ação efetiva

Outro funcional de interesse é aquele que gera as chamadas funções de Green 1PI (one particle irreducible), definidas como a soma (para um determinado número de pontos externos) de todos os diagramas que não podem ser separados em dois cortando um único propagador. Por exemplo:



Veremos que o funcional que gera estas funções de Green 1PI pode ser obtida a partir de $W[J]$ da mesma forma que potenciais podem ser obtidos a partir da energia livre, usando uma transformada de Legendre.

na termodinâmica (energia livre de Gibbs): $G(\phi) = F(Q) - Q\phi$

$$\downarrow$$

$$F[?] = W[J] - J \cdot ?$$

precisamos definir a variável conjugada a J pela transformada

A variável conjugada a J (que gera o objeto que estamos procurando) é justamente o chamado campo clássico (na presença de fontes ou correntes externas):

$$\phi_{cl}[\mathcal{J}] \equiv \frac{\langle 0 | \hat{\phi}(x) | 0 \rangle_{\mathcal{J}}}{\langle 0 | 0 \rangle_{\mathcal{J}}} = \frac{1}{Z[\mathcal{J}]} \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\mathcal{J}] + \mathcal{J} \cdot \phi} \quad \phi(x) = \frac{1}{Z[\mathcal{J}]} \frac{\delta}{\delta \mathcal{J}(x)} Z[\mathcal{J}]$$

(eq. 94.1) \rightarrow $Z[\mathcal{J}]$ (eq. 162.1)

$$Z[\mathcal{J}] = e^{-W[\mathcal{J}]} \rightarrow W[\mathcal{J}] = -L_N(\bar{z}[\mathcal{J}]) \quad \text{(eq. 162.2)}$$

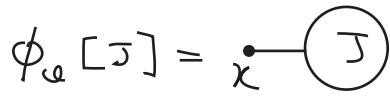
$$\phi_{cl}[\mathcal{J}] = \frac{\delta(-W[\mathcal{J}])}{\delta \mathcal{J}(x)} = G_1^c(x)_{\mathcal{J}} \quad \text{conectada} \quad \text{(eq. 162.3)}$$

Algumas observações sobre este campo clássico:

(1) na ausência de fontes (correntes ou cargas externas) ele é zero: $\begin{cases} \langle 0 | 0 \rangle_0 = 1 \\ \langle 0 | \phi | 0 \rangle = 0 \end{cases}$

(2) dada uma corrente externa, a configuração de um campo na teoria clássica está bem determinada. Aqui o mesmo vale em média (ao longo de repetidas medições para o mesmo estado). Este é o valor do campo na ausência de excitações discretizadas (partículas), é zero caso não haja fonte externa e de qualquer forma as "partículas" são medidas em relação a isto, por isso ele é definido como o VEV (valor esperado no vácuo) do operador campo. Este campo é o que realmente vai ser observado em qualquer experiência em que medimos o campo em sua encarnação contínua (a "ponta de prova" - uma partícula - tem comprimento de onda de de Broglie muito maior que o comprimento de onda Compton das partículas do campo, logo não tem energia para excitar o campo - a imagem aqui é a de uma carga se movendo em um campo) e inclui a solução clássica e pequenas correções quânticas.

(3) vemos, em 162.3, que ele é dado pela função de 1-ponto conectada na presença de fontes:



Um exemplo: teoria escalar livre

$$S_0[\phi] = \frac{1}{2} \int d^d x [\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + m^2 \phi^2] = \frac{1}{2} \int d^d x \phi [-\partial_\mu \partial^\mu + m^2] \phi$$

Δ^{-1}

na presença de fontes temos:

$$S_{\mathcal{J}}[\phi] = S_0[\phi] - \mathcal{J} \cdot \phi$$

que tem como solução clássica:

$$\Delta_x^{-1} \phi(x) = \mathcal{J}(x)$$

$$\Delta_x^{-1} \Delta(x-y) = \delta^d(x-y) \dots \phi(x) = \int d^d y \Delta(x-y) \mathcal{J}(y) = (\Delta \cdot \mathcal{J})(x)$$

Se pensarmos em um campo sem massa ($m = 0$) e cuja fonte externa é uma carga pontual

$$J(x) = \delta^3(\vec{x})$$

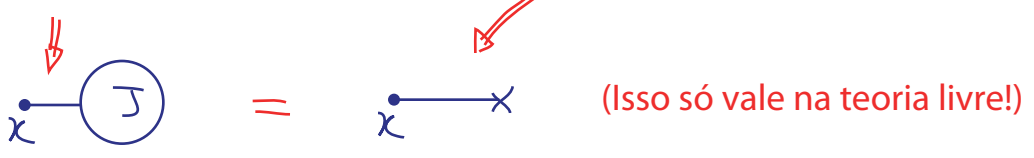
temos que $\phi(x) = \phi(\vec{x})$ é justamente $1/|\vec{x}|$ (o Laplaciano agindo em $\phi(x)$ tem produzir a delta) e portanto temos a lei de Coulomb:

$$\Delta(\vec{x} - \vec{y}) = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|}$$

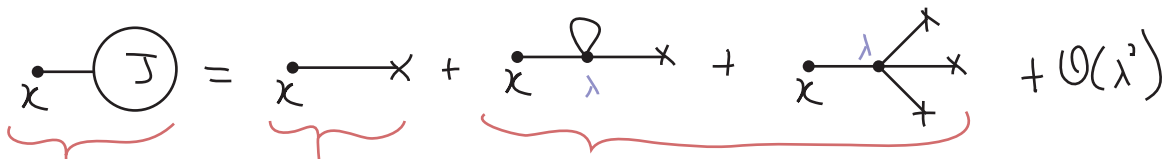
Por outro lado, para esta teoria livre sabemos que (eq. 94.1): $Z_0[J] = e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J}$

$$\therefore W_0[J] = -L_N(Z[J]) = -\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J$$

Então, $\phi_a[J] = \frac{\delta(-W_0[J])}{\delta J(x)} = (\Delta \cdot J)(x)$ (que coincide com a solução obtida via princípio da mínima ação)



Se tivéssemos ligado a interação, teríamos:

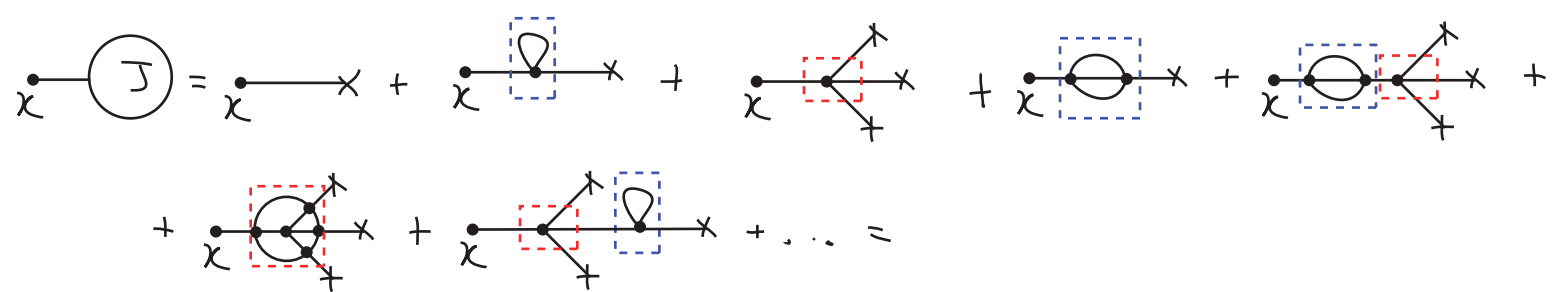


Correções quânticas (só possíveis na presença de interações)

Campo "clássico - clássico!" vem do princ. da extrema ação na presença de fonte

Campo "clássico" significa "pouco relativístico", não há energia o suficiente para produzir partículas (vácuo da TQC), mas as correções quânticas estão incluídas. Este é o nosso $\phi_a[J]$

Vamos tentar agora reorganizar esta soma, para encontrar a função geradora dos diagramas 1PI (não é óbvio que ela deveria vir daí, mas aguarde até o fim), coloquemos mais alguns termos:



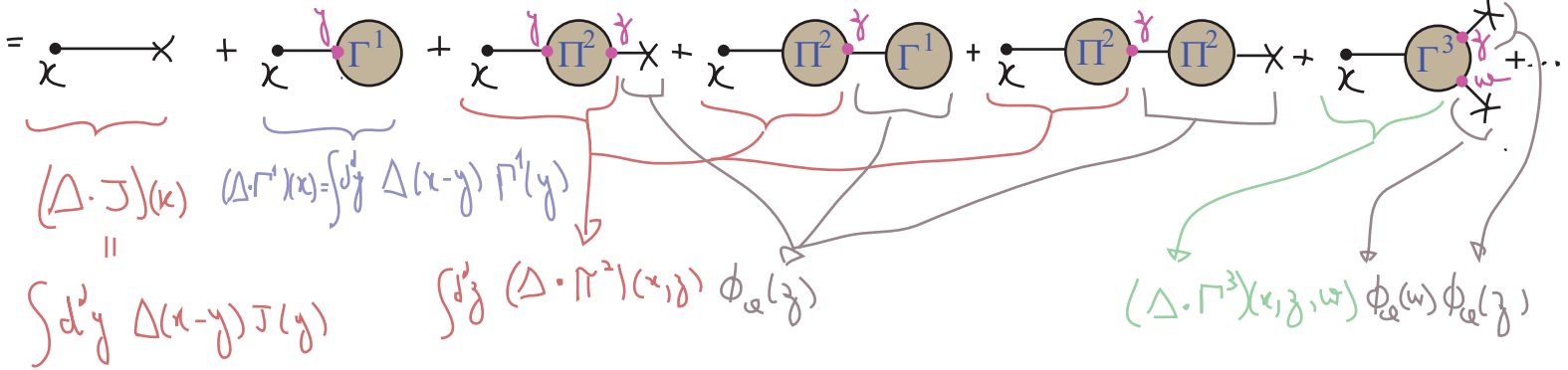
$$= \chi \text{---} \chi + \chi \text{---} \Gamma^1 + \chi \text{---} \Pi^2 \text{---} \chi + \chi \text{---} \Pi^2 \text{---} \Gamma^1 + \chi \text{---} \Pi^2 \text{---} \Pi^2 \text{---} \chi + \chi \text{---} \Gamma^3$$

mais a frente deixarei claro porque a 1PI de dois pontos ficou outro nome

$\Gamma^n =$ função 1PI com n linhas saindo

pensando agora em uma teoria mais geral, que pode ter isso, ex: $\lambda \phi^3 \rightarrow \chi \text{---} \text{circle}$

Aí basta notar que:



Ou seja:

$$\phi_\alpha(x) = \int d^d y \Delta(x-y) \left\{ J(y) - \left[\Gamma^1(y) + \int d^d z \Pi^2(y,z) \phi_\alpha(z) + \frac{1}{2} \int d^d z \int d^d w \Gamma^3(y,z,w) \phi_\alpha(z) \phi_\alpha(w) + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \int d^d z_1 \dots d^d z_{n-1} \Gamma^n(y, z_1, \dots, z_{n-1}) \phi_\alpha(z_1) \dots \phi_\alpha(z_{n-1}) + \dots \right] \right\}$$

(eq. 164.1)

que é uma equação auto-consistente para o campo clássico (ressomei toda série perturbativa). Podemos então definir o funcional gerador:

$$\hat{\Gamma}[\phi_\alpha] \equiv \int d^d y \Gamma^1(y) \phi_\alpha(y) + \frac{1}{2} \int d^d y \int d^d z \Pi^2(y,z) \phi_\alpha(y) \phi_\alpha(z) + \frac{1}{3!} \int d^d y \int d^d z \int d^d w \Gamma^3(y,z,w) \phi_\alpha(y) \phi_\alpha(z) \phi_\alpha(w) + \dots$$

(eq. 164.2)

Tal que:

$$\Gamma^n(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta^n}{\delta \phi_\alpha(x_1) \dots \delta \phi_\alpha(x_n)} \hat{\Gamma}[\phi_\alpha] \Big|_{\phi_\alpha = 0}$$

(eq. 164.3)

Para n = 2 vale:

$$\Pi^2(x_1, x_2) = \frac{\delta^2}{\delta \phi_\alpha(x_1) \delta \phi_\alpha(x_2)} \hat{\Gamma}[\phi_\alpha] \Big|_{\phi_\alpha = 0}$$

(eq. 164.4)

Com estas definições podemos re-escrever 164.1 na forma:

$$-\frac{\delta W}{\delta J(x)} \equiv \phi_\alpha(x) = \int d^d y \Delta(x-y) \left(J(y) - \frac{\delta \hat{\Gamma}[\phi_\alpha]}{\delta \phi_\alpha(y)} \right)$$

que pode ser invertida:

$$\Delta_x^{-1} \phi_\alpha(x) = J(x) - \frac{\delta \hat{\Gamma}[\phi_\alpha]}{\delta \phi_\alpha(x)}$$

$\Delta_x^{-1} \Delta(x-y) = \delta^d(x-y)$