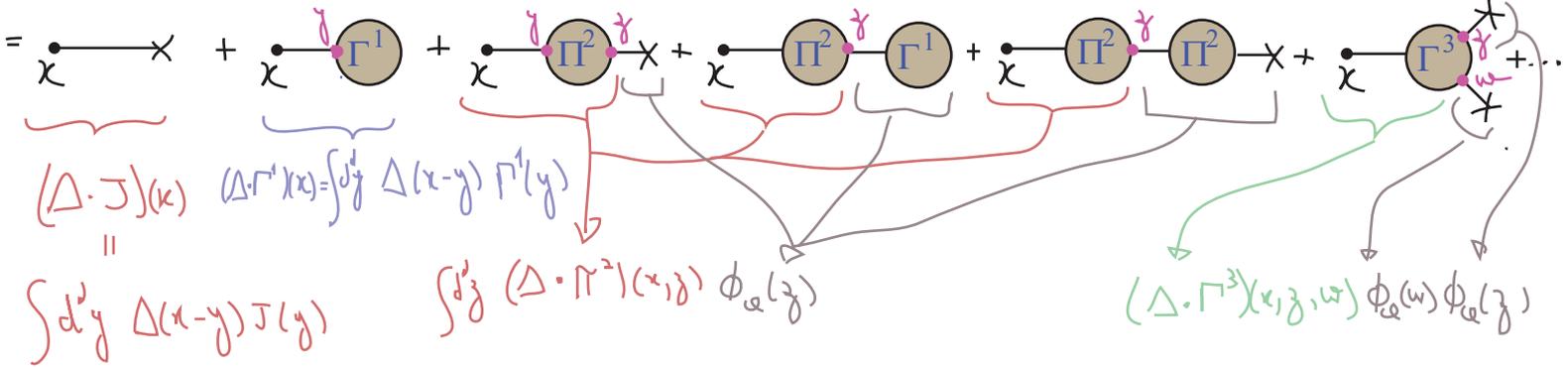


Aí basta notar que:



$(\Delta \cdot J)(x) \equiv \int d^d y \Delta(x-y) J(y)$   
 $(\Delta \cdot \Gamma^1)(x) = \int d^d y \Delta(x-y) \Gamma^1(y)$   
 $(\Delta \cdot \Pi^2)(x, \delta) = \int d^d z \Delta(x-\delta) \phi_\alpha(z)$   
 $(\Delta \cdot \Gamma^3)(x, \delta, \omega) = \int d^d z \int d^d \omega \Delta(x-\delta) \phi_\alpha(z) \phi_\alpha(\omega)$

Ou seja:

$$\phi_\alpha(x) = \int d^d y \Delta(x-y) \left\{ J(y) - \left[ \Gamma^1(y) + \int d^d \delta \Pi^2(y, \delta) \phi_\alpha(\delta) + \frac{1}{2} \int d^d \delta \int d^d \omega \Gamma^3(y, \delta, \omega) \phi_\alpha(\delta) \phi_\alpha(\omega) + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \int d^d \delta_1 \dots d^d \delta_{n-1} \Gamma^n(y, \delta_1, \dots, \delta_{n-1}) \phi_\alpha(\delta_1) \dots \phi_\alpha(\delta_{n-1}) + \dots \right] \right\}$$

(eq. 164.1)

que é uma equação auto-consistente para o campo clássico (ressomei toda série perturbativa). Podemos então definir o funcional gerador:

$$\hat{\Gamma}[\phi_\alpha] \equiv \int d^d y \Gamma^1(y) \phi_\alpha(y) + \frac{1}{2} \int d^d y \int d^d \delta \Pi^2(y, \delta) \phi_\alpha(y) \phi_\alpha(\delta) + \frac{1}{3!} \int d^d y \int d^d \delta_1 \int d^d \delta_2 \int d^d \omega \Gamma^3(y, \delta_1, \delta_2, \omega) \phi_\alpha(y) \phi_\alpha(\delta_1) \phi_\alpha(\delta_2) \phi_\alpha(\omega) + \dots$$

(eq. 164.2)

Tal que:

$$\Gamma^n(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta^n}{\delta \phi_\alpha(x_1) \dots \delta \phi_\alpha(x_n)} \hat{\Gamma}[\phi_\alpha] \Big|_{\phi_\alpha = 0}$$

(eq. 164.3)

Para n = 2 vale:

$$\Pi^2(x_1, x_2) = \frac{\delta^2}{\delta \phi_\alpha(x_1) \delta \phi_\alpha(x_2)} \hat{\Gamma}[\phi_\alpha] \Big|_{\phi_\alpha = 0}$$

(eq. 164.4)

Com estas definições podemos re-escrever 164.1 na forma:

$$-\frac{\delta W}{\delta J(x)} \equiv \phi_\alpha(x) = \int d^d y \Delta(x-y) \left( J(y) - \frac{\delta \hat{\Gamma}[\phi_\alpha]}{\delta \phi_\alpha(y)} \right)$$

que pode ser invertida:

$$\Delta_x^{-1} \phi_\alpha(x) = J(x) - \frac{\delta \hat{\Gamma}[\phi_\alpha]}{\delta \phi_\alpha(x)}$$

$\Delta_x^{-1} \Delta(x-y) = \delta^d(x-y)$

$$\mathcal{J}(x) = \Delta_x^{-1} \phi_a(x) + \frac{\delta \hat{\Gamma}[\phi_a]}{\delta \phi_a(x)} = \frac{\delta}{\delta \phi_a(x)} \left[ \hat{\Gamma}[\phi_a] + \frac{1}{2} \phi_a \cdot \Delta^{-1} \phi_a \right]$$

$\int d^d y \phi_a(y) \Delta_y^{-1} \phi_a(z) = \int d^d y \Delta_y^{-1} \phi_a(y) \phi_a(z) + \text{surperf.}$   
↳ 2 deriv.

Definimos então a **Ação Efetiva**:

$$\Gamma[\phi_a] = \hat{\Gamma}[\phi_a] + \frac{1}{2} \phi_a \cdot \Delta^{-1} \phi_a \quad (\text{eq. 165.1})$$

$$\int d^d y \phi_a(y) \int d^d z \delta^d_{yz}$$

Para a qual vale:

$$\frac{\delta}{\delta \phi_a(x)} \Gamma[\phi_a] = \mathcal{J}(x) \quad (\text{eq. 165.2})$$

↳ O que é muito parecido com o que vale para a ação, via a equação de movimento CLÁSSICA:  
 $\frac{\delta S}{\delta \phi} - \mathcal{J} = 0 \Rightarrow \frac{\delta S}{\delta \phi} = \mathcal{J}$

daí o nome "ação efetiva". Da mesma forma que o campo  $\phi_{cl}$  é o que vemos a baixas energias com correções quânticas já incluídas, a ação efetiva é a ação que de fato dita o comportamento deste campo (incluindo em si as flutuações quânticas).

Definimos ainda:

$$\Gamma[\phi_a] = \sum_{N \geq 1} \frac{1}{N!} \Gamma^N \underbrace{\phi_a \cdot \phi_a \cdot \dots \cdot \phi_a}_{N \text{ campos}} \quad (\text{eq. 165.3})$$

Cuja única diferença para as definições 164.3 e 164.4 está no segundo termo:

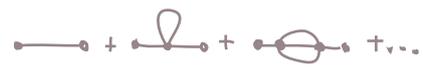
$$\Gamma^2(x, y) = \frac{\delta^2}{\delta \phi_a(x) \delta \phi_a(y)} \Gamma[\phi_a] \Big|_{\phi_a=0} = \frac{\delta^2}{\delta \phi_a(x) \delta \phi_a(y)} \underbrace{\hat{\Gamma}[\phi_a]}_{\Pi^2(x, y)} + \frac{\delta^2}{\delta \phi_a(x) \delta \phi_a(y)} \left[ \frac{1}{2} \phi_a \cdot \Delta^{-1} \phi_a \right]$$

$$\frac{\delta}{\delta \phi_a(y)} \frac{1}{2} \int d^d z \phi_a(z) \Delta_z^{-1} \phi_a(z) = \Delta_y^{-1} \phi_a(y) \quad \frac{\delta}{\delta \phi_a(x)} \Delta_y^{-1} \phi_a(y) = \Delta_y^{-1} \delta(x-y)$$

$$\Gamma^2(x, y) = \Pi^2(x, y) + \Delta_y^{-1} \delta(x-y) \quad (\text{eq. 165.4})$$

↳ lembrando que só essa parte é a função 1PI de dois pontos  
 ↳ é possível mostrar que esta função é a inversa do propagador completo da teoria:

$$\int d^4z \Pi^2(x, z) \Delta_F^c(z-y) \sim \delta^4(x-y) \quad (\text{eq. 166.1})$$

propagador incluindo TODAS as correções perturbativas: 

mas para fazer isso precisamos primeiro definir o propagador completo:

### Função conectada de dois pontos

Já definimos a equação conectada de 1 ponto (eq 162.3), façamos o mesmo para a de dois pontos:

$$G_a^c(x, y)_J = - \frac{\delta}{\delta J(x)} \frac{\delta}{\delta J(y)} W[J] = \frac{\delta \phi_a(y)}{\delta J(x)} \quad (\text{eq. 166.2})$$

Substituindo  $\phi_{cl}$  pela equação auto-consistente (164.1):

$$G_a^c(x, y)_J = \Delta(y-x) - (\Delta \cdot \Pi^2 \cdot \frac{\delta \phi_a(y)}{\delta J(x)}) + \dots$$

estes termos somem desde que  $\phi_a(J=0) = 0$

$$G_a^c(x, y)_{J=0} = \Delta(y-x) - \int d^4z_1 d^4z_2 \Delta(y-z_1) \Pi^2(z_1, z_2) G_a^c(z_2, x)_{J=0} \quad (\text{eq. 166.3})$$

$$\int d^4z_2 \left[ \delta(y-z_2) + \int d^4z_1 \Delta(y-z_1) \Pi^2(z_1, z_2) \right] G_a^c(z_2, x) = \Delta(y-x) \quad (\times \Delta_y^{-1})$$

$$\int d^4z_2 \left[ \Delta_y^{-1} \delta(y-z_2) + \Pi^2(y, z_2) \right] G_a^c(z_2, x) = \delta(y-x)$$

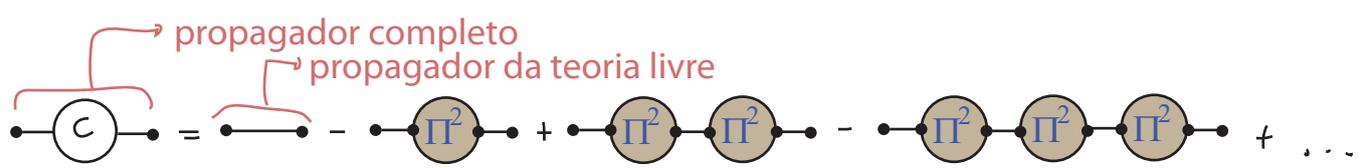
$(\hat{1} + \Delta \cdot \Pi^2) \cdot G_2 = \Delta$

o que prova 166.1 e identifica  $G_2^c$  como o tal propagador completo, que é justamente o que queríamos (o propagador livre mais a soma de todos os diagramas conectados de dois pontos). Notemos que:

$$(\hat{1} + \Delta \cdot \Pi^2) \cdot G_2 = \Delta \implies G_2 = (\hat{1} + \Delta \cdot \Pi^2)^{-1} \cdot \Delta$$

$(-1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 \dots$

$$G_2 = (\hat{1} - \Delta \Pi^2 + \Delta \Pi^2 \Delta \Pi^2 - \Delta \Pi^2 \Delta \Pi^2 \Delta \Pi^2 + \dots) \Delta = \Delta - \Delta \Pi^2 \Delta + \Delta \Pi^2 \Delta \Pi^2 \Delta - \dots$$



Com isso já obtivemos um funcional, a Ação Efetiva, que gera as funções 1PI. Resta agora mostrar que podemos obter a ação efetiva como uma transformada de Legendre da energia livre (sem isso não conseguimos calcular a ação efetiva, já que foi definida como uma soma de infinitos termos). Queremos mostrar que:

$$\int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi] + J \cdot \phi} = e^{-W[J]} = e^{-\Gamma[\phi_c] + J \cdot \phi_c}$$

ou:  $\Gamma[\phi_c] = W[J] + J \cdot \phi_c$  (eq. 167.1)

// Demonstração //

$$\frac{\delta \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(x)} = \frac{\delta W[J]}{\delta \phi_c(x)} + \frac{\delta J}{\delta \phi_c(x)} \cdot \phi_c + J(x) = J(x)$$

$$\int \int \gamma \underbrace{\frac{\delta W[J]}{\delta J(\gamma)}}_{-\phi_c(\gamma)} \frac{\delta J(\gamma)}{\delta \phi_c(x)} = -\phi_c \cdot \frac{\delta J}{\delta \phi_c(x)}$$

Que é a equação 165.2 novamente, mostrando que o RHS da equação 167.1 também é a ação efetiva

**Ação clássica como geradora dos diagramas em "nível árvore" (sem loops)**

Uma das formas de pensar o limite  $\hbar \rightarrow 0$  é notar que na equação abaixo:

$$\int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi] + J \cdot \phi} = e^{-\Gamma[\phi_c] + J \cdot \phi_c}$$

$$e^{-\frac{1}{\hbar}(S + J \cdot \phi)}$$

podemos ignorar todas as trajetórias não clássicas do lado esquerdo e aí a ação efetiva e a clássica são o mesmo. Sabemos que a ação efetiva gera certos diagramas (os diagramas 1PI) então podemos nos perguntar se a ação clássica também funciona como funcional gerador de algum diagrama e, se sim, quais são eles. Para obter a resposta, tomemos uma teoria simples como exemplo:

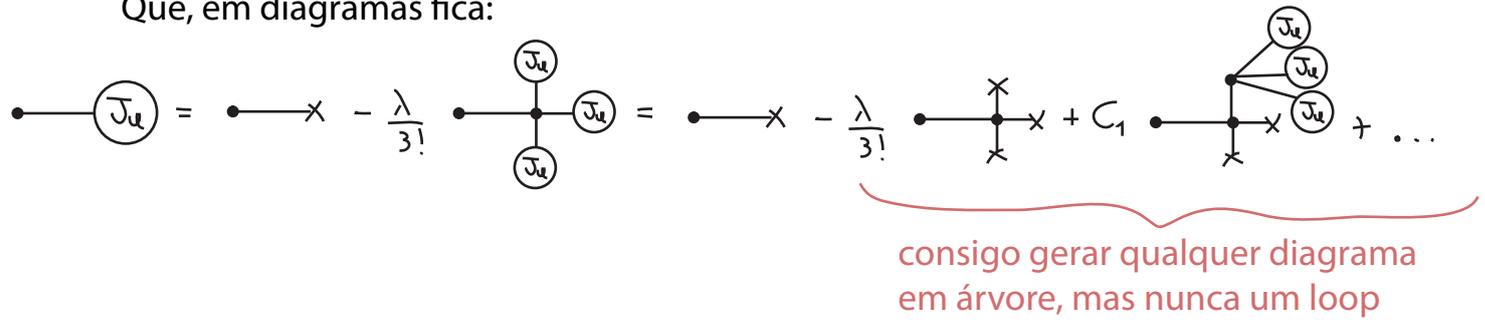
$$S[\phi] = \frac{1}{2} \phi \cdot \Delta^{-1} \phi + \int \phi^3(x)$$

$$\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(x)} = J(x) \Rightarrow (\Delta^{-1} \cdot \phi)(x) + \frac{\lambda}{3!} \phi^3(x) = J(x)$$

$$\phi(x) = (\Delta \cdot J)(x) - \frac{\lambda}{3!} (\Delta \cdot \phi^3)(x)$$

(eq. 167.1)

Que, em diagramas fica:



Isso quer dizer que os diagramas em nível árvore são "clássicos" (no sentido mais geral da palavra)? Não. De fato se calculamos estes diagramas usando propagadores e no fim interpretarmos todos os resultados como amplitudes de probabilidade, teremos, como esperado, efeitos já conhecidos de mecânica quântica, tal como interferências entre canais alternativos. O que estamos perdendo então? Os efeitos quânticos intrínsecos de uma *teoria de campo*, que são codificados nos loops da expansão perturbativa. Estes efeitos serão melhor abordados em TQCII, mas consistem essencialmente no fato de uma excitação do campo (uma partícula) acabar interagindo com o próprio campo, com várias consequências (o propagador completo tem um polo que não coincide com a massa na lagrangiana, running das constantes de acoplamento, etc...)

## Equações de Dyson-Schwinger e identidades de Ward

(Nastase 18, Peskin 9.6)

A nível clássico vale:

$$\frac{\delta S[J]}{\delta \phi(x)} - J(x) = 0$$

Queremos o equivalente quântico disso. Considere a identidade:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{d}{dx} f(x) = 0 \quad \iff \quad f(\pm\infty) = 0$$

Podemos generalizar isto para a integral de trajetória e, no caso do espaço Euclideo não precisamos que o campo vá a zero, a ciclicidade da integral já garante isso:

$$\int \mathcal{D}\phi \frac{\delta}{\delta \phi(x)} e^{-S[\phi] + J \cdot \phi} = 0$$

$$= \int \mathcal{D}\phi \left[ -\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(x)} + J(x) \right] e^{-S[\phi] + J \cdot \phi} = 0$$

$$= \left[ -\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(x)} \Big|_{\phi = \frac{\delta J}{\delta \phi}} + J(x) \right] Z[J] = 0$$

$\left\langle -\frac{\delta S}{\delta \phi(x)} + J(x) \right\rangle$   
 leia-se: (1) agimos com a derivada em  $\phi$  na ação (2) no resultado, troco todos os  $\phi$  por derivadas em  $J$ ; (3) essas agem em  $Z$ .

$$\left[ -\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(x)} \Big|_{\phi=\frac{\delta}{\delta J}} + J(x) \right] Z[J] = 0$$

Equação de Schwinger-Dyson

(eq. 169.1)

(em sua versão mais compacta e geral)

$$\rightarrow \left\langle \frac{\delta S}{\delta \phi(x)} - J(x) \right\rangle = 0$$

Este resultado parece óbvio e trivial de deduzir, mas isto foi graças ao formalismo de integral de trajetórias. Historicamente este resultado foi obtido em termos de diagramas de Feynman, e é interessante ver como isto é feito pois ele implica **relações** nada triviais **entre diagramas**.

Vamos assumir uma teoria bosônica com termo cinético quadrático e uma interação qualquer:

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \phi \cdot \Delta^{-1} \phi + S_{\text{I}}[\phi]$$

$$\frac{\delta}{\delta \phi(x)} S[\phi] = (\Delta^{-1} \phi)(x) + \frac{\delta}{\delta \phi(x)} S_{\text{I}}[\phi]$$

$$\left( \Delta \cdot \frac{\delta S}{\delta \phi} \right)(y) = \phi(y) + \left( \Delta \cdot \frac{\delta S_{\text{I}}}{\delta \phi} \right)(y)$$

$$\left\{ \int d^4x \Delta(x-y) \frac{\delta}{\delta \phi(x)} = \left( \Delta \cdot \frac{\delta}{\delta \phi} \right)(y) \right\}$$

Substituindo isso em 169.1 (onde primeiro aplicamos  $\Delta$ ):

$$\left[ -\frac{\delta}{\delta J(x)} - \left( \Delta \cdot \frac{\delta S_{\text{I}}}{\delta \phi} \right)(x) \Big|_{\phi=\frac{\delta}{\delta J}} + (\Delta \cdot J)(x) \right] Z[J] = 0$$

de onde obtemos a equação de Schwinger-Dyson para Z:

$$\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = (\Delta \cdot J)(x) Z[J] - \left( \Delta \cdot \frac{\delta S_{\text{I}}}{\delta \phi} \right)(x) \Big|_{\phi=\frac{\delta}{\delta J}} Z[J]$$

(eq. 169.2)

$$\langle \phi(x) \rangle = \langle (\Delta \cdot J)(x) \rangle - \left\langle \left( \Delta \cdot \frac{\delta S_{\text{I}}}{\delta \phi} \right)(x) \right\rangle$$

Uma vez que tenhamos a equação para Z podemos obter a equação para qualquer função de n-pontos, mas precisamos especificar uma interação. Por exemplo:

$$\int \mathcal{L}_{\text{I}}(\phi(y)) = \frac{g_3}{3!} \phi^3(y) + \frac{g_4}{4!} \phi^4(y)$$

(eq. 169.2)

$$\begin{aligned} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} &= (\Delta \cdot J)(x) Z[J] - \int d^4y \Delta(x-y) \int d^4z \delta(y-z) \left( \frac{g_3}{2!} \frac{\delta^2}{\delta J(y) \delta J(y)} + \frac{g_4}{3!} \frac{\delta^3}{\delta J(y) \delta J(y) \delta J(y)} \right) Z[J] \\ &= (\Delta \cdot J)(x) Z[J] - \int d^4z \Delta(x-z) \left( \frac{g_3}{2!} \frac{\delta^2}{\delta J(y) \delta J(y)} + \frac{g_4}{3!} \frac{\delta^3}{\delta J(y) \delta J(y) \delta J(y)} \right) Z[J] \end{aligned}$$

Chamemos  $x = x_i$ , na equação acima e então tomemos mais  $(n-1)$  derivadas:  $\frac{\delta}{\delta J(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta J(x_n)}$

$$\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Bigg|_{J=0} = G^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$$

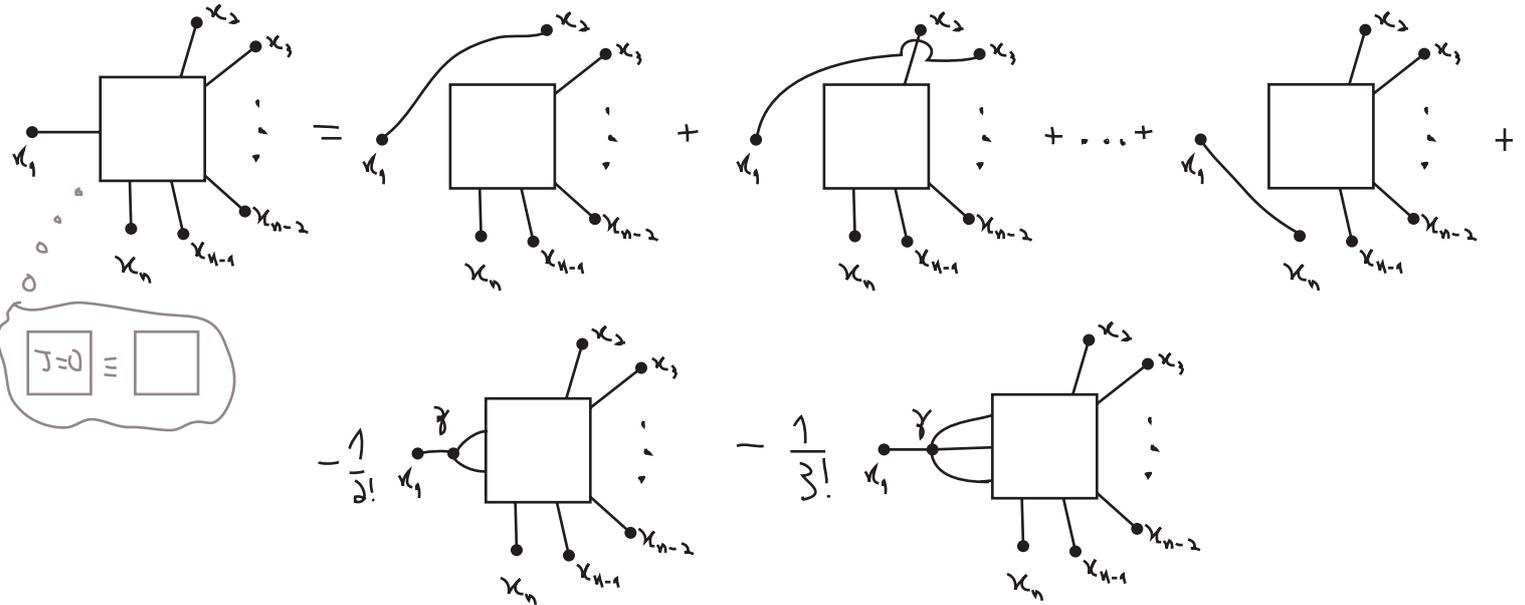
$$\frac{\delta^{n-1} (\Delta \cdot J)(x_1) Z[J]}{\delta J(x_2) \dots \delta J(x_n)} \Bigg|_{J=0} = \Delta(x_1 - x_2) G^{(n-2)}(x_3, \dots, x_n) + \Delta(x_1 - x_3) G^{(n-2)}(x_2, x_4, \dots, x_n) + \dots$$

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \Delta(x_1 - x_2) G^{(n-2)}(x_3, \dots, x_n) + \dots + \Delta(x_1 - x_n) G^{(n-2)}(x_2, \dots, x_{n-1}) +$$

$$- \int d^d z \Delta(x_1 - z) \left[ \frac{g_3}{2!} G^{(n+1)}(z, z, x_2, \dots, x_n) + \frac{g_4}{3!} G^{(n+2)}(z, z, z, x_2, \dots, x_n) \right] \quad (\text{eq. 170.1})$$

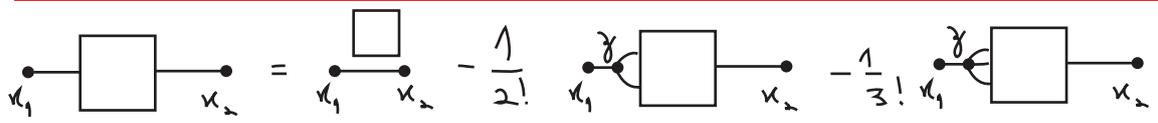
(note que estas são as funções de Green completas, essa relação é verdade independentemente de teoria de perturbação)

Vamos expressar esta equação em termos de diagramas (note que a equação é sempre escrita em função de um **ponto especial** escolhido, neste caso  $x_1$ ):



Podemos reiterar a equação de DS para obter a expansão perturbativa. Tome, por exemplo, a função de dois pontos da teoria acima:

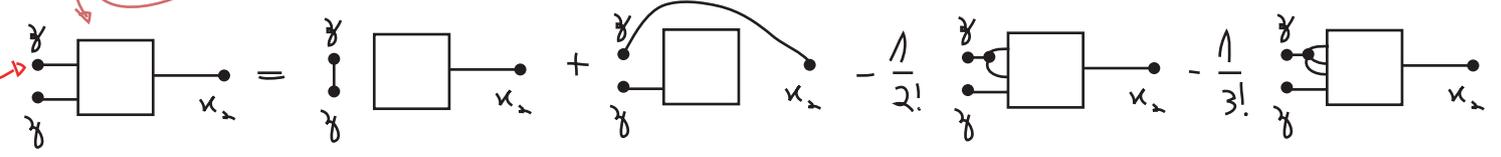
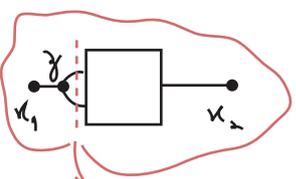
$$G^{(2)}(x_1, x_2) = \Delta(x_1 - x_2) G^{(0)} - \int d^d z \Delta(x_1 - z) \left[ \frac{g_3}{2!} G^{(3)}(z, z, x_2) + \frac{g_4}{3!} G^{(4)}(z, z, z, x_2) \right] \quad (\text{eq. 170.2})$$



Se usarmos novamente a equação de DS para  $G^{(3)}$  e  $G^{(4)}$ , temos:

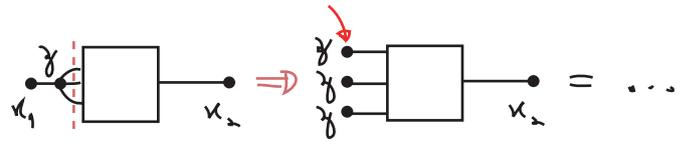
$$G^{(3)}(z, z, x_2) = \Delta(z - z) G^{(1)}(x_2) + \Delta(z - x_2) G^{(1)}(z) - \frac{g_3}{2!} \int d^d w \Delta(z - w) G^{(1)}(w, w, z, x_2) - \frac{g_4}{3!} \int d^d w \Delta(z - w) G^{(2)}(w, w, w, z, x_2)$$

**Ponto escolhido** para escrever a equação



$$G^{(1)}(\gamma, \gamma, \gamma, x_1, x_2) = 2\Delta(\gamma - \gamma) G^{(2)}(\gamma, x_2) + \Delta(\gamma - x_2) G^{(2)}(\gamma, \gamma) - \frac{g_2}{2!} \int d^4\omega \Delta(\gamma - \omega) G^{(5)}(\omega, \omega, \gamma, \gamma, x_2) + \dots$$

$$- \frac{g_1}{3!} \int d^4\omega \Delta(\gamma - \omega) G^{(6)}(\omega, \omega, \omega, \gamma, \gamma, x_2)$$



Voltando com estas expressões em 170.2, temos:

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = \Delta(x_1 - x_2) G^{(0)} - \frac{g_3}{2!} \int d^4\gamma \Delta(x_1 - \gamma) \left[ \Delta(\gamma - \gamma) G^{(1)}(x_2) + \Delta(\gamma - x_2) G^{(1)}(\gamma) - \frac{g_2}{2!} \int d^4\omega \Delta(\gamma - \omega) G^{(4)}(\omega, \omega, \gamma, x_2) - \frac{g_1}{3!} \int d^4\omega \Delta(\gamma - \omega) G^{(5)}(\omega, \omega, \omega, \gamma, x_2) \right] + \dots$$

$$- \frac{g_1}{3!} \int d^4\gamma \Delta(x_1 - \gamma) \left[ 2\Delta(\gamma - \gamma) G^{(2)}(\gamma, x_2) + \Delta(\gamma - x_2) G^{(2)}(\gamma, \gamma) + \dots \right]$$

$$- \frac{g_2}{2!} \int d^4\omega \Delta(\gamma - \omega) G^{(5)}(\omega, \omega, \gamma, \gamma, x_2) - \frac{g_1}{3!} \int d^4\omega \Delta(\gamma - \omega) G^{(6)}(\omega, \omega, \omega, \gamma, \gamma, x_2)$$

O que podemos continuar iterando para obter termos com potências ainda maiores de  $g_3$  e  $g_4$ . Suponha que estivéssemos interessados no termos **CONECTADOS** de ordem  $(g_3)^0(g_4)^1$ : para começar podemos esquecer completamente o primeiro colchete, pois tudo ali é proporcional a  $g_3$ . Além disso, para nos livrarmos das bolhas no vácuo, devemos dividir tudo por  $G^{(0)}$  (o que acontece mesmo em observáveis). Aí só restam os dois primeiros termos do segundo colchete, pois os outros tem potências a mais de  $g_3$  ou  $g_4$ . Como:

$$G^{(2)}(\gamma, x_2) = \Delta(\gamma - x_2) G^{(0)} + \mathcal{O}(g_3, g_4) \rightarrow \text{já temos uma potência de } g_4 \text{ multiplicando tudo}$$

$$G^{(2)}(x_1, x_2) \stackrel{\mathcal{O}(g_3, g_4)}{=} \Delta(x_1 - x_2) - \frac{g_1}{3!} \int d^4\gamma \Delta(x_1 - \gamma) \Delta(\gamma - \gamma) \Delta(\gamma - x_2) = \Delta(x_1 - x_2) - \frac{3g_1}{3!} \int d^4\gamma \Delta(x_1 - \gamma) \Delta(\gamma - x_2) = \Delta(x_1 - x_2) + \Delta(x_1 - \gamma) \Delta(\gamma - x_2) + \dots$$

↳ fator de simetria ok!