

Simetrias e as Identidades de Ward

Como já vimos dada uma simetria sobre a transformação (global):

$$\phi^{i'} = \phi^i + \underbrace{\epsilon^a (T^a)_{ij}}_{\delta\phi^i} \phi^j$$

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \int d^4x \left\{ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^i} \delta \phi^i + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi^i)} \partial_\mu \delta \phi^i \right\} = \\ &= \int d^4x \left\{ \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^i} - \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi^i)} \right) \right] \delta \phi^i + \partial_\mu \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi^i)} \delta \phi^i \right] \right\} \end{aligned}$$

se as equações de movimento CLÁSSICAS forem satisfeitas o primeiro colchete é zero, e temos (usando o $\delta\phi^i$ acima):

$$(\delta S)^\alpha = \lambda \epsilon^a \partial_\mu \underbrace{\left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi^i)} (T^a)_{ij} \phi^j \right]}_{j_\mu^a} = 0 \quad (\text{corrente de Noether})$$

Note a importância da equação de movimento clássica. Por isso dizemos que a corrente é conservada classicamente ou **on-shell** (nome que ficará mais claro adiante). Suponha agora que estejamos pensando nas trajetórias ou configurações não clássicas da teoria (**off-shell**), ainda temos $\delta S = 0$, só que:

$$\delta S = 0 = \lambda \epsilon^a (T^a)_{ij} \left\{ \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^i} - \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi^i)} \right) \right] \phi^j + \partial_\mu \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi^i)} \phi^j \right] \right\}$$

Suponha agora que nós tornemos a simetria mais geral tornando-a local $\epsilon^a \rightarrow \epsilon^a(x)$. A ação que era invariante sob a transformação global não vai ser obrigatoriamente invariante sobre a transformação local, a variação agora será:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \lambda \epsilon^a(x) (T^a)_{ij} \left\{ \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^i} - \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi^i)} \right) \right] \phi^j + \partial_\mu \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi^i)} \phi^j \right] \right\} + \\ &+ \lambda \int d^4x (\partial_\mu \epsilon^a) (T^a)_{ij} \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi^i)} \phi^j \right] = \\ &= \lambda \int d^4x (\partial^\mu \epsilon^a(x)) j_\mu^a(x) = -\lambda \int d^4x \epsilon^a(x) \partial^\mu j_\mu^a(x) \quad (\text{eq. 172.1}) \end{aligned}$$

↳ assumindo que ϵ vai a zero no infinito

Esta equação 172.1 vale off-shell, portanto podemos usá-la dentro de integrais de trajetória. Acharmos um jeito de expressar a corrente off-shell de uma ação classicamente invariante sob uma transformação global: basta olhar a variação da mesma ação sob a versão local da transformação, o coeficiente de $\delta^\mu \epsilon^\alpha(x)$ é a corrente.

O que queremos agora é muito semelhante à eq. 169.1 (Dyson-Schwinger), que era uma versão quântica das equações de movimento. Queremos a versão quântica da conservação da corrente:

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \implies \langle \partial_\mu j^\mu = 0 \rangle$$

Aqui, no entanto, a passagem não é garantida, pois podem aparecer **anomalias quânticas**: quando as correções quânticas não respeitam a simetria

Considere: $\delta \phi^\alpha(x) = \lambda \epsilon^\alpha(x) T_{\alpha\beta}^a \phi^\beta$ $\phi' = \phi + \delta\phi$

sempre vale que: $\int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} = \int \mathcal{D}\phi' e^{-S[\phi']}$ (só estou mudando o nome da variável de integração)

No entanto, se a mudança de ϕ para ϕ' for tal que o jacobiano seja $\hat{1}$, então $\mathcal{D}\phi' = \mathcal{D}\phi$ e aí:

$$\int \mathcal{D}\phi (e^{-S[\phi']} - e^{-S[\phi]}) = 0 = \int \mathcal{D}\phi \delta(e^{-S[\phi']}) = -\int \mathcal{D}\phi \delta S[\phi] e^{-S[\phi]}$$

$\therefore \langle \delta S \rangle = 0$ (eq. 173.1)

As anomalias entram justamente aí, pois teorias anômalas modificam o jacobiano fazendo justamente que ele seja diferente da identidade. Este assunto será abordado em TQCII, portanto aqui assumiremos simplesmente que a teoria não é anômala. Substituindo 172.1 em 173.1 temos:

$$\int \mathcal{D}\phi \left(-\lambda \int d^4x \epsilon^\alpha(x) \partial^\mu j_\mu^\alpha(x) \right) e^{-S[\phi]} = 0$$

$$\underbrace{\int d^4x \lambda \epsilon^\alpha(x)}_{\text{arbitrário}} \int \mathcal{D}\phi \partial^\mu j_\mu^\alpha(x) e^{-S[\phi]} = 0$$

$\int \mathcal{D}\phi \partial^\mu j_\mu^\alpha(x) e^{-S[\phi]} = 0$ **Identidade de Ward**
(eq. 173.2)

$\langle \partial^\mu j_\mu^\alpha \rangle = 0$

Podemos obter outras identidades deste tipo generalizando o operador que está sendo variado:

$$\delta \mathcal{O}(\phi, \lambda) = \int d^4x \frac{\delta \mathcal{O}(\phi, \lambda)}{\delta \epsilon^a(x)} \epsilon^a(x)$$

e obtemos:

$$0 = \int \mathcal{D}\phi \delta \left[e^{-S[\phi]} \mathcal{O}(\phi, \lambda) \right] = i \int d^4x \epsilon^a(x) \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \left[\partial^\mu j_\mu^a(x) \mathcal{O} - i \frac{\delta \mathcal{O}}{\delta \epsilon^a(x)} \right]$$

De forma que temos as **Identidades de Ward Generalizadas**:

$$\int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} (\partial^\mu j_\mu^a(x)) \mathcal{O}(\phi, \lambda) = i \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \frac{\delta \mathcal{O}(\phi, \lambda)}{\delta \epsilon^a(x)} \quad (\text{eq. 174.1})$$

Que pode ser usada para, por exemplo, explorar o caso com fontes: $\mathcal{O} = e^{\phi \cdot J}$

$$0 = \int \mathcal{D}\phi \delta \left[e^{-S[\phi] + \phi \cdot J} \right] = \int d^4x \epsilon^a(x) \int \mathcal{D}\phi \frac{\delta}{\delta \epsilon^a(x)} \left[e^{-S[\phi] + \phi \cdot J} \right]$$

$$0 = \int \mathcal{D}\phi \frac{\delta}{\delta \epsilon^a(x)} \left[e^{-S[\phi] + \phi \cdot J} \right] = i T_{ij}^a \int \mathcal{D}\phi \left[-\frac{\delta S}{\delta \phi^i} \phi^j + J_i \phi^i \right] e^{-S + \phi \cdot J}$$

$$\phi(x) \rightarrow \frac{\delta}{\delta J(x)} \quad \frac{\delta S}{\delta \epsilon^a} = \frac{\delta S}{\delta \phi^i} \frac{\delta \phi^i}{\delta \epsilon^a} = i T_{ij}^a \frac{\delta S}{\delta \phi^i} \phi^j$$

$$(i T_{ij}^a) \left[-\frac{\delta S}{\delta \phi^i(x)} \right]_{\phi = \frac{\delta}{\delta J}} + J_i(x) \left[\frac{\delta}{\delta J_j(x)} \right] Z[J] = 0 \quad (\text{eq. 174.2})$$

O que nos dá uma identidade de Ward para Z e pode facilmente ser usada para obter identidades para as funções de Green.

Veremos que a versão local desta história (note que em nenhuma das passagens acima a ação era invariante sobre a transformação local) leva a relações semelhantes (chamadas de Ward-Takahashi) que colocam forte restrições sobre as funções de Green. Um resultado importante é, por exemplo:

$$k^\mu \Pi_{\mu\nu}^{(2)} = 0 \quad \rightarrow \quad \Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k) = (k^2 \delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \Pi^{(2)}(k^2)$$

↳ Função 1PI de dois pontos para o fóton.

É esta restrição que mantém o fóton sem massa mesmo sob correções radiativas (loops).

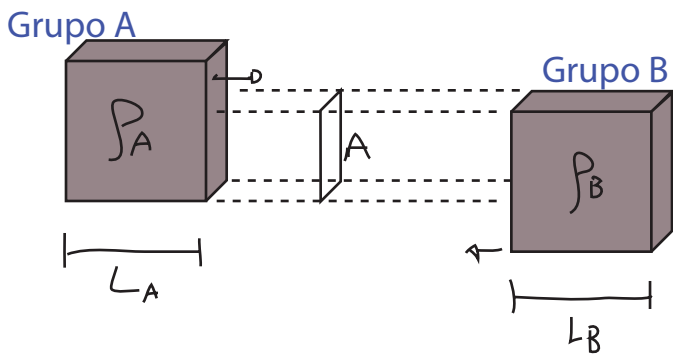
Seções de Choque e Matriz S

(Nastase 19; Peskin 4.5)

Chegamos em fim ao ponto em que formalizaremos a conexão entre as funções de n-pontos das teorias de campos com espalhamentos envolvendo estados assintóticos com n partículas. Começamos com a idéia por trás do que esperamos observar em experimentos envolvendo partículas ou quasi-partículas:

Seção de Choque

A situação que temos em mente é um espalhamento entre dois “amontoados” de partículas (ou quasi-partículas, enfim, excitações do campo), quer seja um projétil atirado em um alvo ou a colisão de dois objetos (o que é o mesmo, dependendo de referencial). Cada um destes grupos tem um número grande de partículas e dimensões finitas:



$\rho_A, \rho_B \rightarrow$ densidade numéricas

$A \rightarrow$ área de impacto

$L_A, L_B \rightarrow$ comprimento ao longo da direção do impacto

Assumindo que ambos os grupos são rarefeitos e que as interações internas são desprezíveis, é razoável dizer que o número total de colisões (eventos) é proporcional a todas as grandezas definidas acima:

$$\# \text{EVENTOS} \propto \rho_A L_A \rho_B L_B A$$

A esta “constante” de proporcionalidade damos o nome de **seção de choque**:

$$\sigma \equiv \frac{\# \text{EVENTOS}}{\rho_A L_A \rho_B L_B A} \quad (\text{eq. 175.1})$$

Que tem dimensão de área: $[\sigma] = \frac{1}{L^{-3} L L^{-3} L L^2} = L^2$

E pode ser interpretada como o “tamanho de interação” da partícula, ou seja, a área em torno do “alvo” na qual um “projétil” seria espalhado (note, no entanto, que isto depende também do projétil). Outra forma de ver como devemos definir a seção de choque é pensando em um modelo clássico, o espalhamento por um potencial $V(r) = \frac{Ze^2}{r}$

Neste caso temos apenas um alvo, pontual, produzindo o potencial. Se temos um feixe de partículas sendo lançado neste alvo o número de espalhamentos por unidade de tempo é proporcional ao fluxo:

$$\text{Fluxo} \leftarrow \phi_0 = \frac{\Delta N_{in}}{A \cdot \Delta t}$$

$\Delta N_{in} \rightarrow$ # partículas incidentes
 $\Delta t \rightarrow$ unidade. de tempo
 $A \rightarrow$ unidade. de área

$$\Delta N_{EV} \leftrightarrow \# \text{partículas espalhadas (eventos)}$$

$$\frac{\Delta N_{EV}}{\Delta t} \propto \phi_0$$

E a proporcionalidade entre os dois vai ser, de novo, a seção de choque:

$$\sigma = \frac{\Delta N_{EV} / \Delta t}{\phi_0} = \frac{\Delta N_{EV}}{\underbrace{\Delta N_{IN} / A}_{n_B \text{ densidade por área}}} = \frac{\Delta N_{EV}}{n_B} \quad \begin{matrix} \text{(unidades de área, consistentemente)} \\ \text{(eq. 176.1)} \end{matrix}$$

Também podemos escrever: $\phi_0 = \frac{\Delta N_{IN}}{A \cdot \Delta t} = \frac{\rho_B (\underbrace{v \Delta t}_{\text{velocidade relativa volume incidente em um tempo } \Delta t}) A}{A \cdot \Delta t} = \rho_B \cdot v$

Podemos então considerar o caso de N alvos independentes onde $N = \int_A L_A A$ então a seção de choque **por alvo** (e essa é a definição de seção de choque) é:

$$\sigma = \frac{\Delta N_{EV} / \Delta t}{\phi_0 N} = \frac{\Delta N_{EV}}{\underbrace{\rho_B (v \Delta t)}_{L_B} \underbrace{\rho_A L_A A}_{\text{como vimos antes}}} = \frac{\Delta N_{EV}}{\rho_B L_B \rho_A L_A A}$$

A seção do choque definida acima é chamada de **Seção de Choque Total**, pois mede a intensidade do espalhamento sem levar em conta a energia das partículas espalhadas nem o seu momento (o que inclui a direção em que foram espalhadas). Tipicamente tanto a energia quanto o momento (ou no mínimo a direção) são medidos em experimentos e muita informação física pode ser tirada daí sobre a interação que está gerando os espalhamentos. Para um dado modelo estamos interessados em saber por exemplo, qual é a taxa de espalhamentos em uma certa direção, ou para estados finais com energia e momento acima de um certo valor. A grandeza que nos permite obter estas distribuições é a **Seção de Choque Diferencial**:

$$\frac{d\sigma}{d^3p_1 \dots d^3p_n}$$

↪ momentos dos estados finais

O exemplo mais útil é o espalhamento $2 \rightarrow 2$ (duas partículas iniciais e duas finais, elástico ou inelástico). Nesse caso temos dois estados finais, logo dois **tri-momentos**¹. Tenho quatro deltas de Dirac (da conservação total de momento e energia), o que me deixa com duas variáveis independentes, que posso escolher como sendo dois ângulos θ (de 0 a π em relação ao momento inicial / direção do feixe) e ϕ (azimutal, vai de 0 a 2π em torno do momento inicial). Estes dois ângulo definem um ângulo sólido Ω , e é comum definir: $\frac{d\sigma}{d\Omega}$

¹Está embutida a suposição (razoável) de que os estados finais estão on-shell, vale a relação relativística entre momento e energia, de forma que a energia não é livre uma vez que conhecemos o momento. Ainda precisamos provar que os estados assintóticos na nossa teoria têm essa propriedade.

Taxa de Decaimento

Outro exemplo de interesse é o de processos $1 \rightarrow n$, onde começamos com uma partícula

instável que decaí em um numero maior de outras partículas. Dada uma amostra de partículas deste tipo, o número de decaimentos por unidade de tempo vai ser proporcional ao número de partículas na amostra: (mais uma vez assumindo que a amostra seja rarefeita ou com pouca interação, para evitar reações em cadeia)

$$\frac{\# \text{DECAIMENTOS}}{\Delta t} \propto \# \text{PARTICULAS}$$

Definimos então:

$$\Gamma \equiv \frac{\# \text{DECAIMENTOS}}{\Delta t \# \text{PARTICULAS}} = \frac{dN}{N dt}$$

Taxa (ou Largura) de Decaimento
(eq. 177.1)

Uma mesma partícula pode ter vários decaimentos possíveis, como larguras diferentes em cada um destes canais. A vida média da partícula, neste caso, é dada por:

$$\tau = \frac{1}{\sum_i \Gamma_i}$$

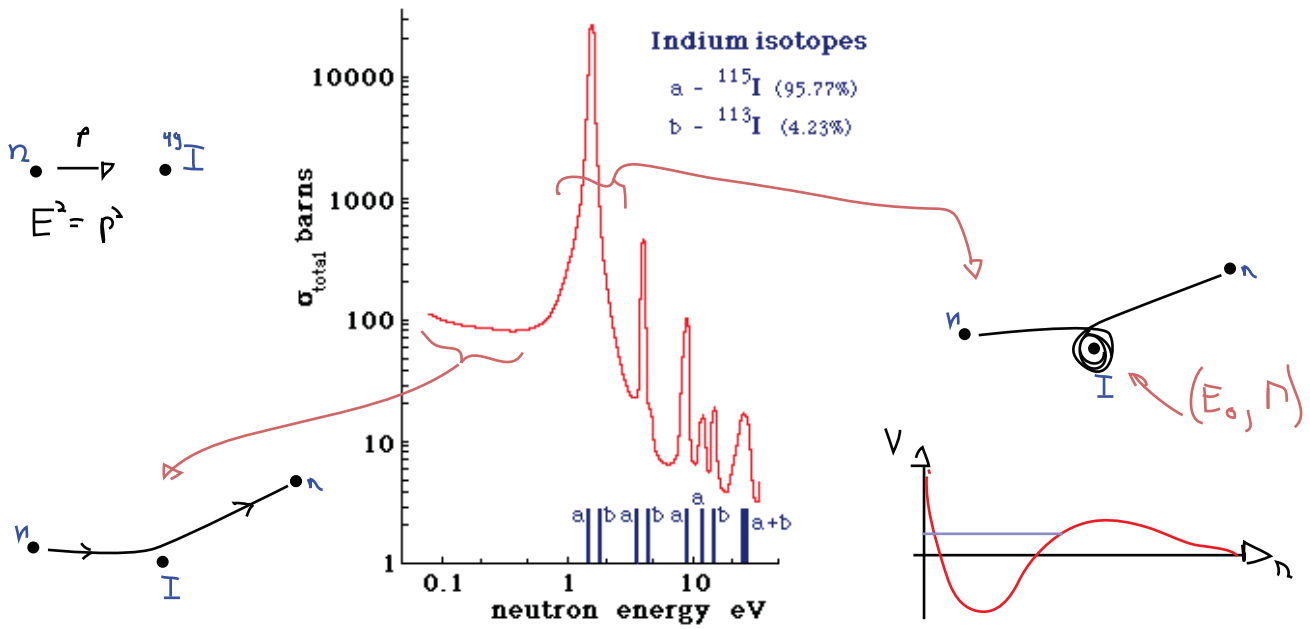
(eq. 177.2)
soma sobre os canais

Sabemos que estados atômicos ou nucleares instáveis (ressonâncias) aparecem, segundo a MQ não relativística, como distribuições de Breit-Wigner no espalhamento, cuja amplitude é:

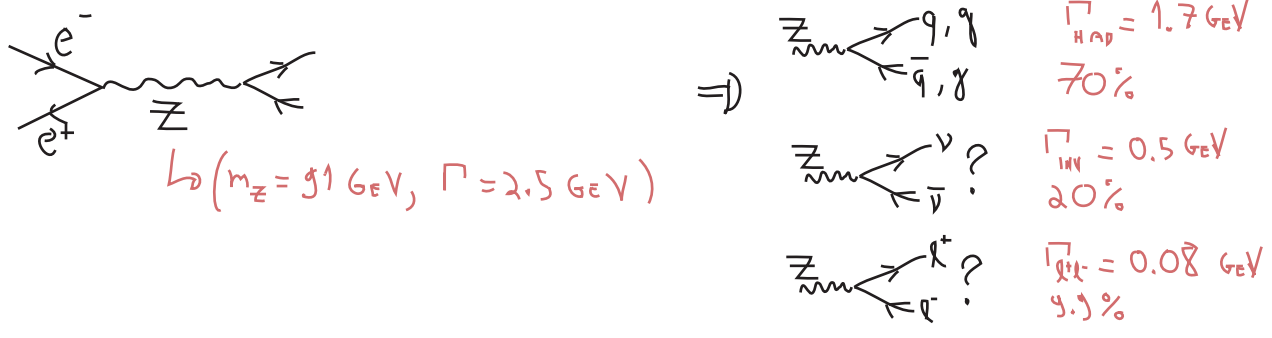
$$f(E) \propto \frac{1}{E - E_0 + i\Gamma/2}$$

e (densidade de) probabilidade: $\sigma \propto \frac{1}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$ (eq. 177.3) Distribuição de Breit-Wigner

energia do espalhamento no centro de massa Pico da distribuição Largura



Em espalhamentos relativísticos o mesmo ocorre, as partículas iniciais podem se combinar para formar estados instáveis, que então decaem em outros, por exemplo:



Na amplitude de espalhamento isso vai aparecer como uma generalização relativística da distribuição de Breit-Wigner, lembrando que uma partícula em movimento relativístico vai ter uma taxa de decaimento (por conta da dilatação temporal): $\frac{m}{E_p} \Gamma$

$$\frac{1}{p^2 + m^2 - i m \Gamma} \approx \frac{-1}{2 E_p \left(p^0 - E_p + \frac{i m}{E_p} \frac{\Gamma}{2} \right)}$$

$p^2 \sim -m^2$
 $p^0 \sim E_p$ distribuição perto do pico

$$p^2 + m^2 = -(p^0)^2 + \frac{|p^0|^2 + m^2}{E_p^2} = \underbrace{(E_p + p^0)}_{\sim 2E_p} (E_p - p^0)$$

A matriz S

Começamos o cálculo do espalhamento definindo os estados inicial e final.

Estados iniciais: consideramos um número finito de pacotes que, em $t = -\infty$, estão isolados entre si e tem momento definido. Estes estados, definidos na representação de Heisenberg, são chamados de **in-states**:

$$|\{ \vec{p}_i \} \rangle_{IN}$$

Para tempos finitos $-T < t < +T$, estes pacotes de onda vão se sobrepor e interagir (elastica ou inelasticamente) dando origem a um outro conjunto de pacotes de onda que se afastam e acabam por ficar mutuamente isolados. Definiremos estes estados em $t = +\infty$, e os chamamos de **out-states**:

$$|\{ \vec{p}_i \} \rangle_{OUT}$$

O conjunto de todos possíveis estados in (out) é completo:

$$\sum_{IN} |\{ \vec{p}_i \} \rangle_{IN} \langle \{ \vec{p}_i \} |_{IN} = \sum_{OUT} |\{ \vec{p}_i \} \rangle_{OUT} \langle \{ \vec{p}_i \} |_{OUT} = 1$$

O que quer que podemos expandir um destes estados em função do conjunto de outros.