

Se todas as partículas tiverem massas idênticas, então:

$$E_A = E_B = E_{cm}/2 \quad |\vec{p}_A| = |\vec{p}_B| = |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = |\vec{p}|$$

$$E_A E_B / |v_A - v_B| = |E_A p_B - p_A E_B| = E_{cm} |\vec{p}|$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{cm} = \frac{|M|^2}{64 \pi^2 E_{cm}^2}$$

Espalhamento com quatro estados de massa idêntica

(eq. 185.1)



$m_i = m$
 $i = 1, \dots, 4$

Decaimento

Também podemos especializar as contas acima para o caso de uma partícula inicial decaindo (o caso $1 \rightarrow n$), basta voltar na eq. 181.2 e remover todas as integrais em k_B e \bar{k}_B (além do parâmetro de impacto):

$$d\Gamma = \left(\prod \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 dE_f} \right) \int \frac{d^3 k_A}{(2\pi)^3} \frac{\phi_A(\vec{k}_A)}{\sqrt{2E_A}} \int \frac{d^3 \bar{k}_A}{(2\pi)^3} \frac{\phi_A^*(\vec{k}_A)}{\sqrt{2E_A}} \langle \{p_f\} | \{k_A\} \rangle_{OUT} \langle \{p_f\} | \{\bar{k}_A\} \rangle_{IN}^*$$

o que significa que obteremos:

$$\int d^3 \bar{k}_A \delta(\vec{k}_A - \sum p_f) \delta(E_A - \sum E_f) = \delta(E_A - \sum E_f) \Big|_{\vec{k}_A = \sum p_f} \quad \text{(o que também implicará: } \vec{k}_A = \sum p_f, E_A = E_A \text{)}$$

ao invés do fator $|v_A - v_B|$ obtido na pg 182. Esta é de fato a única mudança. Assumindo de novo que o estado inicial é um pacote estreito e indo para o referencial do centro de massa (que neste caso coincide com o referencial de repouso da partícula inicial, que é onde definimos Γ de qualquer forma):

$$d\Gamma = \frac{1}{2m_A} \left(\prod \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 dE_f} \right) |M(m_A \rightarrow \{p_f\})|^2 (2\pi)^4 \delta(p_A - \sum p_f)$$

(eq. 185.2)

Aonde cabe a ressalva de que, uma vez que não é possível pensar em uma partícula INSTÁVEL no passado infinito, o que estamos assumindo aqui é que o tempo da vida τ , é tal que:

$$\tau \gg T \quad \Downarrow \quad \Delta E \simeq \frac{1}{T} \gg \frac{1}{\tau}$$

tempo que mandamos para infinito

energia total envolvida (neste caso ~ massa)

lembrando que estas duas grandezas estão ligadas pelo princípio da incerteza

ou seja, quando a largura é pequena em relação a massa (estado estreito) ou de vida longa.

Diagramas de Feynman para a Matriz S

(Nastase 20; Peskin 4.6)

Agora queremos calcular a matriz S da mesma forma que fizemos para as funções de Green, passando para o quadro de interação e expandindo perturbativamente, de forma que obtenhamos diagramas de Feynman. Partindo de (179.1 e 179.2):

$$\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \dots | S | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \underbrace{\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \dots |}_{\text{estados da teoria completa}} e^{-i H(\Delta T)} | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle \quad (\text{eq. 186.1})$$

Queremos os estados da teoria livre, vimos que (eq. 52.1):

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \left(e^{-i \tilde{E}_0 T} \langle \Omega | 0 \rangle \right)^{-1} e^{-i H T} | 0 \rangle$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \left(e^{-i \tilde{E}_0 T} \langle \Omega | 0 \rangle \right)^{-1} U_I(0, -T) | 0 \rangle$$

Faremos agora:

$$| \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle \propto \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} e^{-i H T} | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle_0$$

↳ estado livre, mas não é o vácuo

(estamos deixando a constante de proporcionalidade em aberto, pois ela pode ser bem complicada)

O lado direito de 186.1 fica:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \underbrace{\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \dots |}_{\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \dots |_0 e^{i H T}} e^{-i H(\Delta T)} \underbrace{| \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle}_{e^{-i H T} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0} \propto \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \underbrace{\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \dots |_0}_{\text{pacotes estreitos}} e^{-i H(\Delta T)} \underbrace{| \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0}_{U_I(T_1, -T)}$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \dots |_0 T \left\{ \text{EXP} \left[-i \int_{-T}^T dt H_I(t) \right] \right\} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0$$

$$\therefore S_{fi} \propto \langle f | U_I(+\infty, -\infty) | i \rangle$$

No caso das funções de Green a constante de proporcionalidade se cancela usando a normalização (passagem entre as eqs. 54.1 e 54.2) e aqui acontece o mesmo. Provar isso envolve provar a fórmula LSZ e não faremos isso neste curso. O resultado obtido fazendo a normalização correta e usando a fórmula de LSZ é dado por: ↳ curioso? Veja as notas de TQCII (2013), pgs 6 a 15

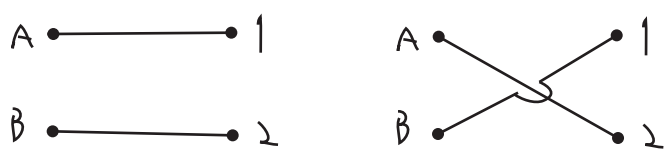
$$\langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | i T | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle = (\sqrt{Z})^{n+1} \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \left(\langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n |_0 T \left(\text{EXP} \left[-i \int_{-T}^T dt H_I(t) \right] \right) | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 \right) \begin{matrix} \text{conectado} \\ \text{amputado} \end{matrix}$$

(eq. 186.2)

Na equação 186.2 obtemos iT ao invés de S , pois a fórmula de LSZ só nos fornece estados conectados em que o estado inicial e final são diferentes. Ainda resta entender o que "amputado" quer dizer. Lembrando que $Z = 1$ a nível árvore, vejamos alguns exemplos:

$2 \rightarrow 2$ $\mathcal{O}(\lambda^0)$ o lado direito de 186.2 fica:

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 &\equiv \sqrt{2E_A 2E_B 2E_1 2E_2} \langle 0 | a_1 a_2 a_A^\dagger a_B^\dagger | 0 \rangle = \\ &= 2E_A 2E_B (2\pi)^4 \left[\delta^{(3)}(\vec{p}_A - \vec{p}_1) \delta^{(3)}(\vec{p}_B - \vec{p}_2) + \delta^{(3)}(\vec{p}_A - \vec{p}_2) \delta^{(3)}(\vec{p}_B - \vec{p}_1) \right] \end{aligned}$$



Desconectados (não são incluídos)
contribuem para a parte 1 de $S = 1 + iT$

$2 \rightarrow 2$ $\mathcal{O}(\lambda^1)$

$$\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | iT \left\{ -i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \phi_I^4(x) \right\} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 = \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | N \left\{ -i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \phi_I^4(x) + \text{contr.} \right\} | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 \quad (\text{eq. 187.1})$$

Teorema de Wick

$\neq 0$
Os ordenamentos normais não contraídos não somem.

Para ver o que acontece, imagine a ação de um dos operadores de aniquilação de ϕ^4 para a direita:

$$\begin{aligned} \phi_I^+ | \vec{p} \rangle_0 &= \left(\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} a_k e^{i\vec{k}x} \right) (\sqrt{2E_p} a_p^\dagger) | 0 \rangle = \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}x} \left((2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{p}) \right) | 0 \rangle = e^{i\vec{p}x} | 0 \rangle \end{aligned}$$

podemos pensar nisso como um novo tipo de contração: $\phi_I^+ | \vec{p} \rangle_0 = e^{i\vec{p}x} | 0 \rangle$

dentro de $\langle \dots | N(\phi^N) | \dots \rangle = \langle \dots | (\phi^-)^n (\phi^+)^{N-n} | \dots \rangle, n = 0, \dots, N$, temos os ϕ^+ agindo para a direita e os ϕ^- agindo para a esquerda. Definimos então:

$$\begin{aligned} \phi_I(x) | \vec{p} \rangle &= e^{i\vec{p}x} | 0 \rangle \\ \langle \vec{p} | \phi_I(x) &= e^{-i\vec{p}x} \langle 0 | \end{aligned}$$

(eq. 187.2)

no exemplo em questão como temos 2 estados iniciais e 2 finais, o único termo que vai ser diferente de zero é $n=2$ ($N=4$)

Em 187.1 temos termos do tipo: $\phi\phi\phi\phi$, $\phi\phi\phi\phi$, $\phi\phi\phi\phi$

O último termo não passa de um diagrama desconectado acompanhado de bolhas no vácuo:

$$-i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \phi\phi\phi\phi \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \vec{p}_a \vec{p}_b \rangle_0 = 0 \times \left(\begin{array}{c} A \text{---} 1 \\ B \text{---} 2 \end{array} \quad \begin{array}{c} A \text{---} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ B \text{---} 2 \end{array} \right)$$

O segundo termo, com apenas uma contração, nos dá o seguinte:

$$-i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x 2 \phi\phi \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \phi^- \phi^+ | \vec{p}_a \vec{p}_b \rangle_0 =$$

$\langle \phi^+ \phi^+ \rangle = \langle \phi^- \phi^- \rangle = 0$

quatro diagramas

Desconectados (não são incluídos)

Finalmente, no termo sem nenhuma contração somos obrigados a contrair todos os campos com os estados assintóticos:

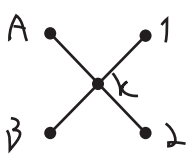
$$\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \phi^- \phi^- \phi^+ \phi^+ | \vec{p}_a \vec{p}_b \rangle_0 = 4! e^{i(p_a + p_b - p_1 - p_2)x}$$

várias formas de fazer, mas todas com o mesmo resultado

$$\therefore \left(\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \mathcal{N} \left\{ -i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \phi_{\mathbb{I}}^4(x) + \text{contr.} \right\} | \vec{p}_a \vec{p}_b \rangle_0 \right)_{\text{CONNECT.}} = -i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x 4! e^{i(p_a + p_b - p_1 - p_2)x} = -i \lambda (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_a + p_b - p_1 - p_2)$$

(eq. 188.1)

que é justamente o que obteríamos com as regras de Feynman para o diagrama:



como $i\mathcal{T} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_a + p_b - p_1 - p_2) i\mathcal{M} \Rightarrow \mathcal{M} = -\lambda$

logo a sessão de choque no centro de massa é: $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \frac{\lambda^2}{64\pi^2 E_{cm}^2}$ (eq. 188.2)

Como o lado direito não tem qualquer dependência angular, fica fácil integrar em Ω :

$$\sigma_{TOT} = \frac{\lambda^2}{32\pi E_{cm}^2} \quad \left(\int dR = 4\pi \right) \quad \frac{1}{2} \quad \text{(2 partículas idênticas)}$$

(eq. 189.1)

Vemos que só o diagrama conectado contribuiu para esta seção de choque, mas resta a pergunta: todos os diagramas conectados possíveis contribuirão para ela? Vejamos o seguinte diagrama

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \frac{-i}{p'^2 + m^2} (-i\lambda)(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p' - p_1 - p_2) (-i\lambda)(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_B - p')$$

$$= \frac{1}{2} \frac{-i}{p_B^2 + m^2} \quad \text{—D zero para partícula on-shell} \quad p_B^2 = -m^2$$

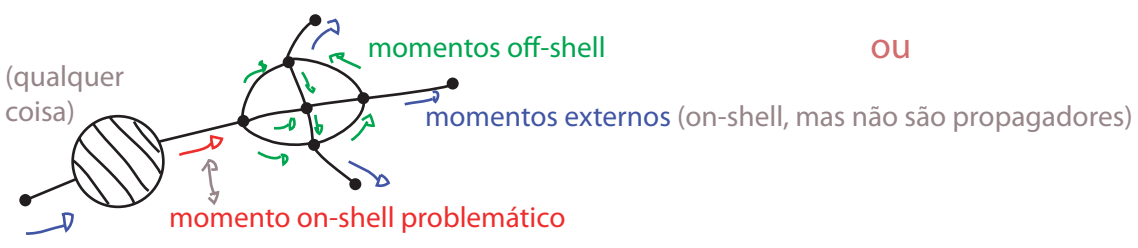
(eq. 189.2)

Essa é outra versão do problema que mencionamos pela primeira vez ao fim da página 105, onde obtemos as regras de Feynman no espaço dos momentos e apareceram propagadores para as linhas externas, na última expressão da pag 105 temos:

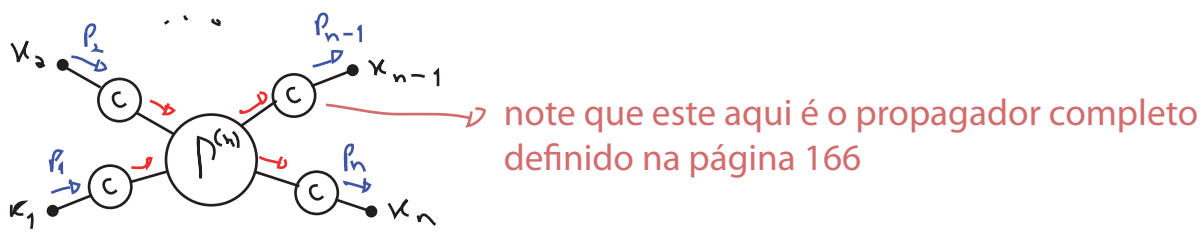
$$= \frac{\lambda^2}{3!} \underbrace{\Delta(p_1) \Delta(-p_2)}_{\Delta \propto \frac{1}{p_i^2 + m^2}} (2\pi)^4 \delta(p_2 + p_1) \int \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_i'}{(2\pi)^4} \Delta(p_1 - p_i - p_i') \Delta(p_i) \Delta(p_i')$$

ambos problemáticos on-shell $p_i^2 = -m^2$

Este problema não apareceu no cálculo de 188.1 pois os estados finais e iniciais foram tratados de forma apropriada nas páginas 187 e 188 (por meio da contração dos operadores com os estados assintóticos) e forneceram exponenciais ao invés de propagadores (o que é, finalmente, uma formalização do que fizemos na páginas 63 a 65). No entanto este tratamento não resolve o problema para o diagrama em 189.2 pois não é o propagador ligado ao ponto externo que está divergindo, mas sim aquele que envolve p' . Note que, em geral, este problema vai surgir toda vez em que um momento inicial ou final (por definição on-shell) "correr" dentro de alguma linha interna do diagrama. Note que:

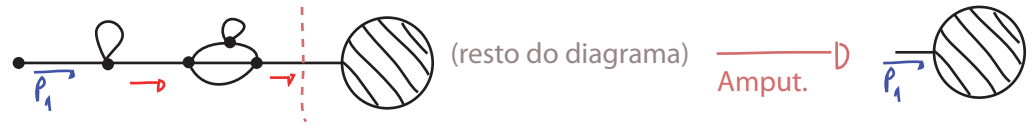


Fica claro que podemos fazer a seguinte separação:



onde queremos nos livrar dos propagadores em vermelho. Esta operação é chamada de amputar o

diagrama, uma vez que removeremos as pernas externas com TODAS AS SUAS CORREÇÕES, ou seja, o propagador completo. Operacionalmente podemos "seguir" o momento externo e procurar a linha mais distante do ponto externo em que podemos remover a perna cortando apenas um propagador:



É a estes diagramas amputados que nos referimos na eq. 186.2. Felizmente a fórmula de LSZ faz esta "amputação" formalmente, basta notar que (LSZ, eq 180.3):

$$\langle \{P_i\}_n | \{k_j\}_m \rangle_{in} = \lim_{\substack{p_i^2 \rightarrow -m_i^2 \\ k_j^2 \rightarrow -m_j^2}} \frac{1}{(-i\sqrt{z^1})^{m+n}} \prod_{i=1}^n (p_i^2 + m_i^2 - i\epsilon) \prod_{j=1}^m (k_j^2 + m_j^2 - i\epsilon) \tilde{G}_{n+m}(p_i^N, k_j^N)$$

Se encontra multiplicado pelos propagadores completos "problemáticos"

$$G_2(p) \sim \frac{-i z}{p^2 + m^2 - i\epsilon}$$

$$= (-i\sqrt{z^1})^{m+n} \prod_{i=1}^n \left(\frac{p_i^2 + m_i^2 - i\epsilon}{-i z} \right) \prod_{j=1}^m \left(\frac{k_j^2 + m_j^2 - i\epsilon}{-i z} \right)$$

Inverso do propagador completo! ($\Gamma^{(n)}$)

É por isso que obtemos só os diagramas amputados quando passamos da fórmula de LSZ para a eq. 186.2 e finalmente:

$$i \mathcal{M} (2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - \sum P_k) = \left(\sum \text{diagramas conectados e amputados} \right) \times (\sqrt{z^1})^{n+2} \quad (\text{eq. 190.1})$$

QED: definição e regras de Feynman

(Nastase 22; Peskin 4.8)

Agora passamos a aplicações físicas e construímos a nossa primeira Lagrangeana completa, observável e fenomenologicamente viável. Começaremos com a Eletrodinâmica Quântica, que é a versão de TQC para o eletromagnetismo. Para manter a teoria bem geral assumiremos que existem dois estados carregados: um férmion (que pode se o elétron) e um escalar complexo (que uma partícula escalar carregada qualquer: um méson ou um núcleo atômico). Exigir que a teoria seja invariante por transformações $U(1)_{EM}$ nos obriga a inserir também um campo de Gauge (o fóton) e obtemos a Lagrangeana (Minkowski):

$$\mathcal{L}_{QED}^{(M)}(A_\mu, \phi, \psi) = \underbrace{-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2}_{\mathcal{L}(A)} - \underbrace{\bar{\psi}(\not{D} + m)\psi}_{\mathcal{L}(A, \psi)} - \underbrace{(D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi)}_{\mathcal{L}(A, \phi)} - V(\phi^* \phi)$$

e.g.: $V(\phi^* \phi) = m^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2$

(eq. 190.2)

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad \not{D} = \gamma^\mu D_\mu \quad \bar{\psi} = \psi^\dagger i \gamma^0 \quad D_\mu = \partial_\mu - i e A_\mu$$

So a transformação U(1) local os campos se transformam da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 \psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = \psi(x) e^{ie\chi(x)} \\
 \phi(x) &\rightarrow \phi'(x) = \phi(x) e^{ie\chi(x)} \\
 A_\mu(x) &\rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \chi(x)
 \end{aligned}
 \tag{eq. 191.1}$$

é fácil ver (com um pouco de álgebra) que a Lagrangeana é invariante sobre estas transformações e também que ela perde a invariância local se fizermos $A_\mu = 0$ (mantém a invariância sobre U(1) global, no entanto).

Podemos passar para o espaço Euclideano (usando os resultados individuais para férmions, escalares e bósons de Gauge mostrados anteriormente):

$$iS^{(M)} \rightarrow -S^{(E)}$$

(pg 91) $\mathcal{L}^{(E)}(\phi) = \partial_\mu \phi^* \partial_\mu \phi + V(\phi^* \phi)$

(pg 126) $\mathcal{L}^{(E)}(\psi) = \bar{\psi} (\not{\partial} + m) \psi \quad \{ \not{\partial}_\mu, \not{\partial}_\nu \} = 2\delta_{\mu\nu}$

(pg 152) $\mathcal{L}^{(E)}(A) = +\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(E)} F^{(E)\mu\nu}$

o único termo novo é: $-ieA_\mu^{(M)} \rightarrow -ie(iA_\mu) \rightarrow -ieA_\mu$

mas ele está sempre contraído com:

| | | | | | |
|---|----------------------|--------------------|---|-----------------------|-----------------------------|
| { | $-ieA^\mu^{(M)}$ | A^0 | — | $-ieA^1$ | (não há mudança de sinal) |
| | $\not{\partial}^\mu$ | $\not{\partial}^0$ | — | $-ie\not{\partial}^1$ | |
| | γ^μ | γ^0 | — | $-ie\gamma^1$ | |

$$\therefore \mathcal{L}^{(E)}(A, \psi, \phi) = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \bar{\psi} (\not{\partial} + m) \psi + (\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) + V(\phi^* \phi)
 \tag{eq. 191.2}$$

Quantização:

Já vimos que a parte do bóson de Gauge, para ser quantizada, terá que passar por algum método de fixação de Gauge. Segundo o de Fadeev-Popov, ganhamos um termo de fixação de Gauge:

$$\mathcal{L}(A) \rightarrow \mathcal{L}_{EFF}(A) = \mathcal{L}(A) + \mathcal{L}_{GF} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2\alpha} (\partial^\mu A_\mu)^2$$

(a presença dos outros dois campos não muda o procedimento de Fadeev-Popov em nada, a única exigência que fizemos em relação a ação foi a de que fosse invariante de Gauge, o que é verdade para 191.2)

Resta então obter os propagadores. Na Lagrangeana 191.2 temos alguns termos de interação como:

$$(\gamma^\mu \bar{\psi} A_\mu \psi) \quad (\phi^* \phi A^\mu A_\mu)$$

a forma de lidar com estas interações é a habitual, adicionamos uma fonte para cada campo:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} - \mathcal{J}_\mu A_\mu - \bar{\xi} \Psi - \bar{\Psi} \xi - \mathcal{J} \phi - \bar{\mathcal{J}} \phi^*$$

e escrevemos as interações como derivadas nas fontes, que então podemos tirar de dentro das integrais de trajetória. O ponto é que uma vez feito isso, teremos três integrais de trajetória independentes, de três teorias livres:

$$\underbrace{\int \mathcal{D}A_\mu e^{-S(A)}}_{e^{\frac{1}{2} \mathcal{J}_\mu \Delta_{\mu\nu} \mathcal{J}_\nu}} \underbrace{\int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} e^{-S(\Psi)}}_{e^{\bar{\xi} \mathcal{S}_F \xi}} \underbrace{\int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^* e^{-S(\phi)}}_{e^{\bar{\mathcal{J}} \Delta \mathcal{J}}}$$

de onde fica claro que posso quantizar as três teorias independentemente e obter os propagadores já mostrados nas aulas anteriores.

Esquecendo o escalar por um tempo, temos o seguinte funcional gerador:

$$Z[\mathcal{J}_\mu, \xi, \bar{\xi}] = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} e^{-S_{\text{EFF}}[A, \Psi, \bar{\Psi}, \mathcal{J}_\mu, \xi, \bar{\xi}]} \quad (\text{eq. 192.1})$$

e o VEV de um operador qualquer será dado por:

$$\langle \hat{O}(A, \bar{\Psi}, \Psi) \rangle = \frac{\int \mathcal{D}A \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} O e^{-S_{\text{EFF}}[A, \Psi, \bar{\Psi}, \mathcal{J}_\mu, \xi, \bar{\xi}]}}{\int \mathcal{D}A \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} e^{-S_{\text{EFF}}[A, \Psi, \bar{\Psi}, \mathcal{J}_\mu, \xi, \bar{\xi}]}} \quad (\text{eq. 192.2})$$

a energia livre (gerador dos diagramas conectados):

$$Z[\mathcal{J}, \xi, \bar{\xi}] = e^{-W[\mathcal{J}, \xi, \bar{\xi}]}$$

e a ação efetiva (gerador dos diagramas 1PI) será dada por (transformada de Legendre):

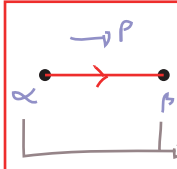
$$\Gamma[A_\mu, \bar{\Psi}_\mu, \Psi_\mu] = W[\mathcal{J}, \xi, \bar{\xi}] + \int d^4x [\mathcal{J}_\mu A_\mu^\mu + \bar{\xi} \Psi^\mu + \bar{\Psi}^\mu \xi] \quad (\text{eq. 192.3})$$

fazendo derivadas nesta equação obtemos as seguintes relações:

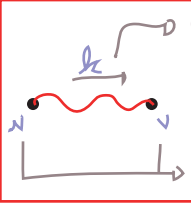
$$\frac{\delta W}{\delta \mathcal{J}_\mu} = -A_\mu^\mu \quad \frac{\delta W}{\delta \xi} = -\Psi^\mu \quad \frac{\delta W}{\delta \bar{\xi}} = \bar{\Psi}^\mu \quad (\text{eq. 192.4})$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu^\mu} = \mathcal{J}_\mu \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \Psi^\mu} = -\bar{\xi} \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\Psi}^\mu} = \xi \quad (\text{eq. 192.5})$$

Regras de Feynman no espaço dos momentos (Euclideo):

propagador do férmion:  = $\left(\frac{1}{i\not{p} + m} \right)_{\alpha\beta} = \frac{(-i\not{p} + m)_{\alpha\beta}}{p^2 + m^2}$ (Euclid.) (eq. 193.1)

índices espinoriais ($\alpha, \beta = 1 \dots 4$)

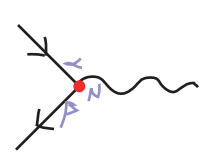
propagador do fóton:  = $\frac{1}{k^2} \left(\delta_{\mu\nu} - (1-\alpha) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right)$ (Euclid.) (eq. 193.2)

o sentido do momento não importa

índices de Lorentz

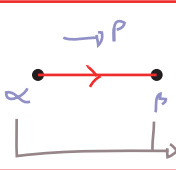
vértice: a interação é dada por parte da derivada covariante: $S_{\text{I}} = -i e \int d^4x \bar{\Psi}_\alpha (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} A_\mu \Psi_\beta$

então basta derivar nos campos para obter (segundo a eq 108.0):

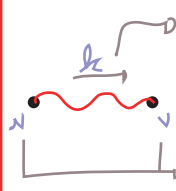
 = $i e (\gamma^\mu)_{\alpha\beta}$ (Euclid.) (eq. 193.3)

Regras de Feynman para a matriz S (Minkowski / Momentos):

As linhas externas on-shell, necessárias para o cálculo da matriz S, só podem ser obtidas no espaço físico, então re-escrevemos as regras fazendo a habitual rotação de volta:

 = $\frac{-(\not{p} + im)_{\alpha\beta}}{p^2 + m^2 - i\epsilon}$ (Mink.) (eq. 193.4)

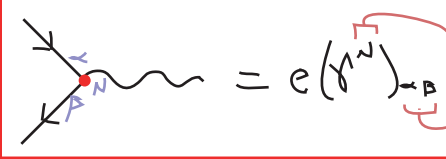
índices espinoriais ($\alpha, \beta = 1 \dots 4$)

 = $-\frac{i}{k^2 - i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} - (1-\alpha) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - i\epsilon} \right)$ (Mink.) (eq. 193.5)

o sentido do momento não importa

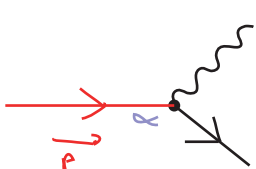
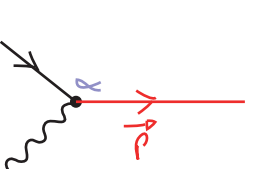
índices de Lorentz

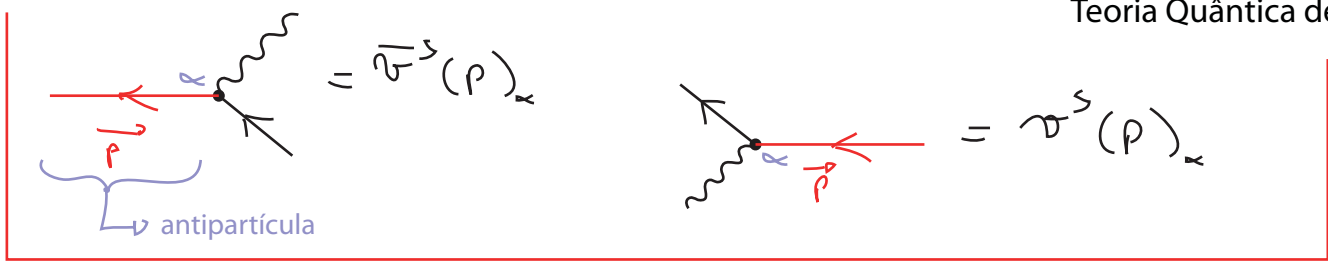
Para o vértice basta rodar S_1 antes de derivar nos campos:

 = $e (\gamma^\mu)_{\alpha\beta}$ (Mink.) (eq. 193.6)

note que os índices nos vértices tem que estar contraídos com os índices das linhas externas ou propagadores que entram neles

As linhas externas para os férmions foram obtidas nas pgs 131-132 (eq 132.1):

 = $u^s(p)_\alpha$  = $\bar{u}^s(p)_\alpha$ (Mink.)



e que agora podemos formalizar notando que (veja eq. 116.1):

$$\psi |e^-(\vec{p}, s)\rangle = u^s(p) e^{i p x} |0\rangle$$

$$\bar{\psi} |e^+(\vec{p}, s)\rangle = \bar{v}^s(p) e^{i p x} |0\rangle$$

$$|e^-(p, s)\rangle = \sqrt{2E_p} \hat{a}_r^+ |0\rangle$$

$$|e^+(p, s)\rangle = \sqrt{2E_p} \hat{b}_r^+ |0\rangle$$

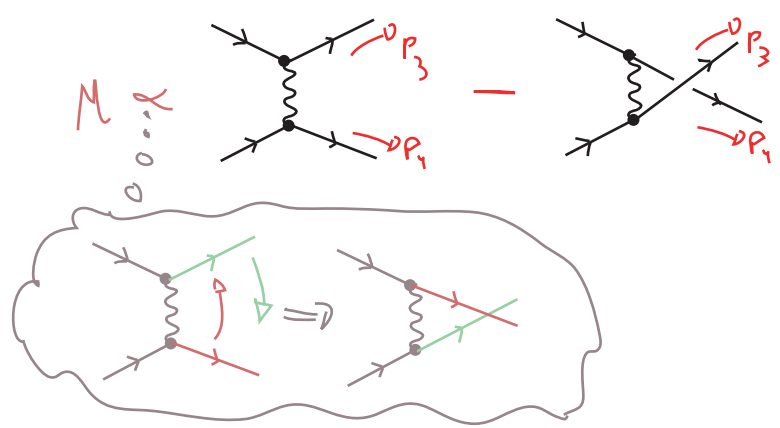
$$\langle e^-(\vec{p}, s) | \bar{\psi} = \bar{u}^s(p) e^{-i p x} \langle 0 |$$

$$\langle e^+(\vec{p}, s) | \psi = v^s(p) e^{-i p x} \langle 0 |$$

É importante notar que:

$$\psi \psi |p^1, s_1; p^2, s_2\rangle = -\psi \psi |p^2, s_2; p^1, s_1\rangle$$

portanto diagramas que difiram apenas pela troca de dois férmions finais vão ter um sinal relativo negativo. Exemplo:



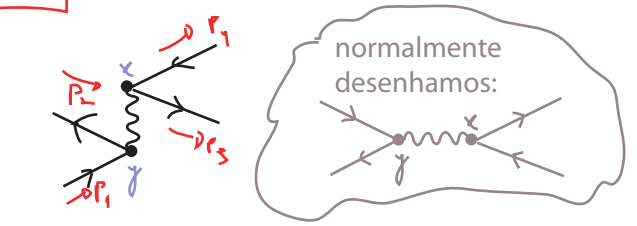
para saber o sinal global é preciso escrever o elemento de matriz explicitamente, raramente isso é necessário pois estamos interessados em $|M|^2$, mas há exceções (e.g.: cálculo de potenciais). Veja Peskin pgs 119 e 120.

Isto fale também se trocarmos linhas de elétrons e pósitrons, uma vez que são criados/aniquilados pelo mesmo campo. Note que (espalhamento Bhabha):

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow e^+e^-) \Rightarrow \langle e^-(p_2) e^+(p_1) | (\bar{\psi} A_\mu \psi)(x) (\bar{\psi} A_\nu \psi)(y) | e^-(p_1) e^+(p_2) \rangle$$

este espalhamento pode ser obtido de dois jeitos:

$$\langle e^+(p_1) e^-(p_2) | \bar{\psi}(x) \psi(x) \bar{\psi}(y) \psi(y) | e^-(p_1) e^+(p_2) \rangle$$



$$\langle e^+(p_1) e^-(p_2) | \bar{\psi}(x) \psi(x) \bar{\psi}(y) \psi(y) | e^-(p_1) e^+(p_2) \rangle$$

SINAL!!

Então:



Da mesma forma podemos obter a linha externa do fóton (usando a expansão da pag 149):

$$\underbrace{A_\mu(\vec{p})} = \epsilon_\mu(\vec{p}) e^{i p \cdot x} |0\rangle$$

$$\langle \vec{p} | \underbrace{A_\mu} = \epsilon_\mu^*(\vec{p}) e^{-i p \cdot x} \langle 0 |$$

↪ na pg 149 escolhemos ϵ real, que é útil para polariz. transversa. Para polarizações horárias ou anti-horárias seria mais conveniente tomar ϵ complexo

(Mink.)
(eq. 195.1)

Todas estas regras devem ser aplicadas seguindo a mesma lógica das regras da eq. 65.1 e lembrando que loops fermiônicos trazem um sinal (-1). Nosso objetivo é obter \mathcal{M} para então substituí-lo na eq. 184.2 (ou uma de suas especializações). Em suma:

Regras de Feynman da QED - obtendo \mathcal{M}

- (1) desenhar todos os diagramas conectados e amputados que contribuem para o espalhamento
- (2) escreva as funções dos propagadores (somente as linhas internas), conforme eqs. 193.4 e 193.5

(3) para cada vértice:

- (4) para as linhas externas: eqs 132.1 e 195.1 (com atenção do sinal relativo entre diagramas iguais sob a troca de ponto de inserção de linhas fermiônicas externas)

- (5) imponha conservação de momento em cada vértice (re-escrevendo os momentos internos)

- (6) integre sobre cada momento não determinado: $\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}$

- (7) divida pelo fator de simetria

- (8) multiplique por (-1) para cada loop fermiônico

- (9) rigorosamente deveríamos multiplicar por $(2\pi)^4 \delta^4(\sum p_\alpha)$ mas como estamos procurando

$$i \mathcal{M} (2\pi)^4 \delta^4(\sum p_\alpha) = \left(\sum \text{diagramas conectados e amputados} \right) \times (\sqrt{Z})^{n+2} \quad (\text{eq. 190.1})$$

basta dividir o resultado do passo (8) por i para obter \mathcal{M} (veremos o que fazer com Z em TQCII, mas a nível árvore $Z = 1$)

(195.2)

Conhecendo o elemento de matriz, podemos usá-lo no cálculo da seção de choque, lembrando que na integração sobre os momentos finais é possível **haver uma dupla contagem no caso de partículas idênticas nos estados finais** (que nada tem a ver com os fatores de simetria levados em conta nas regras de Feynman)

Processos não relativísticos

(Nastase 23; Peskin 4.7 e 4.8)

Usaremos agora o formalismo que desenvolvemos para obter alguns resultados para processos não relativísticos conhecidos. Assim poderemos ver como aplicá-lo ao mesmo tempo que prova-