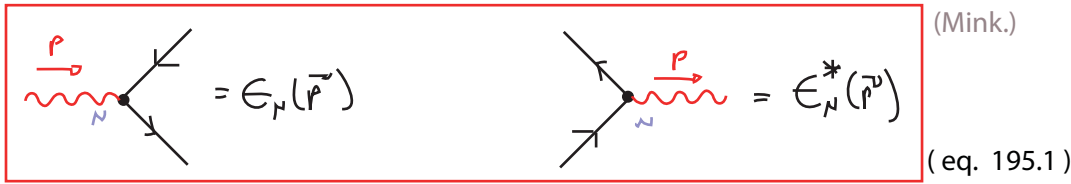


Da mesma forma podemos obter a linha externa do fóton (usando a expansão da pag 149):

$$A_\mu(\vec{p}) = \epsilon_\mu(\vec{p}) e^{i p \cdot x} |0\rangle$$

$$\langle \vec{p} | A_\mu = \epsilon_\mu^*(\vec{p}) e^{-i p \cdot x} \langle 0 |$$

↳ na pg 149 escolhemos ϵ real, que é útil para polariz. transversa. Para polarizações horárias ou anti-horárias seria mais conveniente tomar ϵ complexo



Todas estas regras devem ser aplicadas seguindo a mesma lógica das regras da eq. 65.1 e lembrando que loops fermiônicos trazem um sinal (-1). Nosso objetivo é obter \mathcal{M} para então substituí-lo na eq. 184.2 (ou uma de suas especializações). Em suma:

Regras de Feynman da QED - obtendo \mathcal{M}

- (1) desenhar todos os diagramas conectados e amputados que contribuem para o espalhamento
- (2) escreva as funções dos propagadores (somente as linhas internas), conforme eqs. 193.4 e 193.5

(3) para cada vértice: = $i e (\gamma^\nu)_{\alpha\beta}$

- (4) para as linhas externas: eqs 132.1 e 195.1 (com atenção do sinal relativo entre diagramas iguais sob a troca de ponto de inserção de linhas fermiônicas externas)
- (5) imponha conservação de momento em cada vértice (re-escrevendo os momentos internos)

(6) integre sobre cada momento não determinado: $\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}$

(7) divida pelo fator de simetria

(8) multiplique por (-1) para cada loop fermiônico

(9) rigorosamente deveríamos multiplicar por $(2\pi)^4 \delta^4(\sum p_\alpha)$ mas como estamos procurando

$$i \mathcal{M} (2\pi)^4 \delta^4(\sum p_\alpha) = \left(\sum \text{diagramas conectados e amputados} \right) \times (\sqrt{Z})^{n+2} \quad (\text{eq. 190.1})$$

basta dividir o resultado do passo (8) por i para obter \mathcal{M} (veremos o que fazer com Z em TQCII, mas a nível árvore $Z = 1$)

(195.2)

Conhecendo o elemento de matriz, podemos usá-lo no cálculo da seção de choque, lembrando que na integração sobre os momentos finais é possível **haver uma dupla contagem no caso de partículas idênticas nos estados finais** (que nada tem a ver com os fatores de simetria levados em conta nas regras de Feynman)

Processos não relativísticos

(Nastase 23; Peskin 4.7 e 4.8)

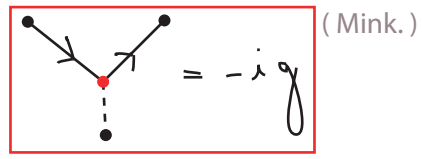
Usaremos agora o formalismo que desenvolvemos para obter alguns resultados para processos não relativísticos conhecidos. Assim poderemos ver como aplicá-lo ao mesmo tempo que prova-

mos a sua concordância com resultados experimentais conhecidos.

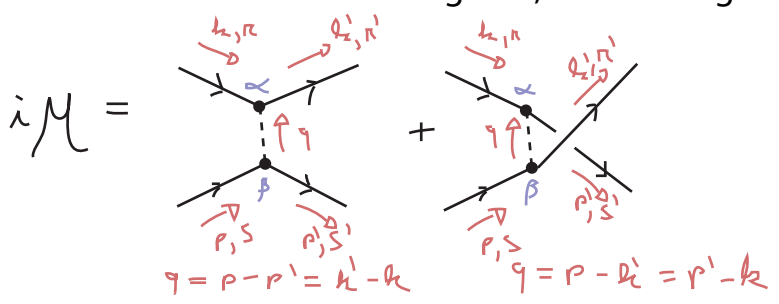
Potencial de Yukawa

Queremos ver se o potencial de Yukawa entre dois férmions é mesmo dado pela troca de um escalar, conforme a interação da pg 128 (teoria de Yukawa):

$$\mathcal{L}_Y^{(m)} = g \bar{\Psi} \Psi \phi$$



Para dois férmions idênticos interagindo, os dois diagramas em menor ordem de g que contribuem são:



Se não fossem idênticos poderíamos pegar só o primeiro, pois o momento estaria ligado a identidade do férmion, de fato é este caso que consideraremos. No limite não relativístico temos:

$$p \simeq (m, \vec{p}) \quad p' \simeq (m, \vec{p}') \quad k \simeq (m, \vec{k}) \quad k' \simeq (m, \vec{k}')$$

$$(p - p')^2 \simeq |\vec{p} - \vec{p}'|^2 \quad \text{ou} \quad p^0 - p'^0 \simeq m - m$$

$$u^s(p) \simeq \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} \quad \xi^s = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{u}^{s'}(p') u^s(p) = u^{s'+} (1 \gamma^0) u^s = m \begin{pmatrix} \xi^{s'+} & \xi^{s'+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} = 2m \xi^{s'+} \xi^s$$

Isso nos permite escrever ambos os diagramas (lembre-se que só usaremos o primeiro):

$$i\mathcal{M} = (-ig) \bar{u}^s(p')_\beta u^s(p)_\beta \frac{-i}{(p-p')^2 + m_\phi^2} (-ig) \bar{u}^k(k')_\alpha u^k(k)_\alpha$$

$$- (-ig) \bar{u}^{s'}(p')_\alpha u^k(k)_\alpha \frac{-i}{(p-k')^2 + m_\phi^2} (-ig) \bar{u}^{k'}(k') u^s(p)$$

↑ sinal da troca de férmions no estado final

(eq. 196.1)

O que quer dizer que, para férmions distinguíveis no limite não relativístico:

$$i\mathcal{M} \simeq \frac{ig^2}{|\vec{p} - \vec{p}'|^2 + m_\phi^2} (2m \delta^{s's}) (2m \delta^{k'k})$$

(eq. 196.2)

Podemos comparar este resultado com a aproximação de Born para espalhamentos em mecânica quântica:

$$\langle \vec{p}' | i T | \vec{p} \rangle = -i V(\vec{q}) 2\pi \delta(E_{p'} - E_p) \quad (\text{eq. 197.1})$$

$$\vec{q} = \vec{p}' - \vec{p} \quad \text{momento transferido}$$

que é válido para potenciais fracos (o que condiz com nossa aproximação perturbativa - estamos pegando só os diagramas em ordem mais baixa [LO]) e espalhamentos onde o estado final é parecido com o inicial (espalhamento com ângulo pequeno, energia trocada bem menor que a energia incidente). Nosso resultado é mais geral que isso (vale para qualquer ângulo), mas deve valer neste limite em particular.

A comparação é delicada, pois usamos normalizações diferentes do que usualmente se faz em mecânica quântica (para obter objetos relativisticamente invariantes). O fator de $2m$ acompanhando cada linha fermiônica vem desta diferença de normalização, então devemos ignorá-lo na comparação.

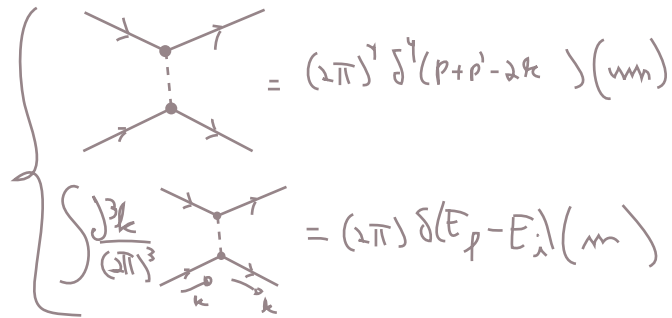
Outra sutileza vem do fato de que, na aproximação de Born, estamos assumindo que o momento do "centro espalhador" (o alvo), não muda, e temos só uma partícula inicial e uma final ($1 \rightarrow 1$). Isso quer dizer que: $\vec{p}^0 \neq \vec{p}'$ ao passo que $E_{p'} = E_p$ ($|\vec{p}'| = |\vec{p}'|$)

Nesse caso, definimos:

$$\langle \vec{p}' | i T | \vec{p} \rangle = i \mathcal{M} (2\pi) \delta(E_{p'} - E_p) \quad (\text{eq. 197.2})$$

(outra forma de ver isso é notar que, como não estamos observando o momento inicial ou final do alvo, temos que integrar sobre ambos, com a condição $k' = k$ temos apenas uma integral:

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} + \vec{p}' - 2\vec{k})$$



que absorve a delta nos momentos, deixando apenas a delta na energia:

Comparando 197.2 com 197.1 obtemos: $V(\vec{q}) = -\mathcal{M}$

e como (de novo, por conta da aproximação de Born), não há inversões de spin ($s' = s, r' = r$):

$$V(\vec{q}) = \frac{-g^2}{|\vec{q}|^2 + m_\phi^2} \quad (\text{eq. 197.3})$$

Para obter este potencial no espaço das posições fazemos:

$$V(\vec{x}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{-g^2}{|\vec{q}|^2 + m_\phi^2} e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} = \frac{-g^2}{(2\pi)^3} 2\pi \int_0^\infty q^2 dq \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{iqr} \frac{1}{q^2 + m_\phi^2} =$$

$$= \frac{-g^2}{4\pi^2 i r} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \frac{q e^{iqr}}{q^2 + m_\phi^2}$$

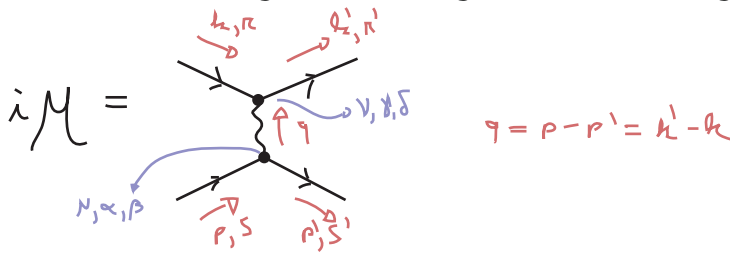
$r \equiv |\vec{x}|$
 $q \equiv |\vec{q}|$
 $\int_0^\pi \sin(\theta) d\theta e^{iqr \cos \theta} = \int_0^1 d(\cos \theta) e^{iqr \cos \theta} = \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{iqr}$

$$V(\vec{x}) = \frac{-g^2}{4\pi^2 i r} (2\pi i) \left(\frac{im e^{-m_\phi r}}{2im} \right) = \frac{-g^2}{4\pi r} e^{-m_\phi r} \quad (\text{eq. 197.4})$$

que é o potencial atrativo de Yukawa.

Potencial de Coulomb

Seguimos a mesma lógica acima, agora temos o diagrama:



$$i\mathcal{M} = \bar{u}^{\lambda}(p')_{\alpha} (e \gamma_{\alpha\mu}^{\lambda}) u^{\mu}(p)_{\beta} \frac{-i g^{\mu\nu}}{(p-p')^2} \bar{u}^{\nu}(k')_{\gamma} (e \gamma_{\nu\delta}^{\mu}) u^{\delta}(k)_{\delta}$$

No limite não relativístico:

$$\bar{u}^{\lambda}(p') \gamma^0 u^{\lambda}(p) = m (\xi^{S'+} \xi^{S+}) (i \gamma^0) \gamma^0 \begin{pmatrix} \xi^S \\ \xi^S \end{pmatrix} = -2im \delta^{SS'}$$

$$\bar{u}^{\lambda}(p') \gamma^i u^{\lambda}(p) = m (\xi^{S'+} \xi^{S+}) \begin{pmatrix} i \sigma^i & 0 \\ 0 & -i \sigma^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^S \\ \xi^S \end{pmatrix} = 0$$

e obtemos:

$$i\mathcal{M} = \frac{-i e^2 g_{00}}{|\vec{p}' - \vec{p}|^2} (+2im \delta^{SS'}) (+2im \delta^{\pi\pi'}) = -\frac{i e^2}{|\vec{p}' - \vec{p}|^2} (2m \delta^{SS'}) (2m \delta^{\pi\pi'})$$

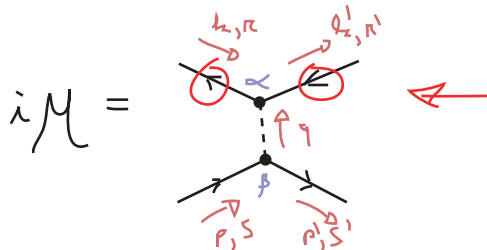
$$\boxed{V(q) = + \frac{e^2}{|\vec{q}|^2}} \quad (\text{eq. 198.1})$$

que é muito parecida com o potencial de Yukawa da eq. 197.3 (salvo o sinal e o fato de não termos massa). Portanto ao invés de fazer a transformada de Fourier de novo, basta inverter o sinal e fazer $m = 0$ em 197.4:

$$\boxed{V(\lambda) = \frac{\pm e^2}{4\pi\lambda} \equiv \frac{\alpha}{\lambda}} \quad (\text{eq. 198.2}) \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}$$

Potencial Partícula-Antipartícula

O que acontece se substituirmos um dos férmions por sua antipartícula?



$$\bar{u}^{\lambda}(k') u^{\lambda}(k) \rightarrow \bar{v}^{\lambda}(k) v^{\lambda}(k') = m \begin{pmatrix} \xi^{+\lambda} & -\xi^{+\lambda} \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -\xi^{+\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^{\lambda} \\ -\xi^{\lambda} \end{pmatrix} = -2m \delta^{\lambda\lambda'}$$

no entanto usando: $|p, k\rangle = a_p^+ b_k^+ |0\rangle$ $\langle p', k'| = \langle 0| b_k a_p$ mudança de sinal

$$\langle p', k' | \bar{\Psi} \Psi \bar{\Psi} \Psi | p, k \rangle = \langle 0 | b_k a_p (\bar{\Psi} \Psi)(z_2) (\bar{\Psi} \Psi)(z_1) a_p^+ b_k^+ | 0 \rangle$$

Para "desentrelaçar" as contrações preciso fazer um número ímpar de permutações, o que produz mais um sinal (este é um exemplo em que aplicar diretamente as regras de Feynman, sem tomar cuidado com o sinal global de \mathcal{M} pode levar ao erro, pois estamos interessados justamente neste sinal)

A conclusão é que o potencial de Yukawa é atrativo mesmo neste caso.

No caso do potencial de Coulomb também temos este segundo fator (-1) advindo da ordem dos operadores fermiônicos, no entanto a troca de "u" por "v" resulta em:

$$\bar{u}^s(p') \not{\epsilon} u^s(p) = -2im \delta^{ss'} \Rightarrow \bar{v}^s(k) \not{\epsilon} v^{s'}(k') = m (\not{\epsilon}^+ - \not{\epsilon}^-) \begin{pmatrix} i \not{\epsilon}^0 \\ -i \not{\epsilon}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^{s'} \\ -\xi^{s'} \end{pmatrix} = -2im \delta^{ss'}$$

ou seja, não há mudança aqui. Logo temos um sinal total de diferença, de forma que o potencial entre partícula e anti-partícula é atrativo.

Espalhamento Rutherford

Vamos calcular agora a seção de choque de espalhamento de um elétron por um campo elétrico gerado por um núcleo atômico (não estamos considerando o núcleo dinamicamente, assumimos que ele é infinitamente mais pesado que o elétron e seu único papel vai ser produzir o campo). A Hamiltoniana de interação é:

$$H_I = \int d^3x e \bar{\psi} i \not{\partial} \psi A_\mu$$

A primeira contribuição perturbativa para a parte não trivial da matriz S, de ordem e, é dada por (eq. 186.2):

$$\langle p' | iT | p \rangle = \langle p' | T \left\{ e^{-i \int H_I dt} \right\} | p \rangle = \dots + \underbrace{\langle p' | T \left\{ -i \int d^4x \bar{\psi} i \not{\partial} \psi A_\mu \right\} | p \rangle}_{\text{primeira ordem}} + \dots =$$

Note que não tenho fótons no estado inicial nem no final, e não estou contraindo A_μ com nada (se tratasse A como operador isto daria zero) - estamos tratando A como um campo clássico

$$\stackrel{\text{O}(e)}{=} e \bar{u}(p') \not{\epsilon} u(p) \int d^4x e^{i p' x} e^{-i p x} A_\mu(x) = e \bar{u}(p') \not{\epsilon} u(p) A_\mu(p-p') \quad (\text{eq. 199.1})$$

Se tomarmos a função $A_\mu(x)$ como independente do tempo, a sua transformada de Fourier vai ter uma delta de Dirac na energia:

$$A_\mu(p-p') = A_\mu(\vec{p}-\vec{p}') 2\pi \delta(\epsilon_p - \epsilon_{p'})$$

E, assim como na eq. 197.2, temos:

$$\langle p' | iT | p \rangle = i M(i\pi) \delta(\epsilon_p - \epsilon_{p'})$$

Vemos que o efeito do campo externo pode ser codificado em uma nova regra de Feynman:

