

Para "desentrelaçar" as contrações preciso fazer um número ímpar de permutações, o que produz mais um sinal (este é um exemplo em que aplicar diretamente as regras de Feynman, sem tomar cuidado com o sinal global de  $\mathcal{M}$  pode levar ao erro, pois estamos interessados justamente neste sinal)

A conclusão é que o potencial de Yukawa é atrativo mesmo neste caso.

No caso do potencial de Coulomb também temos este segundo fator (-1) advindo da ordem dos operadores fermiônicos, no entanto a troca de "u" por "v" resulta em:

$$\bar{u}^s(p') \not{\epsilon} u^s(p) = -2im \delta^{ss'} \Rightarrow \bar{v}^s(k) \not{\epsilon} v^{s'}(k) = m (\not{\epsilon}^+ - \not{\epsilon}^-) \begin{pmatrix} i \not{\epsilon}^0 \\ -i \not{\epsilon}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^{s'} \\ -\xi^{s'} \end{pmatrix} = -2im \delta^{ss'}$$

ou seja, não há mudança aqui. Logo temos um sinal total de diferença, de forma que o potencial entre partícula e anti-partícula é atrativo.

### Espalhamento Rutherford

Vamos calcular agora a seção de choque de espalhamento de um elétron por um campo elétrico gerado por um núcleo atômico (não estamos considerando o núcleo dinamicamente, assumimos que ele é infinitamente mais pesado que o elétron e seu único papel vai ser produzir o campo). A Hamiltoniana de interação é:

$$H_I = \int d^3x e \bar{\psi} i \not{\partial} \psi A_\mu$$

A primeira contribuição perturbativa para a parte não trivial da matriz S, de ordem e, é dada por (eq. 186.2):

$$\langle p' | iT | p \rangle = \langle p' | T \left\{ e^{-i \int H_I dt} \right\} | p \rangle = \dots + \underbrace{\langle p' | T \left\{ -i \int d^4x \bar{\psi} i \not{\partial} \psi A_\mu \right\} | p \rangle}_{\text{primeira ordem}} + \dots =$$

Note que não tenho fótons no estado inicial nem no final, e não estou contraindo  $A_\mu$  com nada (se tratasse A como operador isto daria zero) - estamos tratando A como um campo clássico

$$\stackrel{\text{O}(e)}{=} e \bar{u}(p') \not{\epsilon} u(p) \int d^4x e^{i p' x} e^{-i p x} A_\mu(x) = e \bar{u}(p') \not{\epsilon} u(p) A_\mu(p-p') \quad (\text{eq. 199.1})$$

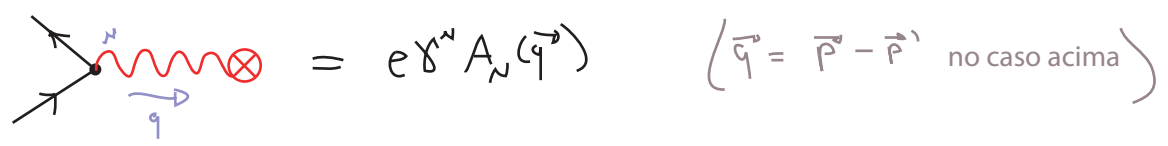
Se tomarmos a função  $A_\mu(x)$  como independente do tempo, a sua transformada de Fourier vai ter uma delta de Dirac na energia:

$$A_\mu(p-p') = A_\mu(\vec{p}-\vec{p}') 2\pi \delta(\epsilon_p - \epsilon_{p'})$$

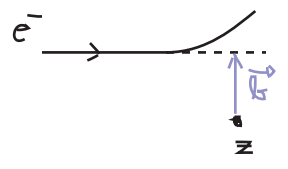
E, assim como na eq. 197.2, temos:

$$\langle p' | iT | p \rangle = i M(i\pi) \delta(\epsilon_p - \epsilon_{p'})$$

Vemos que o efeito do campo externo pode ser codificado em uma nova regra de Feynman:



Queremos então calcular o espalhamento:



Que é um espalhamento 2 → 2 onde, no entanto, estamos olhando apenas uma das partículas. Assim como antes, temos:

$$dP(i \rightarrow f) = \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 2E_f} |_{\text{OUT}} \langle p_f | \phi_A \rangle_{\text{IN}}|^2$$

$$d\sigma = \int d^3 \vec{k} dP(\vec{k}) = \int d^3 k \underbrace{\frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 2E_f}}_{(2\pi)^{-6}} \underbrace{\int \frac{d^3 k_i \phi(k_i)}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_i}}}_{(2\pi)^{-6}} \underbrace{\int \frac{d^3 k_f}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_f}}}_{(2\pi)^{-6}} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{k}_i - \vec{k}_f)} \times \langle p_f | k_i \rangle_{\text{IN}} \langle p_f | k_f \rangle_{\text{IN}}^*$$

Dado que:  $\langle p_f | k_i \rangle_{\text{IN}} = i \mathcal{M} 2\pi \delta(E_f - E_i)$   
 $\langle p_f | k_f \rangle_{\text{IN}}^* = -i \mathcal{M}^* 2\pi \delta(E_f - E_i)$

$$\int d^3 k e^{i\vec{k} \cdot (\vec{k}_i - \vec{k}_f)} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k}_i - \vec{k}_f)$$

$$\delta(E_f - E_i) \delta(E_f - E_i) = \delta(E_f - E_i) \frac{\delta(\vec{k}_i^z - k_f^z)}{|\frac{k_i^z}{E_i}|}$$

(x M(p\_i → p\_f))

$$\int \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 2E_f} 2\pi \delta(E_f - E_i) = d\Omega \int \frac{dp_r p_r^2}{8\pi^2 E_f} \frac{E_f}{p_r} \delta(p_f - p_i) = \frac{d\Omega}{8\pi} \int dp_r p_r \delta(p_f - p_i)$$

Mais uma vez assumimos que:  $|\phi(k_i)|^2 = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k}_i - \vec{p}_i)$  → cancela o que ainda tinha de potência de 2π por aí

$$\therefore \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{v_i E_i} \int dp_r p_r \delta(p_f - p_i) |M(p_i \rightarrow p_f)|^2$$

(eq. 200.1)

No caso de um núcleo de carga Z e teremos:  $A_0(\vec{r}) = + \frac{Ze}{4\pi r} \longrightarrow A_0(\vec{q}) = \frac{Ze}{|\vec{q}|^2}$

$$i\mathcal{M} = e \bar{u}(p_f) \gamma^\mu u(p_i) A_\mu(\vec{p}_f - \vec{p}_i) = Ze^2 \frac{\bar{u}(p_f) \gamma^0 u(p_i)}{|\vec{p}_f - \vec{p}_i|^2}$$

No limite relativístico, como já vimos:

$$\bar{u}^{s'}(\mathbf{p}_f) \gamma^0 u^s(\mathbf{p}_i) = -2im \delta^{ss'}$$

$$u^{s'}(\mathbf{p}_f)^\dagger \gamma^0 u^s(\mathbf{p}_i) = u^{s'}(\mathbf{p}_f)^\dagger (-\gamma^0) (-\gamma^0) (-1) u^s(\mathbf{p}_i) = -\bar{u}^{s'}(\mathbf{p}_f) \gamma^0 u^s(\mathbf{p}_i)$$

$$\therefore |iM|^2 = Z^2 e^4 \frac{4m^2 \delta^{ss'} \delta^{s's'}}{|\vec{p}_f - \vec{p}_i|^4} = Z^2 e^4 \frac{\bar{u}^{s'}(\mathbf{p}_f) \gamma^0 u^s(\mathbf{p}_i) (-1) \bar{u}^{s'}(\mathbf{p}_i) \gamma^0 u^s(\mathbf{p}_f)}{|\vec{p}_f - \vec{p}_i|^4}$$

Lembrando que temos que tirar a média sobre spins iniciais e somar sobre os finais (já que não estamos considerando feixes polarizados nem observando a polarização final):

$$\frac{1}{2} \sum_{ss'} |M|^2 = \frac{Z^2 e^4 m^2}{|\vec{p}_f - \vec{p}_i|^4} \left( \frac{1}{2} \sum_{ss'} \delta^{ss'} \delta^{s's'} = 1 \right)$$

$$|\vec{p}_f + \vec{p}_i - 2p_i \cos \theta| = \sqrt{2p_i^2 - 2p_i^2 \cos \theta} = 2p_i \sin(\theta/2)$$

(eq. 200.1)  $\Rightarrow |\vec{p}_f| = |\vec{p}_i| \Rightarrow |\vec{p}_f - \vec{p}_i| = 2p_i \sin(\theta/2) \simeq 2m v_i \sin(\theta/2)$

Enfim:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{v_i E_i} \frac{m v_i}{(2m v_i \sin(\theta/2))^4} \frac{Z^2 e^4 m^2}{4m^2 v_i^4 \sin^4(\theta/2)} \stackrel{\alpha = \frac{e^2}{4\pi}}{=} \frac{Z^2 \alpha^2}{4m^2 v_i^4 \sin^4(\theta/2)}$$

(eq. 201.1)

que é o resultado obtido por Rutherford em 1911.

## Espalhamento $e^+e^- \rightarrow \ell \bar{\ell}$ despolarizado

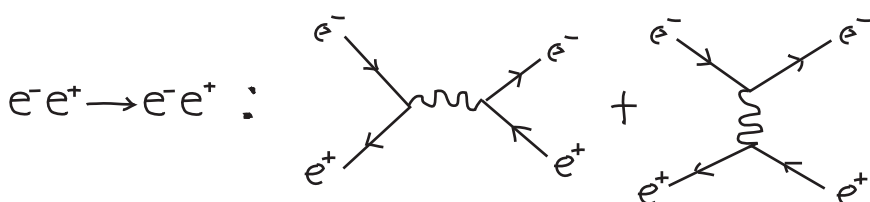
(Nastase 24; Peskin 5.1)

Agora que já reproduzimos alguns resultados clássicos conhecidos vamos atacar um espalhamento novo, a aniquilação elétron-pósitron em léptons, que é intrinsecamente quântica-relativística.

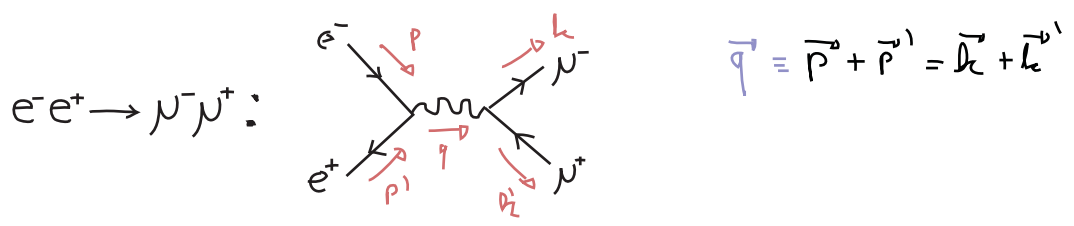
Lépton:  $\ell \equiv e^-, \mu^-, \tau^-, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$   
 $\bar{\ell} \equiv e^+, \mu^+, \tau^+, \bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu, \bar{\nu}_\tau$

(eq. 201.2)

Se consideramos apenas a QED podemos esquecer dos neutrinos (já que não tem carga elétrica nenhum vértice nesta teoria os envolve). O caso em que  $\ell = e^-$  é chamado de Espalhamento Bhabha e tem dois diagramas (ordem  $e^2$ ):



No caso em que  $l = \mu, \tau$  temos apenas o primeiro diagrama. Realizaremos o cálculo para o muon, mas a única coisa que muda para o  $\tau$  é a massa.



Note que para criar o par de léptons final eu preciso ter uma energia mínima inicial:

$$E_{cm} > 2m_l \quad (\text{eq. 202.1})$$

o que significa:

{	energia inicial	estados finais possíveis (ignorando a produção de quarks)
	$E_{cm} < 2m_\mu$	$e^- e^+$
	$2m_\mu \leq E_{cm} < 2m_\tau$	$e^- e^+; \mu^- \mu^+$
	$E_{cm} \geq 2m_\tau$	$e^- e^+; \mu^- \mu^+; \tau^- \tau^+$

Usando as regras de Feynman para o diagrama acima obtemos:

$$i \mathcal{M} = \bar{v}^{s'}(p') (e \gamma^\mu) u^s(p) \left( \frac{-i g^{\mu\nu}}{q^2 - i\epsilon} \right) \bar{u}^r(k) (e \gamma^\nu) v^r(k') =$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{-i\epsilon}$  não importa aqui porque não estamos integrando em  $q$  e, por conservação de momento,  $q^2 \neq 0$

$$= -\frac{i e^2}{q^2} (\bar{v}^{s'}(p') \gamma^\mu u^s(p)) (\bar{u}^r(k) \gamma_\mu v^r(k'))$$

$$(\bar{v} \gamma^\mu u)^* = (\bar{v} \gamma^\mu u)^\dagger = u^\dagger (i \gamma^\mu)^\dagger (v^\dagger i \gamma^0)^\dagger = u^\dagger (+i) \gamma^{\mu\dagger} i \gamma^0 v = \bar{u} i \gamma^\mu v$$

$(i \gamma^0)^\dagger = i \gamma^0$        $\gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = +\gamma^0 \gamma^\mu$

$$(\bar{v} \gamma^\mu u)^* = -\bar{u} \gamma^\mu v$$

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{q^4} (\bar{v}^{s'}(p') \gamma^\mu u^s(p)) (\bar{u}^r(k) \gamma_\mu v^r(k')) (\bar{v}^r(k') \gamma_\nu u^r(k)) (\bar{u}^s(p) \gamma^\nu v^{s'}(p'))$$

(eq. 202.2)

Se não estamos observando as polarizações devemos tirar a média sobre as duas polarizações iniciais e somamos sobre as finais, obtendo a chamada **seção de choque despolarizada**. Estas somas vão agir sobre os  $u$ 's e  $v$ 's (eqs. 133.1 e 133.2):

$$\sum_s u_i^s(p) \bar{u}_j^s(p) = -i \not{p}_{ij} + m \hat{1}_{ij} \quad \sum_s v_i^s(p) \bar{v}_j^s(p) = -i \not{p}_{ij} - m \hat{1}_{ij}$$

Explicitando os índices spinoriais em 202.2 temos:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4^4} (\bar{u}_i^{s'}(p') \gamma_{ij}^{\mu} u_j^s(p)) (\bar{u}_k^{\pi}(k) \gamma_{kl}^{\nu} u_l^{\pi'}(k')) (\bar{u}_m^{\pi'}(k') \gamma_{mn}^{\rho} u_n^{\pi}(k)) (\bar{u}_o^s(p) \gamma_{op}^{\sigma} u_p^{s'}(p'))$$

$$\frac{1}{2} \sum_s \frac{1}{2} \sum_{s'} \sum_{\pi} \sum_{\pi'} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4^4} \gamma_{ij}^{\mu} \gamma_{kl}^{\nu} \gamma_{mn}^{\rho} \gamma_{op}^{\sigma} (-i \not{k}' - m_{\nu})_{lm} (-i \not{k} + m_{\rho})_{nk} (-i \not{p} + m_{\sigma})_{jo} (-i \not{p}' - m_{\sigma})_{pi}$$

$$\text{Tr}[\gamma_{\mu}(-i \not{k}' - m_{\nu}) \gamma_{\nu}(-i \not{k} + m_{\rho})] \quad \text{Tr}[\gamma^{\mu}(-i \not{p} + m_{\sigma}) \gamma^{\nu}(-i \not{p}' - m_{\sigma})]$$

estes traços não são coincidência, notem que aparece um deles por linha fermiônica e isto vai sempre acontecer.

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{SPINS}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4^4} \text{Tr}[\gamma_{\mu}(-i \not{k}' - m_{\nu}) \gamma_{\nu}(-i \not{k} + m_{\rho})] \text{Tr}[\gamma^{\mu}(-i \not{p} + m_{\sigma}) \gamma^{\nu}(-i \not{p}' - m_{\sigma})] \quad (\text{eq. 203.1})$$

Para calcular os traços acima precisamos desenvolver um certo arsenal de identidades envolvendo matrizes de Dirac (note que há até quatro delas em cada traço). Fazemos uma pausa no presente cálculo para desenvolver este arsenal.

### Identidades com Matrizes de Dirac

Dado que:  $(\gamma^5)^2 = 1$   
 $\{\gamma^{\mu}, \gamma^5\} = 0$  } propriedades independentes de representação

$$\text{Tr}[\gamma^{\mu}] = \text{Tr}[(\gamma^5)^2 \gamma^{\mu}] = -\text{Tr}[\gamma^5 \gamma^{\mu} \gamma^5] = -\text{Tr}[\gamma^{\mu}] = 0$$

CICLIZAR DE

$$\text{Tr}[\gamma^5] = \text{Tr}[\pm (\gamma^{\mu})^2 \gamma^5] = \text{Tr}[\pm \gamma^{\mu} \gamma^5 \gamma^{\mu}] = -\text{Tr}[\gamma^5] = 0$$

depende de repr. e de  $\mu \rightarrow (\gamma^{\mu})^2 = \pm 1$

$$\text{Tr}[\gamma^{\mu}] = \text{Tr}[\gamma^5] = 0 \quad (\text{eq. 203.2})$$

Note que o mesmo que fizemos para provar as identidades acima poderia ser usado para provar:

$$\text{Tr}[\underbrace{\gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \gamma^{\rho} \dots \gamma^{\sigma}}_{\text{ímpar}}] = 0 \quad (\text{eq. 203.3})$$

$$\text{Tr}[\gamma^5 \gamma^5 \dots \gamma^5] = \text{Tr}[\gamma^5] = 0 \quad (\text{eq. 203.4})$$

$$\boxed{\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu]} = \text{Tr} \left[ \frac{1}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu + \frac{1}{2} \overset{\text{CICL.}}{\gamma^\nu \gamma^\mu} \right] = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ \underbrace{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}}_{2g^{\mu\nu} \cdot \hat{1}_{4 \times 4}} \right] = 4g^{\mu\nu} \quad (\text{eq. 204.1})$$

De uma forma geral, o que fazemos com um produto de matrizes de Dirac é expandir na base:

$$\mathcal{V}_{\mathbb{F}} = \{ \hat{1}, \gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma^5, \gamma^{\mu\nu} \}$$

e vale:  $\boxed{\mathcal{V}_{\mathbb{F}} \neq \hat{1} \leftrightarrow \text{Tr}[\mathcal{V}_{\mathbb{F}}] = 0}$  (eq. 204.2)

Já provamos isso para o segundo e o terceiro e:  $\text{Tr}[\underbrace{\gamma^\mu \gamma^5}_{(-1)}] = -\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^5] = 0$

$$\text{Tr}[\gamma^{\mu\nu}] \leftarrow \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu] = 4g^{\mu\nu} - 4g^{\nu\mu} = 0$$

Produtos mais complicados podem ser expandidos na base usando:

$$\begin{aligned} \gamma^{\mu\nu} \gamma^5 &= -\frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_{\rho\sigma} \\ \gamma^{\mu\nu\rho} &= -i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\sigma \\ \gamma^{\mu\nu\rho} \gamma_5 &= -i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\sigma \\ \gamma^{\mu\nu\rho\sigma} &= i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_5 \end{aligned} \quad (\text{eq. 204.3})$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\underbrace{\gamma^\mu \gamma^\nu}_{2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu} \gamma^\rho \gamma^\sigma] &= \text{Tr}[(2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu) \underbrace{\gamma^\rho \gamma^\sigma}_{g^{\rho\sigma} - \gamma^\sigma \gamma^\rho}] = \\ &= \text{Tr}[2g^{\mu\nu} \underbrace{\gamma^\rho \gamma^\sigma}_{\text{Tr}[\gamma^\rho \gamma^\sigma] = 4g^{\rho\sigma}} - 2g^{\mu\rho} \gamma^\nu \gamma^\sigma + 2g^{\mu\sigma} \gamma^\nu \gamma^\rho] - \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] \\ 2\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] &= 2[4g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - 4g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + 4g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}] \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma]} = 4[g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}] \quad (\text{eq. 204.4})$$

Como  $\gamma^5 = -i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$

$$\boxed{\text{Tr}[\underbrace{\gamma^\mu \dots \gamma^\nu}_{\text{ÍMPAR}} \gamma^5]} = 0 \quad (\text{eq. 204.4})$$

Já o produto com 2  $\gamma_s$ :

$$\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha] = \text{Tr} [\pm (\gamma^\alpha)^2 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha] = -\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha] = 0 \quad (\text{eq. 205.1})$$

*Handwritten notes: "cicl" above the second term, "(-)" above the third term, and " $\alpha \neq \mu ; \alpha \neq \nu$ " below the first term.*

o que não funciona para 4  $\gamma_s$ , caso sejam as 4 diferentes, uma vez que já não existe uma quinta para inserir como identidade.

$$\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma]$$

*Handwritten note: " $\{\mu, \nu, \alpha, \beta, \gamma\} = \text{alguma perm. de } \{0, 1, 2, 3\}$ " with an arrow pointing to the indices.*

*Handwritten note: "antissim sobre a troca de quaisquer dois índices" with an arrow pointing to the curly braces.*

$$\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma] \propto \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \left( \text{para achar a constante de proporcionalidade basta escolher uma das permutações, ex: } \{\mu, \nu, \alpha, \beta\} = \{0, 1, 2, 3\} \right)$$

$$\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^5] = 4i \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \quad (\text{eq. 205.2})$$

Também é útil conhecer as contrações entre os  $\epsilon_s$ :

$$\begin{aligned} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} &= 4! \epsilon^{0123} \epsilon_{0123} = -24 \\ \epsilon^{\alpha\beta\gamma\mu} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\nu} &= 3! \delta_\nu^\mu \epsilon^{0123} \epsilon_{0123} = -6 \delta_\nu^\mu \\ \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} &= 2! (\delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu - \delta_\sigma^\mu \delta_\rho^\nu) \epsilon^{0123} \epsilon_{0123} = -2 (\delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu - \delta_\sigma^\mu \delta_\rho^\nu) \end{aligned}$$

e notar que é possível inverter a ordem das  $\gamma_s$  no traço:

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \dots] &= \text{Tr} [C \gamma^\mu C^{-1} C \gamma^\nu C^{-1} \dots \gamma^\rho C^{-1}] = (-1)^n \text{Tr} [\gamma^{\mu T} \gamma^{\nu T} \dots] = \\ &= (-1)^n \text{Tr} [(\dots \gamma^\nu \gamma^\mu)^T] = (-1)^n \text{Tr} [\dots \gamma^\nu \gamma^\mu] \end{aligned}$$

*Handwritten note: "se n é ímpar o traço é zero."*

$$\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \dots] = \text{Tr} [\dots \gamma^\nu \gamma^\mu] \quad (\text{eq. 205.3})$$

Finalmente, listamos algumas contrações entre  $\gamma_s$  que nos permitem simplificar o argumento do traço antes de fazê-lo:

$$g_{\mu\nu} (\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}) \Rightarrow \gamma^\mu \gamma_\mu = \delta^\mu_\mu = 4 \quad (\text{eq. 205.4})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\mu + 2g^{\mu\nu} \gamma_\mu = -2\gamma^\nu \quad (\text{eq. 205.5})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\nu = -\gamma^\nu \underbrace{\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma_\nu}_{-2\gamma^\rho} + 2g^{\mu\nu} \gamma^\rho \gamma_\nu = 2\gamma^\nu \gamma^\rho + 2\gamma^\rho \gamma^\nu = 4\gamma^{\nu\rho} \quad (\text{eq. 206.1})$$

(seguindo a mesma lógica)

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\nu = -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\mu \quad (\text{eq. 206.2})$$

Voltando ao cálculo da seção de choque, podemos simplificar bastante a equação 203.1

$$(\text{eq 203.1}) \rightarrow \frac{1}{4} \sum_{\text{SPINS}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4q^4} \text{Tr}[\gamma_\mu (-i\not{k}' - m_e) \gamma_\nu (-i\not{k} + m_e)] \text{Tr}[\gamma^\mu (-i\not{p} + m_e) \gamma^\nu (-i\not{p}' - m_e)] =$$

do quatro termos aqui, apenas dois tem o traço não nulo:  
 $\sim \gamma_\mu \not{k}' \gamma_\nu \not{k}$       &       $\sim m_e^2 \gamma_\mu \gamma_\nu$

logo:

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\gamma_\mu (-i\not{k}' - m_e) \gamma_\nu (-i\not{k} + m_e)] &= -k'^\alpha \not{\epsilon}^\mu \text{Tr}[\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta] - m_e^2 \text{Tr}[\gamma_\mu \gamma_\nu] = \\ &= -4k'^\alpha k^\beta (g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + g_{\mu\beta} g_{\alpha\nu}) - 4m_e^2 g_{\mu\nu} = \\ &= 4(-k'_\mu k_\nu + k'_\mu k_\nu g_{\mu\nu} - k_\mu k'_\nu - m_e^2 g_{\mu\nu}) \end{aligned}$$

da mesma forma:

$$\text{Tr}[\gamma^\mu (-i\not{p} + m_e) \gamma^\nu (-i\not{p}' - m_e)] = 4(-p^\mu p'^\nu - p'^\mu p^\nu + p^\mu p^\nu g_{\mu\nu} - \underbrace{m_e^2 g_{\mu\nu}})$$

como os momentos são da ordem de  $m_e$  e  $m_e/\mu \sim \frac{1}{200}$  podemos desprezar este termo

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{SPINS}} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{4e^4}{q^4} \left[ +k'_\mu k_\nu + k_\mu k'_\nu + g_{\mu\nu} (m_e^2 - k'_\mu k^\mu) \right] \left[ +p^\mu p'^\nu + p'^\mu p^\nu + \underline{p^\mu p^\nu g_{\mu\nu}} \right] = \\ &= \frac{4e^4}{q^4} \left[ 2k'_\mu p^\mu k^\mu p'^\mu + 2k'_\mu p'^\mu k^\mu p^\mu - 2k'_\mu k^\mu p^\mu p'^\mu + (m_e^2 - k'_\mu k^\mu) (2p^\mu p'^\mu - 4p^\mu p^\mu g_{\mu\nu}) \right] = \end{aligned}$$

$-2p^\mu p^\mu$

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{SPINS}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4}{q^4} (k'_\mu p^\mu k^\mu p'^\mu + k'_\mu p'^\mu k^\mu p^\mu - m_e^2 p^\mu p^\mu) \quad (\text{eq. 206.2})$$

Esta expressão pode ser calculada em qualquer referencial, tomemos o do centro de massa.



## Seção de Choque no ref. do CM

Dado que:  $2E_e > 2m_\mu \sim 400 m_e$  estamos falando de elétrons ultra-relativísticos e podemos desprezar sua massa, ou seja, no centro de massa:

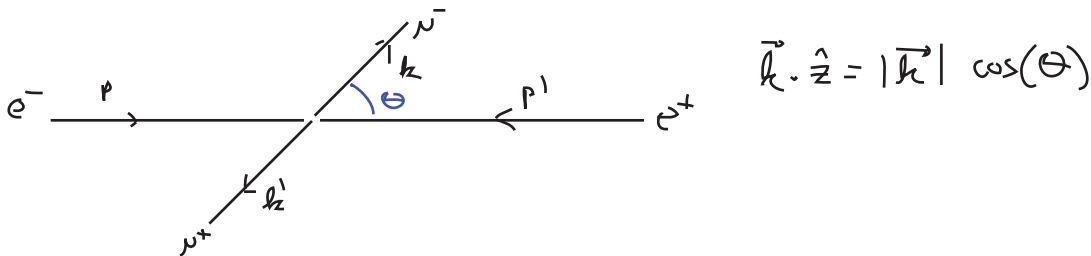
$$p = (E, E\hat{z}) \quad p' = (E, -E\hat{z})$$

Como a massa do muon e do anti-muon são iguais:  $E_\mu = E_e = E$

(conserv. energia)  $2E = E_{\mu^-} + E_{\mu^+}$   $m_{\mu^-} = m_{\mu^+}$   
 (conserv. momento)  $0 = \vec{k} + \vec{k}' \Rightarrow |\vec{k}| = |\vec{k}'| \Rightarrow E_{\mu^-} = E_{\mu^+}$  }  $2E_\mu = 2E$

Então:  $k = (E, \vec{k}) \quad k' = (E, -\vec{k})$   
 $|\vec{k}| = \sqrt{E^2 - m_\mu^2}$

Definimos então o ângulo entre os elétrons e os muons:



$$q^2 = (p + p')^2 = \underbrace{p_\mu p^\mu}_0 + \underbrace{p'_\nu p'^\nu}_{\sim m_e \rightarrow 0} + 2 p_\mu p'^\mu = -4E^2 \quad (\text{eq. 207.1})$$

$$p_\mu p'^\mu = (-E^2 - E^2) = -2E^2 \quad (\text{eq. 207.2})$$

$$\begin{aligned} p \cdot k &= p' \cdot k' = -E^2 + \vec{k} \cdot (E\hat{z}) = -E^2 + E|\vec{k}|\cos\theta \\ p \cdot k' &= p' \cdot k = -E^2 - \vec{k} \cdot (E\hat{z}) = -E^2 - E|\vec{k}|\cos\theta \end{aligned} \quad (\text{eq. 207.3})$$

Voltando com estas identidades em 206.2, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{SPINS}} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{8e^4}{(4E)^4} \left[ \underbrace{(-E^2 - E|\vec{k}|\cos\theta)^2}_{E^2(E+|\vec{k}|\cos\theta)^2} + \underbrace{(-E^2 + E|\vec{k}|\cos\theta)^2}_{E^2(E-|\vec{k}|\cos\theta)^2} - m_\mu^2 (-2E^2) \right] = \\ &= \frac{e^4}{4E^2} \left[ \underbrace{(E+|\vec{k}|\cos\theta)^2 + (E-|\vec{k}|\cos\theta)^2}_{2E^2 + 2|\vec{k}|^2\cos^2\theta} + 2m_\mu^2 \right] = \\ &= e^4 \left[ 1 + \frac{m_\mu^2}{E^2} + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \cos^2\theta \right] \quad (\text{eq. 207.4}) \end{aligned}$$

Voltaremos com este resultado na seção de choque para dois corpos (eq. 184.4):

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} = \frac{1}{2\bar{E}_A 2\bar{E}_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \frac{|\bar{P}_1|}{4\pi^2 \bar{E}_{cm}} \underbrace{|\mathcal{M}(P_A, P_B \rightarrow P_1, P_2)|^2}_{\frac{1}{4} \sum_{\text{SPINS}} |\mathcal{M}|^2}$$

no nosso caso:  $P_A = p$   $P_B = p'$   $P_1 = k$   $P_2 = k'$

$$2E_A = 2E_B = 2E = E_{cm}$$

$$\vec{v}_A = \frac{\vec{p}}{E} = \hat{z} \quad \vec{v}_B = \frac{\vec{p}'}{E} = -\hat{z} \quad \Rightarrow |\vec{v}_A - \vec{v}_B| = 2$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} = \frac{1}{2E_{cm}^2} \frac{|\vec{k}|}{4\pi^2 2E} \left[ 1 + \frac{m_N^2}{E^2} + \left(1 - \frac{m_N^2}{E^2}\right) \cos^2\theta \right]$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} = \frac{\alpha^2}{4E_{cm}^2} \sqrt{1 - \frac{m_N^2}{E^2}} \left[ 1 + \frac{m_N^2}{E^2} + \left(1 - \frac{m_N^2}{E^2}\right) \cos^2\theta \right] \quad (\text{eq. 208.1})$$

No limite ultra-relativístico  $E \gg m_N$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm, \text{ULTRAREL}} = \frac{\alpha^2}{4E_{cm}^2} (1 + \cos^2\theta) \quad (\text{eq. 208.2})$$

A seção de choque total é encontrada integrando-se sobre o ângulo sólido:

$$d\Omega = \sin(\theta) d\theta d\varphi = 2\pi \sin(\theta) d\theta = -2\pi d(\cos\theta) \quad \int_{-1}^1 d(\cos\theta) = 2$$

$0 < \theta < \pi \quad 1 < \cos\theta < -1$

$$\int_{-1}^1 d(\cos\theta) \cos^2\theta = \frac{2}{3}$$

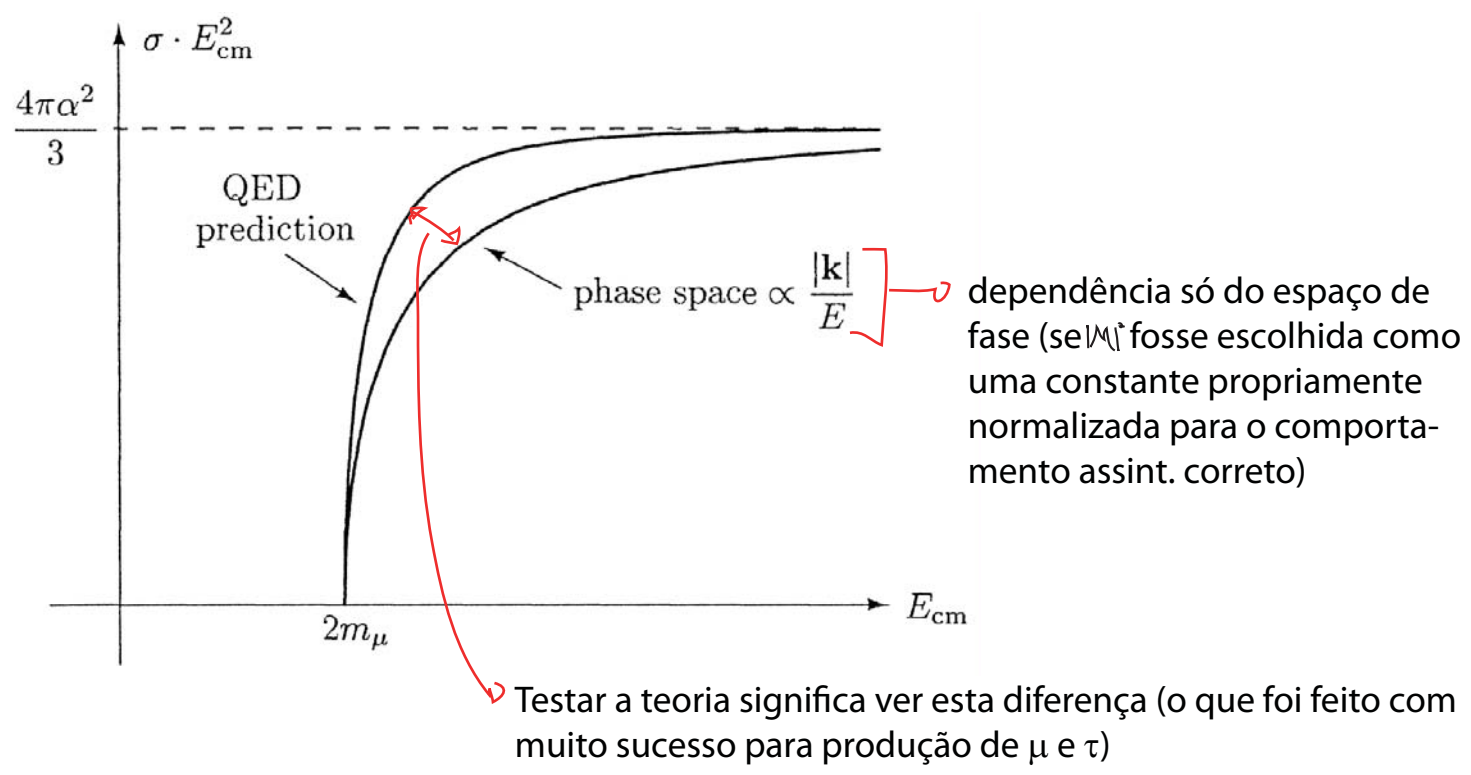
$$\sigma_{TOT} = 2\pi \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \frac{\alpha^2}{4E_{cm}^2} \sqrt{1 - \frac{m_N^2}{E^2}} \left[ 1 + \frac{m_N^2}{E^2} + \left(1 - \frac{m_N^2}{E^2}\right) \cos^2\theta \right] =$$

$$= \frac{\pi \alpha^2}{2E_{cm}^2} \sqrt{1 - \frac{m_N^2}{E^2}} \left[ 1 + \frac{m_N^2}{E^2} + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{m_N^2}{E^2}\right) \right] = \frac{4\pi \alpha^2}{3E_{cm}^2} \sqrt{1 - \frac{m_N^2}{E^2}} \left[ 1 + \frac{m_N^2}{2E^2} \right] \quad (\text{eq. 208.3})$$

$\frac{4}{3} + \frac{2}{3} \frac{m_N^2}{E^2}$

Que, no limite ultra-relativístico fica:

$$\sigma_{TOT} = \frac{4\pi \alpha^2}{3E_{cm}^2} \quad (\text{eq. 208.4})$$



## Seção de Choque polarizada e Crossing Symmetry

(Nastase 25; Peskin 5.2-5.3)

Para obter um entendimento um pouco melhor da dependência angular em 208.2 exploraremos novamente o espalhamento  $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$ , analisando agora as polarizações dos estados. Por simplicidade, tomaremos o limite ultra-relativístico onde:  $m_e, m_\mu \rightarrow 0$

Lembrando das definições dos projetores de quiralidade feitas na pg 111-112 e que, para férmions sem massa, temos teorias separadas para  $\psi_L$  e  $\psi_R$ , notamos que estes são estados de **helicidade** bem definida:

$$h \equiv \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \quad \begin{aligned} R \psi_R &= -\frac{1}{2} \psi_R \\ R \psi_L &= +\frac{1}{2} \psi_L \end{aligned}$$

Para estudar polarizações precisamos definir uma base, e nada mais natural que usar as projeções do spin na direção do movimento da partícula, usando portanto estes autoestados de helicidade.

Notemos que:

$$\overline{\psi_L} = \overline{\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\psi\right)} = \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\psi\right)^\dagger i\gamma_0 = \psi^\dagger \frac{1+\gamma_5}{2} i\gamma_0 = \overline{\psi} \frac{1-\gamma_5}{2} \equiv (\overline{\psi})_R$$

$\psi_L = P_L \psi = \frac{1+\gamma_5}{2} \psi$

$P_L \gamma_\mu = \gamma_\mu P_R$   
 $P_R \gamma_\mu = \gamma_\mu P_L$

$(\overline{\psi})_R (\psi)_L = 0$

Considere os produtos de spinores aparecendo na equação 202.2 (que queremos calcular), por ex: