

## Seção de Choque polarizada e Crossing Symmetry

(Nastase 25; Peskin 5.2-5.3)

Para obter um entendimento um pouco melhor da dependência angular em 208.2 exploraremos novamente o espalhamento  $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$ , analisando agora as polarizações dos estados. Por simplicidade, tomaremos o limite ultra-relativístico onde:  $m_e, m_\mu \rightarrow 0$

Lembrando das definições dos projetores de quiralidade feitas na pg 111-112 e que, para férmions sem massa, temos teorias separadas para  $\psi_L$  e  $\psi_R$ , notamos que estes são estados de **helicidade** bem definida:

$$\lambda \equiv \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \quad \begin{aligned} R \psi_R &= -\frac{1}{2} \psi_R \\ R \psi_L &= +\frac{1}{2} \psi_L \end{aligned}$$

Para estudar polarizações precisamos definir uma base, e nada mais natural que usar as projeções do spin na direção do movimento da partícula, usando portanto estes autoestados de helicidade.

Notemos que:

$$\overline{\psi_L} \equiv \overline{\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\psi\right)} = \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\psi\right)^\dagger i\gamma_0 = \psi^\dagger \frac{1+\gamma_5}{2} i\gamma_0 = \overline{\psi} \frac{1-\gamma_5}{2} \equiv (\overline{\psi})_R$$

$\psi_L = P_L \psi = \frac{1+\gamma_5}{2} \psi$

$P_L \gamma_\mu = \gamma_\mu P_R$   
 $P_R \gamma_\mu = \gamma_\mu P_L$

$(\overline{\psi})_R (\psi)_L = 0$

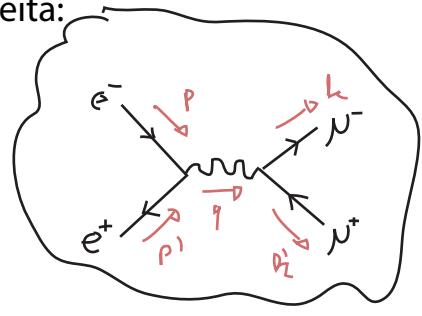
Considere os produtos de spinores aparecendo na equação 202.2 (que queremos calcular), por ex:

$$\overline{u}^{s'}(p') \gamma^\mu u^s(p)$$

queremos calcular este produto usando a base de helicidade:  $s, s' \rightarrow u_R, (\overline{v})_L = \overline{v}_R$

Suponha que o elétron inicial estivesse com helicidade de mão direita:

$$u^s(p) = u_R(p) = P_R u(p) = P_R u^s(p)$$



Neste caso podemos introduzir  $P_R$  neste produto:

$$\overline{u}^{s'}(p') \gamma^\mu P_R u^s(p) = \overline{u}^{s'}(p') P_L \gamma^\mu P_R u^s(p)$$

(ver Peskin pg 61)

De onde vemos que a helicidade do pósitron também está determinada (mão esquerda), de fato,

$$P_R u_L = (\overline{v})_R P_L = 0$$

Podemos escrever uma soma sobre spins e, se deixarmos o  $P_R$  ali, estaremos somando apenas termos nulos, com exceção do termo que queremos:

$$\overline{u}^{s'}(p') \gamma^\mu u^s(p) = \sum_{s, s'} \overline{u}^{s'}(p') \gamma^\mu P_R u^s(p)$$

Em  $|M|^2$ :

note que não é uma média, o spin inicial está fixo, somamos um monte de zeros para aparecer com a soma pois ela é conveniente

$$\sum_{s, s'} \overline{u}^{s'}(p') \gamma^\mu P_R u^s(p) \overline{v}^{r'}(k') \gamma^\nu P_R v^r(k) =$$

usando as somas de spin:  $\sum_s u_i^s(p) \overline{u}_j^s(p) = (-i\not{p} + m)_{ij} \simeq -i\not{p}_{ij}$   
 $\sum_s v_i^s(p) \overline{v}_j^s(p) = (-i\not{p} - m)_{ij} \simeq -i\not{p}_{ij}$

$$= -\text{Tr} [ \not{p}' \gamma^\mu P_R \not{p} \gamma^\nu P_R ] = -\text{Tr} [ \not{p}' \gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu P_R ] =$$

igual ao obtido no caso não polarizado (eq 203.1)

Calculando o traço obtemos:

$$= -2 ( p'^\mu p^\nu + p'^\nu p^\mu - g^{\mu\nu} p \cdot p' - i \epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda} p'_\sigma p_\lambda ) \quad (\text{eq. 210.1})$$

Podemos fazer o mesmo para o outro traço (para os muons finais):

$$\sum_{r, r'} | \overline{u}^r(k) \gamma_\mu P_R v^{r'}(k') |^2 = -2 ( k'_\mu k_\nu + k'_\nu k_\mu - g_{\mu\nu} k \cdot k' - i \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k'^\alpha k^\beta ) \quad (\text{eq. 210.2})$$

Logo:

$$|M|^2 = \frac{e^4}{q^4} \sum_{RR'} |...|^2 \sum_{SS'} |...|^2 = \frac{16e^4}{q^4} (p \cdot k')(p' \cdot k)$$

$\epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda} \epsilon_{\alpha\mu\rho\gamma} = -2 (\delta_{\alpha}^{\rho} \delta_{\sigma}^{\lambda} - \delta_{\beta}^{\rho} \delta_{\alpha}^{\sigma})$

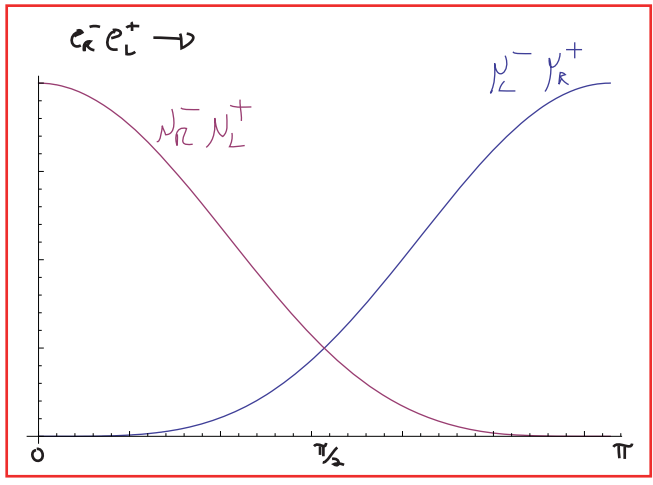
novamente (ver pg 207) especializamos para o centro de massa:  $\begin{cases} q^2 = -4E^2 \\ p' \cdot k = p \cdot k = -E(E + k \cos \theta) \\ E = k \end{cases}$

$$|M(e_R^- e_L^+ \rightarrow \nu_R^- \nu_L^+)|^2 = e^4 (1 + \cos \theta)^2$$

$$\therefore \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} (e_R^- e_L^+ \rightarrow \nu_R^- \nu_L^+) \right)_{cm, n \rightarrow 0} = \frac{|M|^2}{64\pi^2 E_{cm}^2} = \frac{\alpha^2}{4 E_{cm}^2} (1 + \cos \theta)^2$$

Poderíamos fazer a mesma conta para outras polarizações, no caso  $e_R^- e_L^+ \rightarrow \nu_L^- \nu_R^+$  o que muda é  $p_R \rightarrow p_L$  em 210.2, o que resulta em um sinal na frente do  $\epsilon$  e obtemos (exercício):

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} (e_R^- e_L^+ \rightarrow \nu_L^- \nu_R^+) \right)_{cm, n \rightarrow 0} = \frac{\alpha^2}{4 E_{cm}^2} (1 - \cos \theta)^2$$



Da mesma forma:

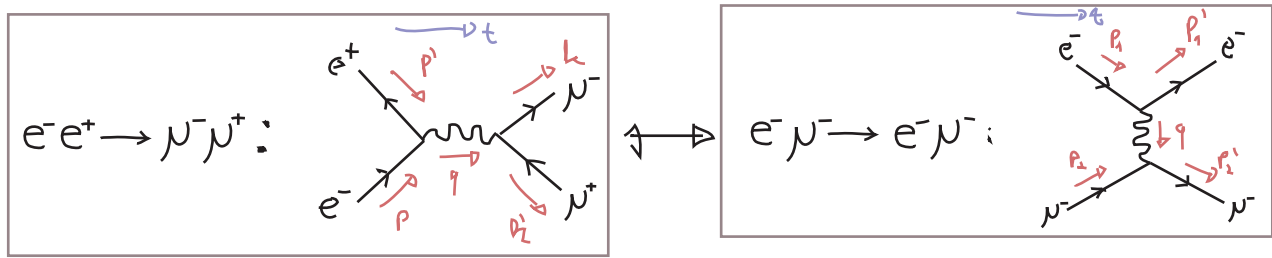
$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} (e_L^- e_R^+ \rightarrow \nu_L^- \nu_R^+) \right)_{cm, n \rightarrow 0} = \frac{\alpha^2}{4 E_{cm}^2} (1 + \cos \theta)^2$$

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} (e_L^- e_R^+ \rightarrow \nu_R^- \nu_L^+) \right)_{cm, n \rightarrow 0} = \frac{\alpha^2}{4 E_{cm}^2} (1 - \cos \theta)^2$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} (e_L^- e_L^+ \rightarrow \nu_R^- \nu_R^+) = 0 \quad (\text{assim como todas as outras combinações que restam})$$

### Crossing symmetry

Dada a natureza das regras de Feynman, é de se esperar que expressões de diagramas bem semelhantes (ainda que representando processos físicos bem diferentes) tenham expressões semelhantes. Considere, por exemplo, os dois diagramas abaixo:



O diagrama da direita, apesar de representar um fenômeno diferente (é um espalhamento elétron-muon, ao passo que o da esquerda é uma aniquilação elétron-pósitron produzindo muon-antimuon), é essencialmente o mesmo que o da esquerda, a menos dos nomes dados aos momentos (basta olhar o da esquerda com o tempo passando de baixo para cima). De fato, as regras de Feynman nos fornecem:

$$i\mathcal{M}(e^-\mu^+ \rightarrow e^-\mu^+) = \bar{u}(p_1') (e\gamma^\mu) u(p_1) \frac{-i\cancel{q}^\nu}{q^2} \bar{u}(p_2') (e\gamma^\nu) u(p_2)$$

$$= -ie^2 \bar{u}(p_1') \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p_2') \gamma_\nu u(p_2)$$

$$\therefore \frac{1}{4} \sum_{\text{SPIN}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4q^4} \text{Tr} [(-i\not{p}_1 + m_e) \gamma^\mu (-i\not{p}_1' + m_e) \gamma^\nu] \text{Tr} [(-i\not{p}_2' + m_\mu) \gamma_\nu (-i\not{p}_2 + m_\mu) \gamma_\mu]$$

(eq. 212.1)

$$q = p_2' - p_2 = p_1 - p_1'$$

Compare esta equação com a eq. 203.1:

(eq. 203.1)  $\Rightarrow \frac{1}{4} \sum_{\text{SPIN}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4q^4} \text{Tr} [\gamma_\mu (-i\not{k}' - m_e) \gamma_\nu (-i\not{k} + m_\mu)] \text{Tr} [\gamma^\nu (-i\not{p} + m_e) \gamma^\mu (-i\not{p}' - m_e)]$

$(+i\not{p}' - m_e) = (-i\not{p} + m_e) \sum u \bar{u}(p_2) \Theta(-i\not{p}' + m_e)$

se cancelam

o que mudou é apenas o nome dos momentos:

$$p \rightarrow p_1 \quad p' \rightarrow -p_1' \quad k \rightarrow p_2' \quad k' \rightarrow -p_2 \quad q = p' + p \rightarrow p_1 - p_1'$$

A seção de choque obtida para este diagrama é (ver Nastase, pgs 227 e 228), no limite ultra-relativístico:

$$E \gg m_\mu \left. \begin{matrix} \\ m_\mu, m_e \rightarrow 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} (e^-\mu^+ \rightarrow e^-\mu^+) \right)_{\text{cm}} = \frac{s^2}{2E_{\text{cm}}^2 (1 - \cos\theta)^2} [4 + (1 + \cos\theta)^2] \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} \sim \frac{1}{\theta^4}$$

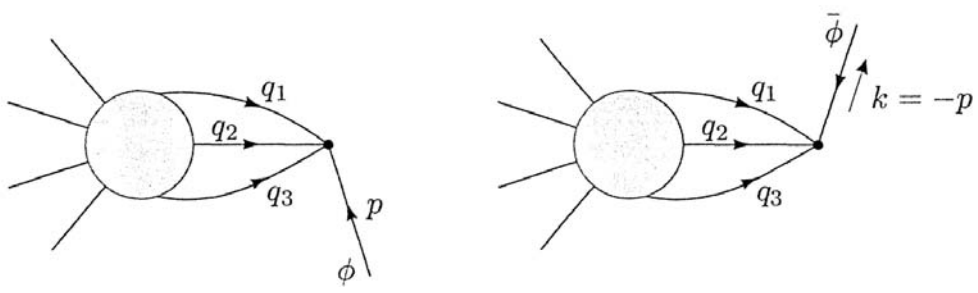
(eq. 212.2)

Note a divergência para ângulos pequenos, este tipo de divergência que aparece no espalhamento de partículas sem massa (neste limite tanto o fóton quanto os férmions são sem massa) é chamada de **divergência IR** (infra-red, pois para pequenos ângulos o momento q trocado é pequeno) e será tratada no curso de TQCII.

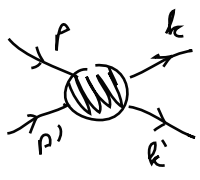
A simetria acima, entre diagramas que podem ser levados um no outro "cruzando" linhas do passado para o futuro é chamada de **Crossing Symmetry** e pode ser generalizada:

$$\mathcal{M}(\phi(p) + \dots \rightarrow \dots) = \mathcal{M}(\dots \rightarrow \bar{\phi}(k) + \dots) \quad k = -p$$

(eq. 212.3)



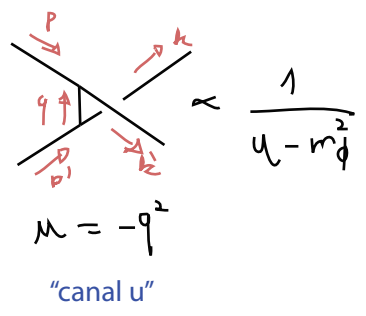
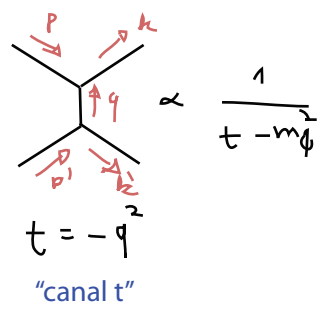
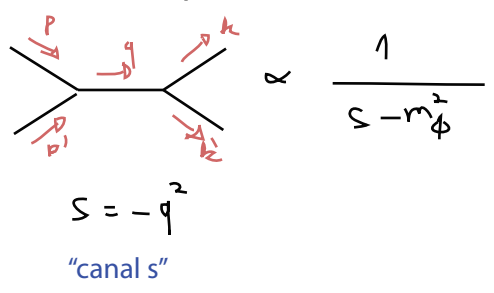
É mais fácil definir bem esta simetria em termos das Variáveis de Mandelstam, que definiremos agora. Dado um processo  $2 \rightarrow 2$



$$\begin{aligned}
 s &\equiv -(p+p')^2 = -(k+k')^2 = E_{cm}^2 \\
 t &\equiv -(k-p)^2 = -(p'-k')^2 \\
 u &\equiv -(k'-p)^2 = -(p'-k)^2
 \end{aligned}$$

Variáveis de Mandelstam (eq. 213.1)

Note que:



$$s + t + u = -p^2 - p'^2 - k^2 - k'^2 = \sum_{i=1}^4 m_i^2 \quad (\text{eq. 213.2})$$

Os três canais terão distribuições angulares diferentes, para ver isso, considere o caso em que todas as massas são iguais:

$$\begin{aligned}
 s &= E_{cm}^2 \quad (\text{independe do ângulo}) \\
 t &\propto (1 - \cos \theta) \quad t \rightarrow 0 / \theta \rightarrow 0 \\
 u &\propto (1 + \cos \theta) \quad u \rightarrow 0 / \theta \rightarrow \pi
 \end{aligned}$$

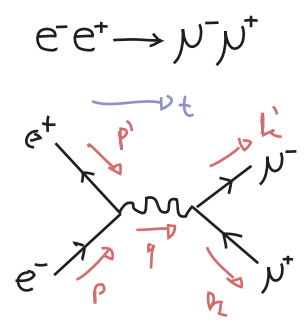
Em termos destas variáveis, podemos re-escrever 206.2 (para o processo  $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$ ):

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}(e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+)|^2 = \frac{8e^4}{s^2} \left[ \left(\frac{t}{s}\right)^2 + \left(\frac{u}{s}\right)^2 \right]$$

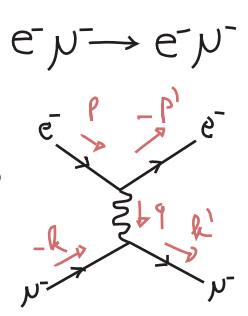
$$\begin{aligned}
 s &= -q^2 \\
 t &= -(k-p)^2 = 2p \cdot k = 2p' \cdot k' \\
 u &= -(p-k')^2 = 2p \cdot k' = 2p' \cdot k
 \end{aligned}$$

$\downarrow$   
 $m_e \sim 0$   
 $m_\mu \sim 0$

Agora façamos:



$$\begin{aligned} \bar{s} &= -(p+p')^2 \\ \bar{t} &= -(k-p)^2 \\ \bar{u} &= -(p-k')^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} s &= -(p-k)^2 = \bar{t} \\ t &= -(-p'-p)^2 = \bar{s} \\ u &= -(-p'+k')^2 = \bar{u} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

Logo podemos fazer o crossing direto nas variáveis de Mandelstam e obter:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}(e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+)|^2 \xrightarrow[\mu \rightarrow u]{\substack{s \rightarrow t \\ t \rightarrow s}} \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}(e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-)|^2 = \frac{8e^4}{t^2} \left[ \left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{u}{2}\right)^2 \right]$$