

Teória Quântica de Campos

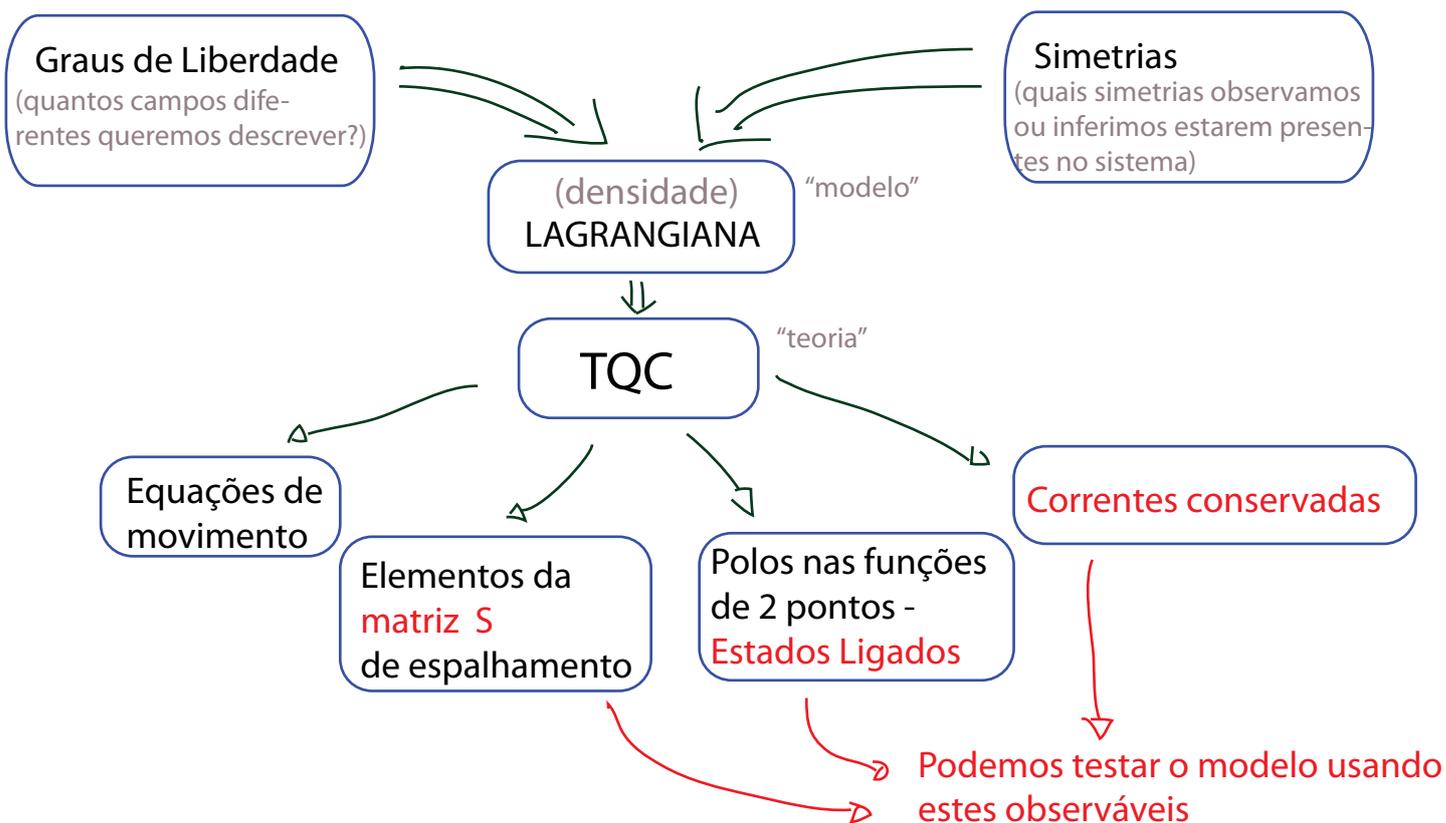
(a idéia geral até agora)

Do que se trata: uma teoria Quântica e Relativística (no sentido da relatividade restrita)

Objeto dinâmico básico da teoria: **CAMPO!**

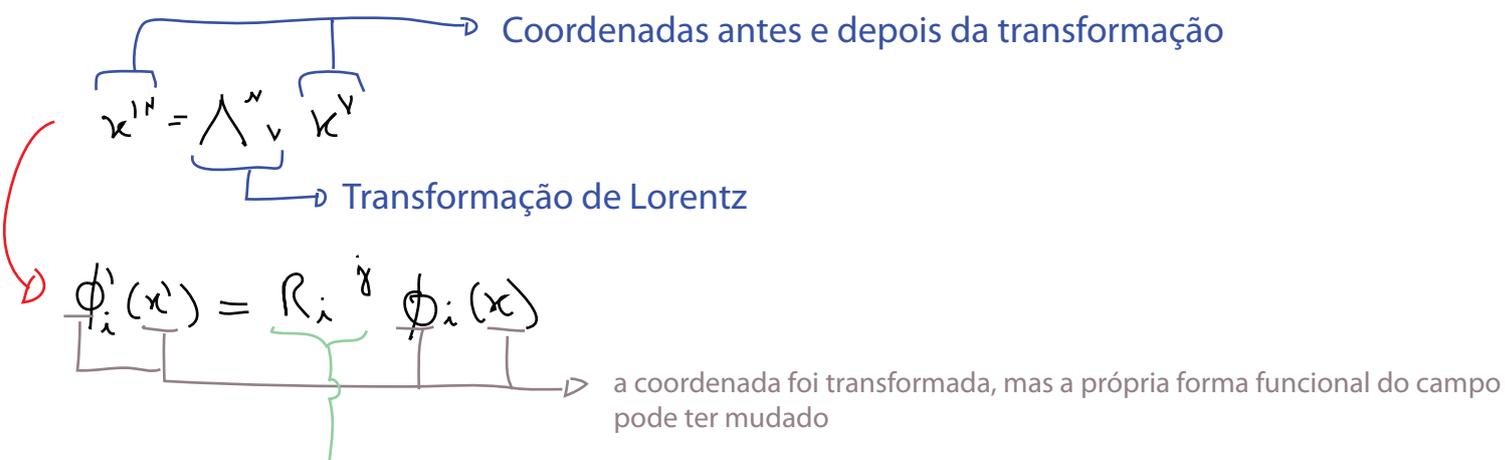
↳ Estes campos são Quantizados: excitações do campo em torno do **vácuo** são **PARTÍCULAS**

Contruindo um Modelo:



Sobre os graus de liberdade e simetrias

A primeira simetria que exigimos é a própria invariância por translações e rotações no espaço tempo, que juntas formam o **grupo de Poincaré**. Cada campo da teoria é colocado em uma representação deste grupo e isto fixa as propriedades da partículas associada, em particular o **SPIN** e, por consequência, sua estatística:



note que, em geral, a transformação pode misturar campos com índices diferentes (ϕ_1 e ϕ_2) - neste caso é claramente mais natural pensar nestes "campos" como componentes de um campo mais complicado que se misturam sob transformações de Lorentz.

$$A_\mu = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

Escalares

$$R = \hat{1}$$

$$\phi'(x') = \phi(x)$$

⇒ Bosons de spin 0

Vetores

$$R = \Lambda \quad \mu = 0, 1, 2, 3$$

$$A'_\mu(x') = \Lambda_\mu^\nu A_\nu(x)$$

⇒ Bosons de spin 1

Spinores

$$R = M_D \quad \alpha = 1, 2, 3, 4$$

$$\Psi'_\alpha(x') = M_{D\alpha\beta}(\Lambda) \Psi_\beta(x)$$

⇒ Férmions de spin 1/2

$$M_D \equiv e^{-\frac{1}{2} \Theta_{\mu\nu} S^{\mu\nu}}$$

$$S^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

Matrizes de Dirac

Mas não é só isso, outras simetrias podem estar presentes no sistema, sejam elas **globais** ou **locais** (ou **de Gauge**), **contínuas** ou **discretas**, e temos que decidir em que representações estão os campos. Em particular, simetrias de Gauge acabam levando à interações entre campos diferentes. Alguns exemplos:

(1) Na escala típica das interações nucleares, a força eletromagnética é desprezível e o próton e o nêutron são praticamente idênticos, podemos definir o **NUCLEON**:

$$\Psi_N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$$

que é um campo na **representação fundamental** de um **SU(2) LOCAL**, chamado de **ISOSPIN** (além de ser também um férmion, na representação spinorial do grupo de Lorentz).

(2) O mesmo pode ser feito com os três pions (π^0 , π^+ e π^-):

$$\pi = \begin{pmatrix} \tilde{\pi}^+ \\ \pi^0 \\ \tilde{\pi}^- \end{pmatrix}$$

que é um campo na **representação adjunta** deste mesmo **SU(2) LOCAL** mas é um escalar de Lorentz com sinal negativo sobre uma transformação discreta, a transformação de paridade.

A Lagrangiana mais geral que envolve estes dois campos dá conta da **FORÇA NUCLEAR FORTE**.

(3) O **elétron** tem spin 1/2, portanto queremos um campo na representação spinorial de Lorentz, e uma carga conservada, o que implica em pelo menos uma simetria global U(1), sobre a qual ele se transforma na rep. fundamental. Se tornamos esta **simetria U(1) local**, é necessário também introduzir um campo vetorial sem massa (chamado de Boson de Gauge), na rep. adjunta, o **foton**:

$$\Psi_e \Rightarrow \left(\begin{array}{l} \text{Spinor} \\ U(1): \Psi_e \rightarrow e^{ie\alpha(x)} \Psi_e \end{array} \right) \quad A_\nu \Rightarrow \left(\begin{array}{l} \text{Vetor} \\ A'_\nu(x) = A_\nu + \partial_\nu \alpha(x) \end{array} \right)$$

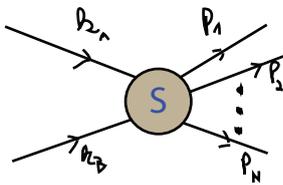
Com estes dois campos e a simetria U(1) conseguimos construir a QED (e dela, obter as equações de Maxwell):

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\Psi}_e (i\not{D} - m) \Psi_e - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \\ &= \bar{\Psi}_e (i\not{\partial} - m) \Psi_e - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - e \bar{\Psi} \not{\gamma}^\mu \Psi A_\mu \end{aligned}$$

(4) Sabemos que os **quarks** tem um número quântico interno que pode assumir três valores diferentes e é chamado de **cor**. Observa-se também que independentemente do estado de cor, eles interagem sempre com o mesmo acoplamento com os **gluons**. O modelo que descreve isto é a **QCD (cromodinâmica quântica)** e nela os quarks estão na rep. fundamental de SU(3) e os gluons são os bósons de Gauge exigidos (e portanto estão na adjunta de SU(3)).

Observáveis (espalhamento)

Um vez que temos a Lagrangiana a TQC nos dá ferramentas para obter elementos da **matriz S**, que conecta estados assintóticos em um espalhamento:



$$\langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots | S | \vec{k}_A, \vec{k}_B \rangle \equiv \langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots | \mathcal{T} | \vec{k}_A, \vec{k}_B \rangle \quad (\text{eq. 3.1})$$

O que nos permite chegar na seção de choque de espalhamento,

$$S \equiv 1 + i T$$

$$\langle p_1 p_2 \dots | i T | k_A, k_B \rangle \equiv (2\pi)^4 \delta^4(k_A + k_B - \sum p_k) i \mathcal{M}(k_A, k_B \rightarrow \{p_k\})$$

$$\sigma = \frac{1}{4 \sqrt{(p_A \cdot p_B)^2 - m_A^2 m_B^2}} \left(\int \prod \frac{d^3 p_k}{(2\pi)^3} \right) |\mathcal{M}(p_A, p_B \rightarrow \{p_k\})|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - \sum p_k) \quad (\text{eq. 3.2})$$

que estabelece a distribuição de probabilidades do espalhamento e pode ser testada em laboratório.

Tipicamente o cálculo destes objetos exige uma **expansão perturbativa**, que pode ser representada em termos de **Diagramas de Feynman** e operacinalizada em termos de **Regras de Feynman**.

O que vem a seguir?

A pergunta que deveria estar incomodando o aluno atento é: esta Lagrangiana mais geral (construída com os graus de liberdade escolhidos e permitida pelas simetrias impostas) tem um número finito de termos? Usando a QED como exemplo, podemos colocar esta pergunta na seguinte forma:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_e \not{D} \psi_e - m\bar{\psi}_e \psi_e - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \underbrace{C_1 \bar{\psi}_e \psi_e \bar{\psi}_e \psi_e + C_2 (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu})^2 + C_3 (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu})^3 + \dots}_{\text{CADÊ!}}$$

A resposta para esta pergunta está intimamente ligada a dois outros problemas que o aluno já pode ter encontrado com grau maior ou menor de profundidade:

- (1) o cálculo de **correções em loop**, que aparecem em ordens superiores da expansão perturbativa e as divergências introduzidas por estas correções, a questão da **renormalizabilidade**;
- (2) as diferenças entre a Lagrangiana da teoria clássica de campos (que é o que obtemos após impor as simetrias) e a Lagrangiana que efetivamente controla a dinâmica do sistema após a introdução de **correções quânticas**. (Se é uma surpresa para você que existe esta diferença, tenha calma, chegaremos lá).

O primeiro e principal objetivo deste curso é esclarecer estes pontos, o que nos dará um entendimento muito mais completo sobre o que é uma Teoria Quântica de Campos, e nos levará a um método sistemático de Renormalização para estas teorias e às **Equações do Grupo de Renormalização**.

Antes, no entanto, daremos uns passos para trás e introduziremos um método de quantização mais moderno e poderoso do que a chamada Quantização Canônica, chamado de **Quantização por Integrais de Trajetória**. Veremos como aplicar este método a campos Escalares, Spinoriais e de Gauge, para em seguida voltar ao problema da Renormalização. Isto pode levar algumas páginas (e semanas), então mantenha o objetivo final em mente!

Quantização por Integrais de Trajetória:

O Oscilador Harmônico

Atente para as referências no começo de cada seção (Ramond cap2, Nastase 2)

Além da imposição de relações de comutação, existe uma outra forma de quantizar um sistema clássico: usando integrais de trajetória. Para entender do que se trata voltemos a um sistema não relativístico que entendemos bem (talvez o único que entendemos bem): o oscilador harmônico.

$$\begin{aligned} \boxed{m=1} \Rightarrow L &= \frac{\dot{q}^2}{2} - \omega^2 \frac{q^2}{2} & \Rightarrow H &= p\dot{q} - \left(\frac{\dot{q}^2}{2} - \omega^2 \frac{q^2}{2} \right) = \\ p &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{q} & &= \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2) \end{aligned}$$

$\hbar = 1$

$$a \equiv \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\omega q + i p)$$

$$a^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\omega q - i p)$$

(eq. 4.1)

$$p = -i \sqrt{\frac{\omega}{2}} (a - a^\dagger)$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (a + a^\dagger)$$

(eq. 5.1)

$$H = \frac{1}{2} \left(-\frac{\omega}{2} (a - a^\dagger)^2 + \frac{\omega}{2} (a + a^\dagger)^2 \right) = \frac{\omega}{2} (a a^\dagger + a^\dagger a)$$

(eq. 5.2)

poderíamos juntar isso pois ainda não quantizamos

Definimos os Brackets de Poisson como:

$$\left. \begin{array}{l} f = f(p, q) \\ g = g(p, q) \end{array} \right\} \rightarrow \{f, g\}_{PB} \equiv \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

(eq. 5.3)

$$\therefore \{p_i, q_j\}_{PB} = \sum_k \left(\underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial q_k}}_0 \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial p_k}}_0 - \underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial p_k}}_{\delta_{ik}} \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial q_k}}_{\delta_{kj}} \right) = -\delta_{ij}$$

$\delta_{ik} \cdot \delta_{kj} = \delta_{ij}$

Podemos escrever as equações de Hamilton na forma:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \{q_i, H\}_{PB} = \sum_k \left(\underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_k}}_{\delta_{ik}} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_k}}_0 \frac{\partial H}{\partial q_k} \right)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \{p_i, H\}_{PB} = \sum_k \left(\underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial q_k}}_0 \frac{\partial H}{\partial p_k} - \underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial p_k}}_{\delta_{ik}} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right)$$

(eq. 5.4)

Quantização Canônica do Oscilador Harmônico

O que chamamos de quantização canônica consiste em transformar q e p em operadores \hat{q} e \hat{p} , substituindo os Brackets de Poisson por comutadores:

$$q, p \rightarrow \hat{q}, \hat{p}$$

$$\{, \}_{PB} \rightarrow -\frac{i}{\hbar} [,]$$

$\hbar = 1$

$$\{p_i, q_j\}_{PB} = -\delta_{ij} \rightarrow -i [p_i, \hat{q}_j] = -\delta_{ij}$$

$$[p_i, \hat{q}_j] = -i \delta_{ij}$$

(eq. 6.1)

$$[p, \hat{q}] = -i$$

(eq. 5.1)

$$[p, \hat{q}] = \left[-i \sqrt{\frac{\omega}{2}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger), \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \right] =$$

$$= -\frac{i}{2} \left\{ [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] - [\hat{a}^\dagger, \hat{a}] \right\} = -i [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = -i$$

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$$

(eq. 6.2)

Podemos usar a mesma substituição nas equações de Hamilton (5.4) para obter a evolução destes operadores no quadro de Heisenberg:

$$\dot{\hat{q}}_i = \{q_i, H\}_{PB} \rightarrow \frac{d\hat{q}_i}{dt} = -i [\hat{q}_i, \hat{H}]$$

$$\dot{\hat{p}}_i = \{p_i, H\}_{PB} \rightarrow \frac{d\hat{p}_i}{dt} = -i [\hat{p}_i, \hat{H}]$$

(eq. 6.3)

E o hamiltoniano pode ser obtido de (5.2)

$$\hat{H} = \frac{\omega}{2} \left(\underbrace{\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}}_{1 + \hat{a}^\dagger\hat{a}} \right) = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2} \right)$$

(eq. 6.4)

se tivéssemos acompanhado os h's corretamente

Os autoestados deste hamiltoniano são definidos em termos de um número de ocupação n e os operadores \hat{a}^\dagger e \hat{a} são operadores de criação e aniquilação:

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = A_n |n+1\rangle \quad ; \quad \hat{a} |n\rangle = A'_n |n-1\rangle$$

(eq. 6.5)

normalizações

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle \equiv \hat{N} |n\rangle = n |n\rangle$$

(eq. 6.6)

Operador Número

No estado fundamental, ou vácuo, definido por $a|\Omega\rangle = 0$

$$\therefore N|\Omega\rangle = 0$$

$$|\Omega\rangle = |n=0\rangle$$

a energia é:

$$\hat{H} = \omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\hat{H}|n=0\rangle = E_0|n=0\rangle$$

$$E_0 = \frac{\omega}{2} \quad \text{Energia de ponto zero ou do vácuo}$$

Podemos definir um hamiltoniano sem esta energia de ponto zero, definindo o **ordenamento normal**:

$$\therefore \hat{H} = a^\dagger a + a a^\dagger + a a + a^\dagger a^\dagger = a^\dagger a + a^\dagger a + a a + a^\dagger a^\dagger$$

Coloca todos os a^\dagger 's a esquerda dos a 's

$$\therefore \hat{H} = \omega a^\dagger a = \omega \hat{N}$$

Integral de Trajetória de Feynman

(Ryder 5.1)

Uma quantidade que frequentemente queremos saber é, dado que uma partícula estava em uma posição q em um tempo t , qual é a probabilidade de a encontrarmos na posição q' no tempo t' . Em uma linguagem mais "quântica" dada a função de onda:

$$\Psi(q, t)$$

Gostaríamos de conhecer o propagador F , definido por:

$$\Psi(q', t') = \int F(q', t'; q, t) \Psi(q, t) dq \quad (\text{eq. 7.1})$$

$|\Psi(q', t')|^2$ é distribuição de probabilidades para q' no tempo t' , independente do que aconteceu antes de t'

A equação 7.1 é uma simples expressão da causalidade, considerando que a partícula pode ter começado em qualquer lugar. Claramente F é a amplitude de probabilidade de transição entre a função em (q, t) e a em (q', t') e:

$$P(q', t'; q, t) = |F(q', t'; q, t)|^2 \quad \text{é a probabilidade de transição}$$

Vejamos como podemos expressar F em termos de grandezas familiares:

$$\Psi(q, t) = \langle q | \Psi, t \rangle$$

Quadro de Schrödinger (estados evoluem no tempo, operadores não)