

No estado fundamental, ou vácuo, definido por $a|\Omega\rangle = 0$

$$\therefore N|\Omega\rangle = 0$$

$$|\Omega\rangle = |n=0\rangle$$

a energia é:

$$\hat{H} = \omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\hat{H}|n=0\rangle = E_0|n=0\rangle$$

$$E_0 = \frac{\omega}{2} \quad \text{Energia de ponto zero ou do vácuo}$$

Podemos definir um hamiltoniano sem esta energia de ponto zero, definindo o **ordenamento normal**:

$$\therefore a^\dagger a + a a^\dagger + a a + a^\dagger a^\dagger \therefore = a^\dagger a + a^\dagger a + a a + a^\dagger a^\dagger$$

Coloca todos os a^\dagger 's a esquerda dos a 's

$$\therefore \hat{H} \therefore = \omega a^\dagger a = \omega \hat{N}$$

Integral de Trajetória de Feynman

(Ryder 5.1)

Uma quantidade que frequentemente queremos saber é, dado que uma partícula estava em uma posição q em um tempo t , qual é a probabilidade de a encontrarmos na posição q' no tempo t' . Em uma linguagem mais "quântica" dada a função de onda:

$$\Psi(q, t)$$

Gostaríamos de conhecer o propagador F , definido por:

$$\Psi(q', t') = \int F(q', t'; q, t) \Psi(q, t) dq \quad (\text{eq. 7.1})$$

$|\Psi(q', t')|^2$ é distribuição de probabilidades para q' no tempo t' , independente do que aconteceu antes de t'

A equação 7.1 é uma simples expressão da causalidade, considerando que a partícula pode ter começado em qualquer lugar. Claramente F é a amplitude de probabilidade de transição entre a função em (q, t) e a em (q', t') e:

$$P(q', t'; q, t) = |F(q', t'; q, t)|^2 \quad \text{é a probabilidade de transição}$$

Vejamos como podemos expressar F em termos de grandezas familiares:

$$\Psi(q, t) = \langle q | \Psi, t \rangle$$

Quadro de Schrödinger (estados evoluem no tempo, operadores não)

$$|\Psi, t\rangle_S = e^{-i\hat{H}t} |\Psi\rangle_H$$

Quadro de Heisenberg
(operadores evoluem no tempo, estados não)

$\hat{q}_S |q\rangle_S = q |q\rangle_S$ $\hat{q}_H(t) = e^{i\hat{H}t} \hat{q}_S e^{-i\hat{H}t}$
 $\hat{q}_H(t) |q, t\rangle_H = e^{i\hat{H}t} \hat{q}_S e^{-i\hat{H}t} e^{i\hat{H}t} |q\rangle_S = e^{i\hat{H}t} q |q\rangle_S = q |q, t\rangle_H$
 $\therefore |q, t\rangle_H$ autoestado de $\hat{q}_H(t)$ no tempo t

Definamos o vetor:

$$|q, t\rangle_H = e^{i\hat{H}t} |q\rangle_S \quad (\text{Moving Frame})$$

$$\therefore \Psi(q, t) = \langle q | e^{-i\hat{H}t} |\Psi\rangle_H = \langle q, t | \Psi\rangle_H$$

$$\hat{1} = \int |q, t\rangle \langle q, t| dq$$

Dado: $\langle q', t' | \Psi\rangle_H = \int \langle q', t' | q, t\rangle \langle q, t | \Psi\rangle_H dq$

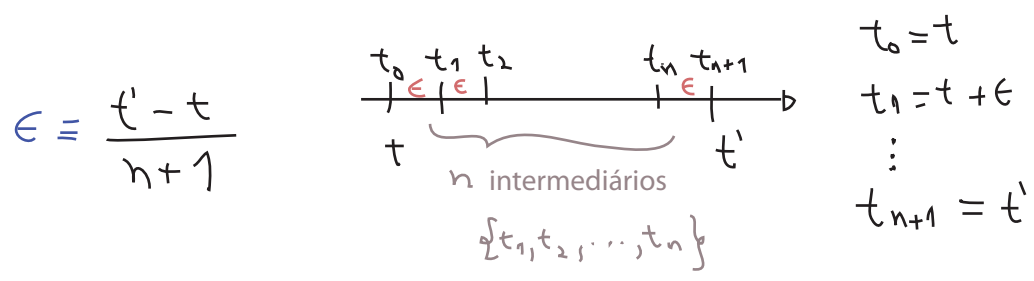
$\underbrace{\langle q', t' |}_{\Psi(q', t')}$ $\underbrace{\langle q, t | \Psi\rangle_H}_{\Psi(q, t)}$

$$\Psi(q', t') = \int \langle q', t' | q, t\rangle \Psi(q, t) dq$$

Que, comparada com 7.1, nos dá: $F(q', t', q, t) = \langle q', t' | q, t\rangle = \langle q' | e^{-iH(t'-t)} | q\rangle$

Vejamos agora como expressar esta grandeza em termos da integral de trajetória:

Primeiramente, dividimos o tempo em $(n+1)$ pequenos intervalos ϵ :



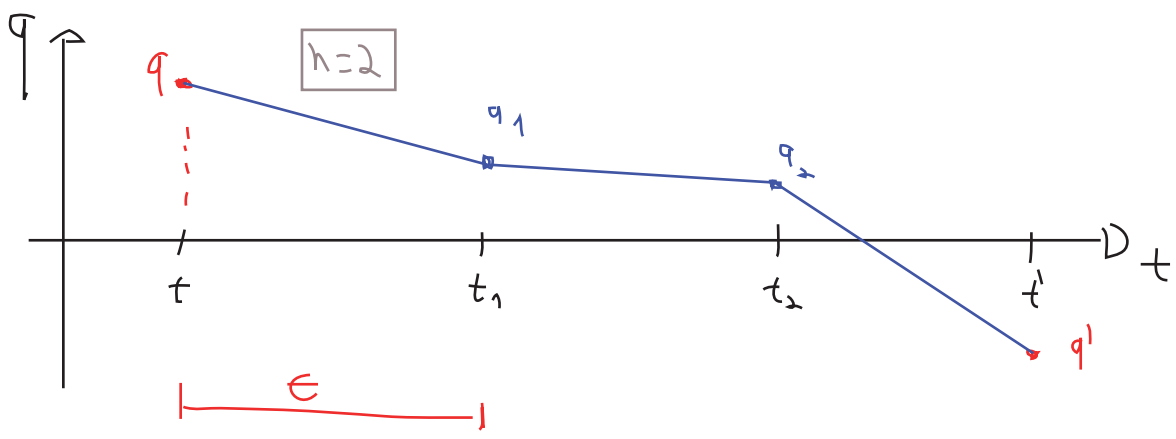
Notando que o tempo é só um índice e para qualquer tempo fixo temos a relação de completeza:

$$\forall t_i \Rightarrow \int dq_i |q_i, t_i\rangle \langle q_i, t_i| = 1 \quad q_i \equiv q(t_i) \quad (\text{estamos sempre pensando no limite do contínuo})$$

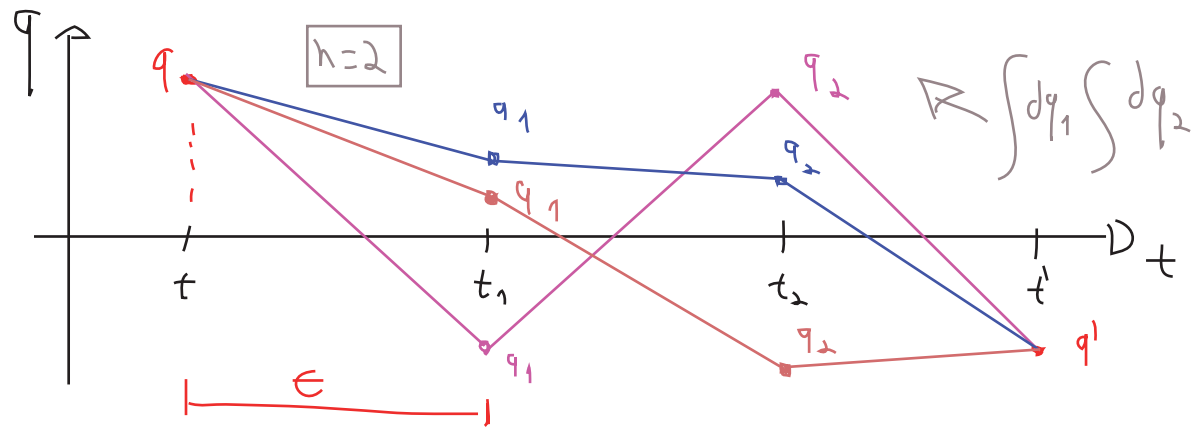
$$F(q', t', q, t) = \int dq_1 \dots dq_n \langle q', t' | q_n, t_n\rangle \langle q_n, t_n | q_{n-1}, t_{n-1}\rangle \dots \langle q_2, t_2 | q_1, t_1\rangle \langle q_1, t_1 | q, t\rangle$$

n identidades

Se esquecermos as integrais por um instante, percebemos que os elementos de matriz estão descrevendo um caminho:



Este caminho, no entanto, é bastante diferente do caminho clássico. Mesmo que façamos $\epsilon \rightarrow 0$, a diferença $q_{i+1} - q_i$ não é forçada a zero e acabamos com um caminho arbitrariamente descontínuo. De fato a expressão 8.1 indica que estamos levando em conta uma infinidade destas trajetórias:



A esta operação daremos o nome de "integral sobre todas as trajetórias" ou "integral de trajetória", e definimos o símbolo:

$$\mathcal{D}q(t) \equiv \prod_{i=1}^n dq(t_i) \quad (\text{eq. 9.1})$$

$$\int \mathcal{D}q(t) \equiv \prod_{i=1}^n \int dq(t_i) \quad (\text{eq. 9.2})$$

Podemos também obter uma expressão no espaço dos momentos:

$$\langle q | p \rangle = e^{ipq}$$

$$|q\rangle = \int \frac{dp}{2\pi\hbar} |p\rangle \langle p | q \rangle$$

$$|p\rangle = \int dq |q\rangle \langle q | p \rangle$$

Handwritten derivation of the delta function identity:

$$= \int dq \int \frac{dp'}{2\pi\hbar} |p\rangle \langle p' | q \rangle \langle q | p \rangle = \int \frac{dp'}{2\pi\hbar} |p'\rangle \langle p' | p \rangle = \int \frac{dp'}{2\pi\hbar} \delta(p-p') = |p\rangle$$

Additional notes in the diagram:

- $\int dq e^{iq(p-p')} = 2\pi\hbar \delta(p-p')$
- $e^{-ip'q}$ and e^{ipq} are shown above the integral.

$$\langle q_n, t_n | q_{n-1}, t_{n-1} \rangle = \langle q(t_n) | e^{-i \epsilon \hat{H}} | q(t_{n-1}) \rangle = \int \frac{dp(t_n)}{2\pi} \langle q(t_n) | p(t_n) \rangle \langle p(t_n) | e^{-i \epsilon \hat{H}} | q(t_{n-1}) \rangle$$

É preciso ter cuidado com Hamiltonianas que tenham produtos entre os operadores \hat{p} e \hat{q} , neste caso é preciso "Weyl-ordenar" o Hamiltoniano antes de prosseguir - isto significa usar as relações de comutação até que tenhamos todos os operadores \hat{p} à esquerda dos operadores \hat{q} (ver Peskin pg 281). Assumindo que isto já foi feito e lembrando que, para ϵ pequeno, não precisamos nos preocupar com termos quadráticos em \hat{H} , vale:

$$\begin{aligned} \langle p(t_n) | e^{-i \epsilon \hat{H}(\hat{p}, \hat{q})} | q(t_{n-1}) \rangle &= \langle p(t_n) | 1 - i \epsilon \hat{H}(\hat{p}, \hat{q}) | q(t_{n-1}) \rangle = \\ &= \langle p(t_n) | 1 - i \epsilon H(p(t_n), q(t_{n-1})) | q(t_{n-1}) \rangle = e^{-i \epsilon H[p(t_n), q(t_{n-1})]} \langle p(t_n) | q(t_{n-1}) \rangle = \\ &= e^{-i \epsilon H[p(t_n), q(t_{n-1})]} e^{-i p(t_n) q(t_{n-1})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \langle q_n, t_n | q_{n-1}, t_{n-1} \rangle &= \int \frac{dp(t_n)}{2\pi} e^{i q(t_n) p(t_n)} e^{-i \epsilon H[p(t_n), q(t_{n-1})]} e^{-i p(t_n) q(t_{n-1})} = \\ &= \int \frac{dp(t_n)}{2\pi} e^{i p(t_n) [q(t_n) - q(t_{n-1})]} e^{-i \epsilon H[p(t_n), q(t_{n-1})]} \end{aligned}$$

Com isso, a eq. 8.1 fica:

$$\begin{aligned} F(q', t', q, t) &= \int \left(\prod_i^n dq_n \right) \underbrace{\langle q_{n+1}, t_{n+1} | q_n, t_n \rangle}_{P_{n+1}} \dots \underbrace{\langle q_1, t_1 | q_0, t_0 \rangle}_{P_1} = \\ &= \int \left(\prod_i^n dq(t_i) \right) \left(\prod_j^{n+1} \frac{dp(t_j)}{2\pi} \right) e^{i \left\{ \underbrace{p(t_{n+1}) [q(t_{n+1}) - q(t_n)]}_{\epsilon} + \dots + \underbrace{p(t_1) [q(t_1) - q(t_0)]}_{\epsilon} \right\}} \times \\ &\quad \times e^{-i \epsilon \left\{ H[p(t_{n+1}), q(t_n)] + \dots + H[p(t_1), q(t_0)] \right\}} = \end{aligned}$$

$$\begin{cases} t_0 = t \\ t_{n+1} = t' \\ q_0 = q(t) \\ q_{n+1} = q(t') \end{cases}$$

$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (n \rightarrow \infty)$

$$= \int \mathcal{D}q(t) \mathcal{D}p(t) \text{EXP} \left\{ i \int_{t_0}^{t_{n+1}} dt \left[p(t) \dot{q}(t) - H[p(t), q(t)] \right] \right\} \quad (\text{eq. 10.1})$$

A equação 10.1 é bastante geral, mas é possível encontrar uma expressão mais simples (e mais útil) no caso de hamiltonianas que tenham a forma:

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2} + V(q) \quad (m=1) \quad (\text{eq. 11.1})$$

Neste caso temos: $F(q^1 t^1, q t) = \int \mathcal{D}q(t) \mathcal{D}p(t) \text{EXP} \left\{ i \int_t^{t'} dt \left[p(t) \dot{q}(t) - \frac{p(t)^2}{2} - V[q(t)] \right] \right\}$ (eq. 11.2)

E podemos fazer a integral em $p(t)$ como um Gaussiana generalizada, para ver o que isso quer dizer façamos um interlúdio de matemática.

— // Gaussianas // —

A gaussiana que conhecemos é:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Elevando isto ao quadrado podemos obter:

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy e^{-\alpha(x^2+y^2)} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} r dr e^{-\alpha r^2} = \frac{\pi}{\alpha}$$

Com n integrais multiplicadas (e trocando α por $\alpha_n/2$):

$$\int dx_1 \dots dx_n \text{EXP} \left[-\frac{1}{2} \sum_i \alpha_i x_i^2 \right] = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha_1}} \dots \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha_n}} = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\prod \alpha_i^{1/2}}$$

podemos organizar os α 's em uma matriz, suponha:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \alpha_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Então o produto escalar:

$$(\vec{x}, A\vec{x}) = x_i A_{ij} x_j = \sum_i \alpha_i x_i^2$$

$$\& \text{DET } A = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n = \prod \alpha_i$$

Logo, podemos re-escrever a integral:

$$\int d^n x e^{-\frac{1}{2} x_i A_{ij} x_j} = (2\pi)^{n/2} (\text{DET } A)^{-1/2} \quad (\text{eq. 11.3})$$

que de fato vale para qualquer matriz (real) A que seja diagonalizável.

Podemos ainda considerar os casos em que o "quadrado não está completo":

$$S = \frac{1}{2} \vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} + \vec{b}^T \cdot \vec{x}$$

Pensemos nele como uma ação (o que de fato será, quando voltarmos à física). A solução clássica dada pelo princípio da extrema ação seria (mesmo sem pensar nisso como ação, estamos buscando o mínimo de S):

$$\frac{\delta S}{\delta x_i} = 0 \quad \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{2} x_i A_{ij} x_j + b_i x_i \right) = \frac{1}{2} \delta_{ik} A_{ij} x_j + \frac{1}{2} x_i A_{ij} \delta_{jk} + b_k = 0$$

$$\frac{1}{2} A_{kj} x_j + \frac{1}{2} A_{ij} x_i = -b_k$$

$$A_{ij} = A_{ji} \Rightarrow \vec{x}_c = -A^{-1} \vec{b}$$

← CLÁSSICO

$$S(\vec{x}_c) = \frac{1}{2} (-A^{-1} \vec{b})^T \cdot A \cdot (-A^{-1} \vec{b}) + \vec{b}^T (-A^{-1} \vec{b}) = -\frac{1}{2} \vec{b}^T A^{-1} \vec{b}$$

Podemos então escrever:

$$S = \frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{x}_c)^T \cdot A (\vec{x} - \vec{x}_c) - \frac{1}{2} \vec{b}^T A^{-1} \vec{b}$$

equação da parábola com mínimo em \vec{x}_c

$$\int d^n x e^{-\left(\frac{1}{2} \vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} + \vec{b}^T \cdot \vec{x}\right)} = e^{-S(\vec{x}_c)} \int d^n x e^{-\frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{x}_c)^T \cdot A \cdot (\vec{x} - \vec{x}_c)} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} (\det A)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} \vec{b}^T A^{-1} \vec{b}}$$

(eq. 12.1)

Voltando a física, podemos fazer a integral destacada abaixo:

$$F(q' t', q t) = \int \mathcal{D}q(t) \exp \left\{ -i \int_t^{t'} dt V[q(t)] \right\} \underbrace{\int \mathcal{D}p(t) \exp \left\{ i \int_t^{t'} dt \left[p(t) \dot{q}(t) - \frac{p(t)^2}{2} \right] \right\}}_{\prod_i \frac{\hbar}{2\pi} \exp \left\{ i \in \left[p(t_i) \dot{q}(t_i) - \frac{1}{2} p(t_i)^2 \right] \right\}}$$

com: $x_i = p(t_i)$ $b = -i \in \dot{q}(t_i)$ $(A^{-1})_{ij} = -\frac{i}{\epsilon} \delta_{ij}$
 $A_{ij} = i \in \delta_{ij}$

podemos usar 12.1 diretamente, obtendo:

$$\int \mathcal{D}p(t) \text{EXP} \left\{ i \int_t^{t'} dt \left[p(t) \dot{q}(t) - \frac{p(t)^2}{2} \right] \right\} = \frac{1}{(2\pi)^n} (i\epsilon)^{-n/2} \text{EXP} \left[\frac{1}{2} (+i\epsilon \dot{q}(t_i)) \left(\frac{t'}{\epsilon} \delta_{ij} \right) (+i\epsilon \dot{q}(t_j)) \right]$$

$$= \underbrace{\frac{(i\epsilon)^{-n/2}}{(2\pi)^{n/2}}}_{\mathcal{N}} \text{EXP} \left[i \int_t^{t'} dt \frac{\dot{q}(t)^2}{2} \right] \quad (\text{eq. 13.1})$$

Com isso, nossa amplitude de transição fica em uma forma bastante reveladora:

$$F(q' t', q t) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q(t) \text{EXP} \left\{ i \int_t^{t'} dt \left[\frac{\dot{q}(t)^2}{2} - V[q(t)] \right] \right\} = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q(t) \text{EXP} \left\{ i \int_t^{t'} dt L(q, \dot{q}) \right\}$$

$$F(q' t', q t) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q(t) e^{iS[q]} \quad (\text{eq. 13.2})$$

Paremos aqui um momento para notar duas coisas:

(1) As equações 10.1 e 13.2 nos dão formas bastante curiosas de calcular um objeto essencialmente quântico: a amplitude de probabilidade de transição. Curiosas porque, no lado direito da equação temos as funções Lagrangeana e Hamiltoniana clássicas do sistema (notem que trocamos os operadores \hat{q} e \hat{p} por seus valores esperados no meio da dedução). O comportamento quântico vem do facto de estarmos integrando sobre todas as trajetórias possíveis para $q(t)$ e $p(t)$ (a exponencial complexa também desempenha um papel)

(2) Na equação 13.2 fica claro que a soma sobre trajetórias é ponderada pela exponencial da ação, e diferentes trajetórias vão ter interferências construtivas ou destrutivas dependendo de diferença entre suas ações.

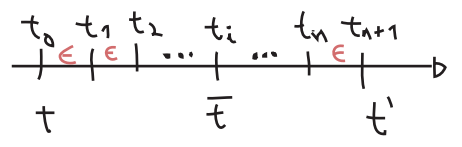
Temos então uma forma alternativa de quantizar um sistema, especialmente útil quando estamos falando de amplitudes de transição. Ao invés de definir operadores e relações de comutação, usamos as integrais de trajetória. Note que os dois métodos são **completamente equivalentes**, acima usamos a evolução temporal que se obtém como solução da equação de Schrödinger para chegar nas integrais de trajetória. Feynman fez o oposto, ele partiu de expressão 13.2 e mostrou que as funções de onda em 7.1 satisfazem a equação de Schrödinger (o que só vale para Hamiltonianas do tipo 11.1).

Funções de Correlação

Podemos também usar o método acima para obter outros observáveis, o mais simples sendo a função de um ponto:

$$\langle q', t' | \hat{q}(\bar{t}) | q, t \rangle \quad t < \bar{t} < t'$$

É fácil imaginar como tratar este objeto no procedimento anterior. Discretizamos o tempo da mesma forma mas, assumindo que a discretização é "fina" o bastante, podemos identificar \bar{t} com um dos t_i intermediários:



Em meio aos diversos $\langle q_{i+1}, t_{i+1} | q_{i-1}, t_{i-1} \rangle$ que apareceram antes, vai haver um bracket diferente:

$$\langle q_{i+1}, t_{i+1} | \hat{q}(\bar{t}) | q_i, t_i \rangle \stackrel{t_i = \bar{t}}{=} \underbrace{q(\bar{t})}_{\text{não é mais um operador}} \langle q_{i+1}, t_{i+1} | q_i, t_i \rangle$$

isto é exatamente o que tínhamos antes. Então a conta procede normalmente, lembrando apenas que temos este $q(\bar{t})$ dentro das integrais.

$$\therefore \langle q', t' | \hat{q}(\bar{t}) | q, t \rangle = \int \mathcal{D}q \ e^{iS[q]} \ q(\bar{t})$$

A função de dois (ou mais) pontos é similar, mas há uma sutileza:

$$\langle q', t' | \hat{q}(\bar{t}_2) \hat{q}(\bar{t}_1) | q, t \rangle \rightarrow \text{só sabemos tratar isso se de fato: } t < \bar{t}_1 < \bar{t}_2 < t'$$

$$\int \mathcal{D}q \ \langle q', t' | q_{j+1}, t_{j+1} \rangle \dots \langle q_{j+1}, t_{j+1} | \hat{q}(\bar{t}_2) | q_j, t_j \rangle \dots \langle q_{i+1}, t_{i+1} | \hat{q}(\bar{t}_1) | q_i, t_i \rangle \dots \langle q_1, t_1 | q, t \rangle$$

$\bar{t}_2 = t_j \Rightarrow q(\bar{t}_2) < 1 >$ $\bar{t}_1 = t_i \Rightarrow q(\bar{t}_1) < 1 >$

$$\langle q', t' | \hat{q}(\bar{t}_2) \hat{q}(\bar{t}_1) | q, t \rangle = \int \mathcal{D}q \ e^{iS[q]} \ q(\bar{t}_2) q(\bar{t}_1) \quad (\text{eq. 14.1})$$

Por outro lado, poderíamos ter calculado:

$$\langle q', t' | \hat{q}(\bar{t}_1) \hat{q}(\bar{t}_2) | q, t \rangle = \int \mathcal{D}q \ e^{iS[q]} \ q(\bar{t}_2) q(\bar{t}_1) \quad (\text{eq. 14.2})$$

desde que $t < \bar{t}_2 < \bar{t}_1 < t'$

note que são funções e comutam

Logo vemos que, tentando escrever 14.1 e 14.2 como uma única expressão, temos:

$$\int \mathcal{D}q e^{iS[q]} q(\bar{t}_2) q(\bar{t}_1) = \langle q', t' | T \{ \hat{q}(\bar{t}_2) \hat{q}(\bar{t}_1) \} | q, t \rangle \quad (\text{eq. 15.1})$$

onde aparece o **Produto Temporalmente Ordenado** (recorde como estes produtos aparecem na versão canônica):

$$T \{ \hat{q}(\bar{t}_2) \hat{q}(\bar{t}_1) \} \equiv \begin{cases} \hat{q}(\bar{t}_2) \hat{q}(\bar{t}_1) & \leftrightarrow \bar{t}_2 < \bar{t}_1 \\ \hat{q}(\bar{t}_1) \hat{q}(\bar{t}_2) & \leftrightarrow \bar{t}_1 < \bar{t}_2 \end{cases} \quad (\text{eq. 15.2})$$

Tanto 15.1 e 15.2 são generalizados de forma direta para um número maior de operadores:

$$T \{ \hat{q}(\bar{t}_1), \dots, \hat{q}(\bar{t}_N) \} \equiv \hat{q}(\bar{t}_N) \dots \hat{q}(\bar{t}_1) \leftrightarrow \bar{t}_N < \dots < \bar{t}_1$$

ordenados temporalmente

$$G_n(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n) = \langle q', t' | T \{ \hat{q}(\bar{t}_1) \dots \hat{q}(\bar{t}_n) \} | q, t \rangle = \int \mathcal{D}q e^{iS[q]} q(\bar{t}_1) \dots q(\bar{t}_n)$$

Função de n-pontos ou Função de Correlação (de n pontos) ou **Correlator**. (eq. 15.3)

Em breve veremos em que contexto estes correlatores aparecem e porque estamos interessados neles. Definamos um outro objeto que nos será útil, lembrando que para qualquer conjunto $\{a_n\}$ podemos definir a **função geradora** $F(z)$:

$$F(z) \equiv \sum_n \frac{1}{n!} a_n z^n$$

tal que: $a_n = \frac{d^n}{dz^n} F(z) \Big|_{z=0}$ (conhecer esta função nos permitir obter qualquer elemento do conjunto, bastando fazer o número apropriado de derivações)

O equivalente para o conjunto de todos os correlatores $\{G_n\}$ seria o **funcional gerador**:

$$Z[J] \equiv \sum_{N \geq 0} \int dt_1 \dots \int dt_N \frac{i^N}{N!} G_N(t_1, \dots, t_N) J(t_1) \dots J(t_N) \quad (\text{eq. 15.4})$$

convencional

A diferença é que os elementos do conjunto em questão são funções (de vários t 's) e por isso a variável em que derivaremos deve ser também uma função (os J 's) e o gerador vira um funcional.

Podemos escrever ele em uma forma mais conveniente substituindo G_n de 15.3:

$$\begin{aligned}
 Z[\mathcal{J}] &= \sum_{N>0} \int dt_1 \dots \int dt_N \frac{i^N}{N!} \mathcal{J}(t_1) \dots \mathcal{J}(t_N) \int \mathcal{D}q e^{iS[q]} q(t_1) \dots q(t_N) = \\
 &= \int \mathcal{D}q e^{iS[q]} \sum_{N>0} \frac{1}{N!} \left[\int dt i q(t) \mathcal{J}(t) \right]^N = \int \mathcal{D}q e^{i \underbrace{[S[q] + \int dt q(t) \mathcal{J}(t)]}_{S[q, \mathcal{J}]}}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{Z[\mathcal{J}] = \int \mathcal{D}q e^{iS[q, \mathcal{J}]}} \quad (\text{eq. 16.1})$$

Para ver como podemos obter qualquer G_n , basta fazer as **derivadas funcionais**:

$$\frac{\delta^N}{i \delta \mathcal{J}(t_1) \dots i \delta \mathcal{J}(t_N)} Z[\mathcal{J}] \Big|_{\mathcal{J}=0} = \int \mathcal{D}q e^{iS[q]} q(t_1) \dots q(t_N) = G_N(t_1, \dots, t_N)$$

(eq. 16.2)

Para um tratamento um pouco mais longo de derivação funcional, chequem o material adicional [a] no site do curso (<http://www.ift.unesp.br/users/matheus/files/courses/2016tqc2/func%20deriv.pdf>), e as referências lá citadas.

Para os nossos fins basta saber que:

$$\frac{\delta f(x)}{\delta f(y)} = \delta(x-y) \quad \frac{\delta g(p(x))}{\delta f(y)} = \delta(x-y) \frac{dg}{dp} \Big|_{p=p(x)}$$

De forma que:

$$\frac{\delta^2}{i \delta \mathcal{J}(t_1) i \delta \mathcal{J}(t_2)} Z[\mathcal{J}] = \frac{\delta}{i \delta \mathcal{J}(t_1)} \left\{ \frac{\delta}{i \delta \mathcal{J}(t_2)} \int \mathcal{D}q e^{i[S[q] + \int dt q(t) \mathcal{J}(t)]} \right\} =$$

$$= \int \mathcal{D}q \frac{\delta}{i\delta J(t_1)} \left\{ e^{i[S[q] + \int dt q(t)J(t)]} \frac{\delta}{i\delta J(t_2)} \left[i(S[q] + \int dt q(t)J(t)) \right] \right\} =$$

$$= \int \mathcal{D}q \frac{\delta}{i\delta J(t_1)} \left\{ e^{i[S[q] + \int dt q(t)J(t)]} \int dt q(t) \delta(t-t_2) \right\} =$$

$$= \int \mathcal{D}q q(t_2) \underbrace{\frac{\delta}{i\delta J(t_1)} e^{i[S[q] + \int dt q(t)J(t)]}}_{q(t_1) e^{i[\dots]}} = \int \mathcal{D}q q(t_2) q(t_1) e^{iS[q, J]}$$

$$\therefore \frac{\delta^2}{i\delta J(t_1) i\delta J(t_2)} Z[J] \Big|_{J=0} = \int \mathcal{D}q q(t_2) q(t_1) e^{iS[q]} \Big|_{J=0} = G_2(t_1, t_2) //$$

Com este conjunto de idéias e ferramentas podemos passar para a quantização dos campos.