

E a equação de movimento para q_α é

$$\Delta^{-1} q_\alpha(t; \mathcal{J}) = i \mathcal{J}(t) \quad (\text{eq. 21.1})$$

E a solução:

$$q_\alpha(t; \mathcal{J}) = q_\alpha(t; 0) + i (\Delta \cdot \mathcal{J})(t)$$

$\hookrightarrow \Delta^{-1} q_\alpha(t; 0) = 0$ (estas são as funções problemáticas que satisfazem a eq. 19.2, posso inverter Δ porque ele agora age em $q_\alpha(t; \mathcal{J})$, o segundo termo acima conserta o problema)

Note que:

$$\frac{\delta_{\text{FULL}} S[q_\alpha; \mathcal{J}]}{\delta_{\text{FULL}} \mathcal{J}(t)} = \int dt' \left[\frac{\delta S}{\delta q(t')} \Big|_{q=q_\alpha} \frac{\delta q_\alpha(t'; \mathcal{J})}{\delta \mathcal{J}(t)} + \frac{\delta S}{\delta \mathcal{J}} \right] =$$

$$\int d\mathcal{J} \left(\frac{\delta_{\text{FULL}} S[q_\alpha; \mathcal{J}]}{\delta_{\text{FULL}} \mathcal{J}(t)} = q_\alpha(t; \mathcal{J}) = q_\alpha(t; 0) + i (\Delta \cdot \mathcal{J})(t) \right)$$

$$S[q_\alpha(\mathcal{J}); \mathcal{J}] = S[q_\alpha(0); 0] + q_\alpha(0) \cdot \mathcal{J} + \frac{i}{2} \mathcal{J} \cdot \Delta \cdot \mathcal{J}$$

cada produto escalar deste é uma integral em t (por isso suprimi as dep. em t)

$$Z[\mathcal{J}] = \mathcal{N} e^{i S[q_\alpha; \mathcal{J}]} = \mathcal{N} e^{-\frac{i}{2} \mathcal{J} \cdot \Delta \cdot \mathcal{J} + i q_\alpha(0) \cdot \mathcal{J}} \quad (\text{eq. 21.2})$$

(eq. 20.4)

Ainda resta saber qual é a forma deste Δ e quais condições de contorno usamos para $q_\alpha(t; \mathcal{J})$ na eq. 21.1

Uma opção que temos para evitar os polos em 19.2 é tirá-los do eixo real, faremos isto segundo a prescrição:

$$\omega^2 \rightarrow \omega^2 - i\epsilon \quad (\text{eq. 21.3})$$

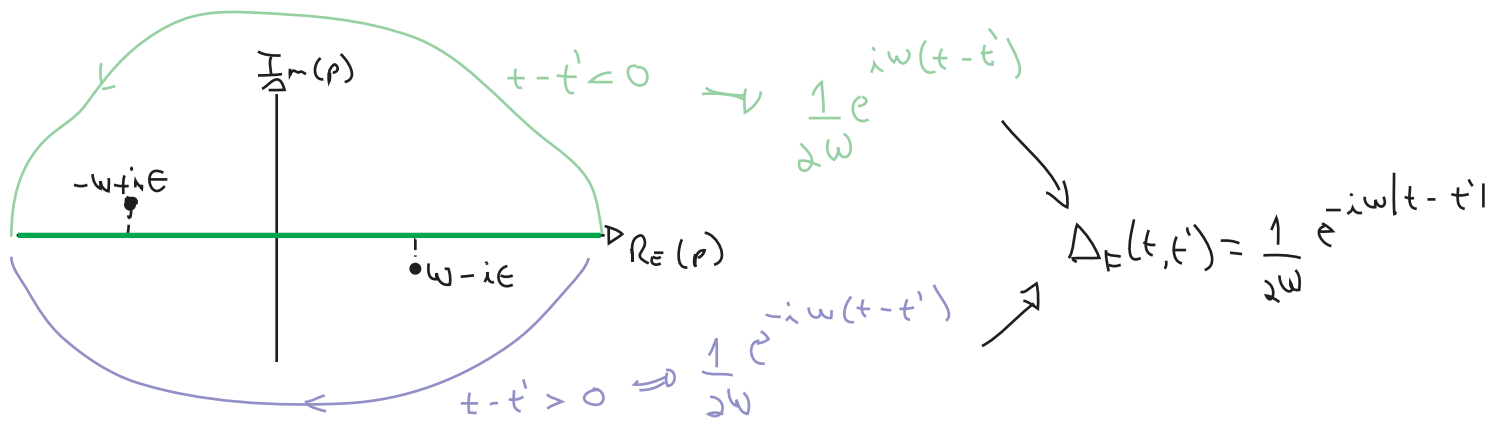
$$\Delta_F(t, t') = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-i p(t-t')}}{p^2 - \omega^2 + i\epsilon}$$

polos em:
 $p = \pm(\omega - i\epsilon)$

que obviamente não é inocente, compare com o propagador de Feynman que você conhece e note que estamos fazendo uma "teoria de campos" com 0 dimensões espaciais e uma temporal:

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{-i}{p^2 + m^2 - i\epsilon} e^{i p(x-y)} \rightarrow \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{-i}{-(p^0)^2 + m^2 - i\epsilon} e^{-i p^0(x^0 - y^0)}$$

$$-(p^0)^2 + \vec{p}^2 + m^2 - i\epsilon \rightarrow \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Voltemos então a equação 21.1:

$$\Delta^{-1} q_\alpha(t; \mathcal{J}) = i \mathcal{J}(t) \Rightarrow i \left(\frac{d^2}{dt^2} + w^2 \right) q_\alpha(t, \mathcal{J}) = i \mathcal{J}(t)$$

E lembrando que:

$$\underbrace{i \left(\frac{d^2}{dt^2} + w^2 \right)}_{\Delta^{-1}} \left(i \int \frac{dp}{2\pi} \frac{e^{-ip(t-t')}}{p^2 - w^2 + i\epsilon} \right) = \delta(t-t')$$

$\Delta_F(t-t')$

Fica fácil deduzir que: $q_\alpha(t, \mathcal{J}) = i \int dt' \Delta_F(t-t') \mathcal{J}(t')$

Assumindo que $\mathcal{J}(t) \rightarrow 0 / t \rightarrow \pm\infty \Rightarrow \int dt' \rightarrow \int_{-T}^T dt'$ algum número finito, pois fora desta região $\mathcal{J}(t) = 0$

Então: $t \rightarrow \infty \Rightarrow q_\alpha(t, \mathcal{J}) = e^{-i\omega t} \underbrace{i \int_{-T}^T dt' \frac{e^{i\omega t'}}{2\omega} \mathcal{J}(t')}_{\text{const.}} = A e^{-i\omega t}$

$t \rightarrow -\infty \Rightarrow q_\alpha(t, \mathcal{J}) = e^{+i\omega t} \int_{-T}^T dt' \frac{e^{-i\omega t'}}{2\omega} \mathcal{J}(t') = B e^{+i\omega t}$

Vemos que a prescrição 21.3 (chamada de **prescrição de Feynman**) é equivalente a resolver 21.1 com as condições de contorno:

$$q_\alpha(t \rightarrow \infty, \mathcal{J}) = e^{-i\omega t}$$

(somente frequências positivas se propagam para o futuro)

$$q_\alpha(t \rightarrow -\infty, \mathcal{J}) = e^{i\omega t}$$

(somente frequências negativas se propagam para o passado)

(eq. 22.1)

e estas condições exigem que $J(t)$ seja limitado no tempo. Além disso, como estas condições não permitem soluções não triviais da equação 19.2, vemos que a integral de trajetória original em $q(t)$ está bem definida (com a trajetória clássica satisfazendo 22.1 e a quântica satisfazendo 20.1).

Espaço de Fase Harmônico

Vejamos agora como podemos tratar este oscilador forçado de forma mais rigorosa. Começando com o oscilador livre, temos:

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 q^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} q(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} [a(t) + a^+(t)] \\ p(t) &= -i\sqrt{\frac{\omega}{2}} [a(t) - a^+(t)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} [\omega q - i p] = a(0) e^{-i\omega t} \\ a^+(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} [\omega q + i p] = a^+(0) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (\text{eq. 23.1})$$

↓ (quantizando)

$$H(\hat{a}, \hat{a}^+) = \omega \hat{a}^+ \hat{a} \quad [\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$$

Espaço de Fock: $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^+)^n |0\rangle$

Até aqui, nada de novo, mas podemos também definir um outro conjunto de estados os **estados coerentes**:

$$|\alpha\rangle \equiv e^{\alpha \hat{a}^+} |0\rangle = \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha^n}{n!} (\hat{a}^+)^n |0\rangle \quad (\text{eq. 23.2})$$

Estas combinações lineares dos estados no espaço de Fock são autoestados de \hat{a} :

$$\begin{aligned} \hat{a} |\alpha\rangle &= \hat{a} e^{\alpha \hat{a}^+} |0\rangle + \underbrace{e^{\alpha \hat{a}^+} \hat{a} |0\rangle}_0 = [\hat{a}, e^{\alpha \hat{a}^+}] |0\rangle \\ [\hat{a}, e^{\alpha \hat{a}^+}] &= [\hat{a}, e^{\alpha \hat{a}^+}] |0\rangle = \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha^n}{n!} \left(\underbrace{[\hat{a}, \hat{a}^+]}_1 (\hat{a}^+)^{n-1} + \hat{a}^+ \underbrace{[\hat{a}, \hat{a}^+]}_1 (\hat{a}^+)^{n-2} + \dots + (\hat{a}^+)^{n-1} \underbrace{[\hat{a}, \hat{a}^+]}_1 \right) |0\rangle \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha^n}{(n-1)!} (\hat{a}^+)^{n-1} |0\rangle = \alpha \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!} (\hat{a}^+)^{n-1} |0\rangle = \alpha e^{\alpha \hat{a}^+} |0\rangle \end{aligned}$$

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle \quad (\text{eq. 23.3})$$

Da mesma forma: $\left\{ \begin{aligned} \langle \alpha^* | &\equiv \langle 0 | e^{-\alpha^* \hat{a}} \\ \langle \alpha^* | \hat{a}^+ &= \langle \alpha^* | \alpha^* \end{aligned} \right. \quad (\text{eq. 23.4})$

Note que:

$$\langle \alpha^* | \alpha \rangle = \langle 0 | e^{\alpha^* \hat{a}} | \alpha \rangle = e^{\alpha^* \alpha} \langle 0 | \alpha \rangle = e^{\alpha^* \alpha} \quad (\text{eq. 24.1})$$

$$\langle 0 | e^{\alpha^* \hat{a}} | 0 \rangle = \langle 0 | 0 \rangle = 1$$

$$\langle 0 | 1 + \frac{\hat{a}^+}{1} + \frac{(\hat{a}^+)^2}{2} + \dots$$

E temos a identidade (provar que isto é a identidade está na lista de exercícios):

$$\hat{1} = \int \frac{d\alpha d\alpha^*}{2\pi i} e^{-\alpha \alpha^*} | \alpha \rangle \langle \alpha^* |$$

Usemos agora estes estados para calcular a amplitude de transição entre estados:

$$F(\alpha^*, t'; \alpha, t) = \langle \alpha^*, t' | \alpha, t \rangle_H = \langle \alpha^* | e^{-i\hat{H}(t'-t)} | \alpha \rangle$$

estados no quadro de Heisenberg, assim como no moving frame (pg 8)

Mudando para o oscilador forçado:

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2} + \frac{\omega^2 \hat{q}^2}{2} - \hat{q} J = \omega \hat{a}^+ \hat{a} - \frac{1}{\sqrt{2\omega}} [J \hat{a} + \frac{J}{L} \hat{a}^+] \quad \gamma(t) \equiv \frac{J(t)}{\sqrt{2\omega}}$$

$L \in \mathbb{R}$

$$H(\hat{a}^+, \hat{a}; t) = \omega \hat{a}^+ \hat{a} - \gamma(t) \hat{a}^+ - \bar{\gamma}(t) \hat{a} \quad (\text{eq. 24.2})$$

dependem ou não do tempo de acordo com o quadro, neste caso não pois estamos no q. de Schrödinger

Vale que:

$$\langle \alpha^* | \hat{H}(\hat{a}^+, \hat{a}; t) | \beta \rangle = H(\alpha^*, \beta; t) \langle \alpha^* | \beta \rangle = H(\alpha^*, \beta; t) e^{\alpha^* \beta} \quad (\text{eq. 24.3})$$

Agora seguimos o procedimento usual para transformar a transição F em uma integral de trajetória, dividindo o tempo entre t e t' em n+1 intervalos de tamanho ϵ :

$$\epsilon = \frac{t' - t}{N+1} \quad \{t_0 = t, t_1, t_2, \dots, t_n, t' = t_{n+1}\}$$

$$F(\alpha^*, t'; \alpha, t) = \int \prod_{i=1}^n \left[\frac{d\alpha(t_i) d\alpha^*(t_i)}{2\pi i} e^{-\alpha^*(t_i) \alpha(t_i)} \right] \langle \alpha^*(t') | e^{-i\epsilon \hat{H}} | \alpha(t_n) \rangle \times$$

$$\times \langle \alpha^*(t_n) | e^{-i\epsilon \hat{H}} | \alpha(t_{n-1}) \rangle \dots \langle \alpha^*(t_1) | e^{-i\epsilon \hat{H}} | \alpha(t) \rangle$$

das n identidades inseridas

como:

$$\langle \alpha^*(t_{i+1}) | e^{-i\epsilon \hat{H}} | \alpha(t_i) \rangle = e^{-i\epsilon H(\alpha^*(t_{i+1}), \alpha(t_i); t_i)} e^{\alpha^*(t_{i+1}) \alpha(t_i)}$$

(aqui está a vantagem dos estados coerentes, se tentássemos fazer o mesmo no espaço de Fock apareceriam problemas pois o termo com fontes mistura níveis de Fock diferentes)

$$F(\alpha^*, t'; \alpha, t) = \int \prod_{i=1}^n \left[\frac{d\alpha(t_i) d\alpha^*(t_i)}{2\pi i} \right] \text{EXP} \left[-i \sum_{i=0}^n \epsilon H(\alpha^*(t_{i+1}), \alpha(t_i); t_i) \right] \times$$

$$\times \text{EXP} \left[\sum_{i=1}^n -\alpha^*(t_i) \alpha(t_i) \right] \text{EXP} \left[\sum_{i=0}^n +\alpha^*(t_{i+1}) \alpha(t_i) \right]$$

$$\text{EXP} \left[\underbrace{\alpha^*(t') \alpha(t_n) - \alpha^*(t_n) \alpha(t_n)}_{\epsilon} + \underbrace{\alpha^*(t_n) \alpha(t_{n-1}) - \alpha^*(t_{n-1}) \alpha(t_{n-1})}_{\epsilon} \dots \underbrace{\alpha^*(t_1) \alpha(t_1) + \alpha^*(t_1) \alpha(t)}_{\text{"órfão"}}$$

No limite $\epsilon \rightarrow 0$ $\epsilon \frac{\alpha^*(t') - \alpha^*(t_n)}{\epsilon} \alpha(t_n) \rightarrow d\tau \dot{\alpha}^*(\tau) \alpha(\tau)$

$$F(\alpha^*, t'; \alpha, t) = \int \mathcal{D}\alpha \mathcal{D}\alpha^* \text{EXP} \left\{ i \int_t^{t'} d\tau \left[\frac{\dot{\alpha}^*(\tau)}{i} \alpha(\tau) - H \right] + \alpha^*(t) \alpha(t) \right\} \quad (\text{eq. 25.1})$$

Para resolver esta integral precisamos pensar um pouco sobre as condições de contorno. É tentador dizer que α^* e α estão ambos fixos nas "bordas" (t' e t), mas temos um problema, pois estes são autovalores de operadores diferentes (\hat{a}^\dagger e \hat{a} respectivamente) e estes dois operadores não comutam. Sabemos que, em mecânica quântica, a nossa capacidade de especificar autovalores **em um mesmo estado** está limitada por:

$$\sigma_A \sigma_B \geq \frac{1}{2} | \langle \psi | [\hat{A}, \hat{B}] | \psi \rangle | \quad (\text{Griffiths de Mec. Quant., sec 3.4})$$

$$\sigma_{\hat{Q}}^2 = \langle \psi | (\hat{Q} - \langle \hat{Q} \rangle)^2 | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{Q}^2 | \psi \rangle - \langle \psi | \hat{Q} | \psi \rangle^2$$

$$\langle \hat{Q} \rangle = \langle \psi | \hat{Q} | \psi \rangle$$

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \rightarrow \sigma_q \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Como estamos no quadro de Schrödinger e os estados evoluem no tempo, não podemos especificar α^* e α ao mesmo tempo no estado inicial e nem no final, mas podemos fazer:

- $t \Rightarrow \alpha(t) = \alpha \quad \alpha^*(t) \text{ é livre} \quad (\sigma_{\alpha^*} = \infty)$
- $t' \Rightarrow \alpha^*(t') = \alpha^* \quad \alpha(t) \text{ é livre} \quad (\sigma_{\alpha} = \infty)$

este objeto vai aparecer exponenciado em todas as integrais da trajet. p/F ou Z $i\tilde{S}[\alpha, \alpha^*]$

Note que a equação 25.1 está na forma: $F = \int \mathcal{D}\alpha \mathcal{D}\alpha^* e^{i\tilde{S}[\alpha, \alpha^*]}$

e portanto podemos usar o princípio da extrema ação para achar a equação de movimento para as

soluções clássicas do sistema. Podemos re-escrever a ação de duas formas:

$$\tilde{S} = \int_t^{t'} d\tau \left[\frac{\dot{\tilde{z}}^*(\tau)}{i} \alpha(\tau) - H \right] + \alpha^*(t)\alpha(t) = \int_t^{t'} d\tau \left[-\frac{\alpha^*(\tau)\dot{\tilde{z}}(\tau)}{i} - H \right] + \alpha(\tau)\alpha^*(\tau) \Big|_t^{t'} + \alpha^*(t)\alpha(t)$$

+ $\alpha(t')\alpha^*(t')$

As equações de movimento obtidas (no interior do intervalo [t,t']) são:

$$\delta \alpha(\tau) \left(\frac{\delta \tilde{S}}{\delta \alpha(\tau)} \right) + \delta \alpha^*(\tau) \left(\frac{\delta \tilde{S}}{\delta \alpha^*(\tau)} \right) = 0$$

$$\frac{\delta \tilde{S}}{\delta \alpha(\tau)} = \frac{\dot{\tilde{z}}^*(\tau)}{i} - \frac{\partial H}{\partial \alpha(\tau)} = 0$$

$$\frac{\delta \tilde{S}}{\delta \alpha^*(\tau)} = -\frac{\dot{\tilde{z}}(\tau)}{i} - \frac{\partial H}{\partial \alpha^*(\tau)} = 0$$

$$H(\alpha^*, \alpha; \tau) = \omega \alpha^* \alpha - \gamma \alpha^* - \bar{\gamma} \alpha$$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_\alpha^* - i\omega \alpha_\alpha^* + i\bar{\gamma} &= 0 \\ \dot{\alpha}_\alpha + i\omega \alpha_\alpha - i\gamma &= 0 \end{aligned}$$

(eq. 26.1)

com as condições:

$$\begin{cases} \delta \alpha^*(\tau) \Big|_{\tau=t'} = 0 \\ \delta \alpha(\tau) \Big|_{\tau=t} = 0 \end{cases}$$

Que tem como solução:

$$\begin{aligned} \alpha_\alpha(\tau) &= \alpha e^{i\omega(t-\tau)} + i \int_t^\tau e^{i\omega(s-\tau)} \gamma(s) ds \\ \alpha_\alpha^*(\tau) &= \alpha^* e^{i\omega(\tau-t')} + i \int_\tau^{t'} e^{i\omega(\tau-s)} \bar{\gamma}(s) ds \end{aligned}$$

(eq. 26.2)

Note que:

$$\alpha_\alpha(t) = \alpha$$

$$\alpha_\alpha^*(t') = \alpha^*$$

Usando estas soluções (ou as equações de movimento), dá para mostrar que (exercício):

$$\begin{aligned} i \int_t^{t'} d\tau \left[\frac{\dot{\tilde{z}}^*(\tau)}{i} \alpha_\alpha(\tau) - H(\alpha_\alpha^*, \alpha_\alpha) \right] + \alpha_\alpha^*(t)\alpha_\alpha(t) &= \alpha_\alpha^*(t)\alpha_\alpha(t) + i \int_t^{t'} d\tau \gamma(\tau) \alpha_\alpha^*(\tau) = \\ &= \alpha^* \alpha e^{-i\omega(t'-t)} + i \int_t^{t'} ds \left[\alpha e^{i\omega(t-s)} \bar{\gamma}(s) + \alpha^* e^{i\omega(s-t')} \gamma(s) \right] + \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_t^{t'} ds \int_t^{t'} ds' \gamma(s) \bar{\gamma}(s') e^{-i\omega|s'-s|} \end{aligned}$$

(eq. 26.3)

Compare 26.3 com 21.2: mais uma vez temos um termo independente das fontes (que em 21.2 foi absorvido na normalização) um termo linear na fonte e um termo quadrático, de onde podemos obter o propagador. Vamos usar o mesmo método que antes, fazendo:

$$\alpha(t) = \alpha_q(t) + \tilde{\alpha}(t)$$

$$\alpha^*(t) = \alpha_q^*(t) + \tilde{\alpha}^*(t)$$

De novo, podemos mostrar que:

$$\tilde{S}[\alpha(t), \alpha^*(t); \delta, \bar{\delta}] = \tilde{S}[\alpha_q(t), \alpha_q^*(t); \delta, \bar{\delta}] + \tilde{S}[\tilde{\alpha}(t), \tilde{\alpha}^*(t); 0, 0]$$

e obter, de forma análoga a 20.4, que:

$$\tilde{Z} = \mathcal{N} e^{i\tilde{S}[\alpha_q, \alpha_q^*; \delta, \bar{\delta}]}$$

Para relacionar este resultado com o anterior, temos que escolher os estados iniciais e finais como o vácuo:

$$|\alpha\rangle = e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle \rightarrow \alpha = 0 \rightarrow |\alpha\rangle = |0\rangle$$

$$\alpha^* = 0 \rightarrow \langle \alpha^*| = \langle 0|$$

E então tomamos $\begin{cases} t \rightarrow -\infty \\ t' \rightarrow +\infty \end{cases}$

De 26.3 obtemos:

$$\mathcal{Z}[\mathcal{J}] \equiv \langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle_{\mathcal{J}} = \mathcal{N} \text{EXP} \left\{ \underbrace{\alpha^*}_{\rightarrow 0} e^{-i\omega(t'-t)} + i \int_t^{t'} d\alpha \left[\underbrace{\alpha}_{\rightarrow 0} e^{i\omega(t-s)} \bar{\gamma}(s) + \alpha^* e^{i\omega(s-t')} \gamma(s) \right] + \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \int_t^{t'} ds \int_t^{t'} ds' \underbrace{\gamma(s)}_{\mathcal{J}/\sqrt{2\omega}} \underbrace{\bar{\gamma}(s')}_{\mathcal{J}/\sqrt{2\omega}} e^{-i\omega|s-s'|} \right\} = \mathcal{N} \text{EXP} \left[-\frac{1}{i} \mathcal{J} \cdot \Delta_F \cdot \mathcal{J} \right] \quad (\text{eq. 27.1})$$

Note que: $\mathcal{N} = \langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle_0$ (eq. 27.2)

$$\Delta_F = \frac{1}{2\omega} e^{-i\omega|s-s'|} \quad (\text{eq. 27.3})$$

Que é o mesmo resultado obtido na pg 22. Note também que a condição de contorno:

$\left. \begin{matrix} t \rightarrow -\infty \\ \alpha(t) = 0 \\ \alpha^*(t) \text{ livre} \end{matrix} \right\} \Rightarrow$ só temos a parte de criação no passado
 $\alpha^*(t)$ é autovalor de a^\dagger

$t \rightarrow +\infty$
 $\psi^*(t) = 0$
 $\psi(t)$ livre

\Rightarrow só temos a parte de aniquilação no futuro
 $\psi(t)$ é autovalor de a

Como
$$q(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left[a e^{-i\omega t} + a^\dagger e^{i\omega t} \right]$$

verificamos que isto é o mesmo que as condições 22.1.

O que ganhamos fazendo de novo este caminho? Para começar ele é mais limpo, não houve uso prescrição alguma. Adicionalmente vimos que o resultado final só pôde ser obtido escolhendo os estados inicial e final como o vácuo, este passo não ficou explícito no caso anterior. De fato a projeção no vácuo estava escondida no único lugar em que poderia, na prescrição de Feynman que, como já vimos, está intrinsecamente ligada a projeção no vácuo assintótico (para tempos grandes) da teoria.

Rotação de Wick para o tempo Euclideano

Até agora viemos fazendo integrais que tipicamente envolviam exponenciais do tipo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-i\alpha x^2}$$

que exige que α ou x sejam tomados ligeiramente complexos para que a integral convirja, ou seja, estas integrais só estão definidas via sua continuação analítica. Este tipo de integral aparece com frequência em teoria de campos, pois em geral podemos expandir as integrais da ação em torno da solução clássica usando a [Saddle Point Approximation](#):

$$S = S[q_{cl}] + \frac{1}{2} \delta q_i S_{,ij} \delta q_j + \mathcal{O}(\delta q^3)$$

$$\frac{\delta S}{\delta q} \Big|_{q=q_{cl}} = 0$$

se a ação já é quadrática em q (e.g. no caso livre) este termo é zero e o resultado da SPA é exato.

Uma outra forma de olhar a continuação analítica é fazendo uma rotação para o Espaço Euclideano, este procedimento é também bastante instrutivo pois revela paralelos interessantes entre a Mecânica Quântica e a Mecânica Estatística. Pois bem, analisemos o seguinte caso:

$$\hat{H} |n\rangle = E_n |n\rangle$$

$$E_n > 0$$

$$\hat{1} = \sum |n\rangle \langle n|$$

Uma amplitude de transição seria escrita como: