Quantização do Campo Escalar por Path Integrals

(Nastase 9, Peskin 9.2, Ryder 6.1 a 6.5, Ramond 3.1 e 3.2)

Usaremos as idéias das últimas 20 páginas para quantizar o campo escalar usando integrais de trajetória. Resumindo, o caminho mais curto e seguro que encontramos para quantizar o oscilador harmônico forçado foi:

(1) Escrever uma função de partição do sistema como uma integral de trajetória, sobre um caminho fechado, no espaço Euclideano (esta integral é bem definida e não tem bordas para criar problemas)

(2) Para projetar sobre os estados do vácuo, tomamos $\beta \to 0$ (período infinito na integral de traj.)

(3) Rodamos o resultado para o espaço físico (de Minkowski), tomando cuidado de não tocar os polos (o que nos leva invariavelmente a um propagador de Feynman)

Para passar para uma teoria de campos, faremos a substituição:

$$q_i(t) \to \phi_{\vec{x}}(t) \equiv \phi(\vec{x},t) = \phi(x)$$

tem uma discretização do espaço aqui

A ação do campo escalar, no espaço de Minkowski, é:

$$i S[\phi] = i\int d^4x \left[-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - V(\phi)\right]$$

e as funções de n pontos:

$$G_n(x_1,\dots x_n) = \langle 0|\, T\{\hat{\phi}(x_1)\dots\hat{\phi}(x_n)\}\,|0\rangle = \int \mathcal{D}\phi\; e^{iS[\phi]}\,\phi(x_1)\dots\phi(x_n)$$

e estas podem ser obtidas a partir de integrais de trajetória sobre trajetórias periódicas de período infinito, usando a seguinte ação Euclideana:

$$-S_E[\phi] = -\int d^4x \left[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial_\mu\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + V(\phi)\right] \qquad \text{(eq. 38.1)}$$

(todos os índices *"E"* foram suprimidos)

EUCLID: $a_\mu b_\mu = a_\mu b^\mu = a_\mu b_\nu \delta^{\mu\nu}$

$t = x^0 = -x_0 \equiv -i t_E$

$t_E \equiv x^4 \equiv x_4$ $\qquad x^4 = i x^0$

$$\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi = -\frac{d\phi}{dx^0}\frac{d\phi}{dx^0} + \partial_i\phi\,\partial_i\phi =$$
$$= \frac{d\phi}{dx^4}\frac{d\phi}{dx^4} + \partial_i\phi\,\partial_i\phi = \partial^E_\mu\phi\,\partial^E_\mu\phi$$

As funções de Green Euclideanas são:

$$G_n^{(E)}(x_1,\dots,x_n) = \int \mathcal{D}\phi \; e^{-S_E[\phi]} \, \phi(x_1)\dots\phi(x_n)$$

Podemos escrever o funcional gerador / função de partição para um período β:

$$Z[\beta,J] = \mathrm{Tr}\left\{e^{-\beta \hat{H}_J}\right\} = \int \mathcal{D}\phi \; e^{-S_E[\phi]+J\phi}$$

$\phi(\vec{x},t_E+\beta)=\phi(\vec{x},t_E)$

$$J\cdot\phi = \int d^d x \; J(x)\phi(x)$$

estamos generalizando o raciocínio a seguir para um número arbitrário de dimensões

$\beta \to \infty$

$$\boxed{Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \; e^{-S_E[\phi]+J\phi} \equiv {}_J\langle 0|0\rangle_J}$$ (eq. 39.1)

$$\boxed{G_n(x_1,\dots,x_n) = \frac{\delta}{\delta J(x_1)}\cdots\frac{\delta}{\delta J(x_n)} Z[J]\Big|_{J=0}}$$ (eq. 39.2)

e (por definição):

$$\boxed{Z[J] = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\int \prod_{i=1}^{n} d^d x_i \; G(x_1,\dots,x_n)\,J(x_1)\dots J(x_n)}$$ (eq. 39.3)

Teoria de Perturbação

Vamos assumir agora que este campo tem uma interação tratável em teoria de perturbação, e fazer a divisão usual:

$$S[\phi] = S_0[\phi] + S_I[\phi]$$

A funções de Green no espaço dos momentos são:

$$\tilde{G}_n(p_1,\dots,p_n) = \int d^d x_1 \dots d^d x_n \; e^{i(p_1x_1+\dots+p_nx_n)} G_n(x_1,\dots,x_n)$$

Qualquer teoria que seja invariante por translações (ou seja, que conserve momento e energia):

$$G_n(x_1,\dots,x_n) = G_n(x_1-X, x_2-X,\dots,x_n-X)$$

escolhendo: $X = x_1$ e mudando as integrais: $x_i \to x_i + X \qquad i\geq 2$

$$\tilde{G}_n(p_1,\dots,p_n) = \left[\int d^d x_1 \; e^{ix_1(p_1+\dots+p_n)}\right]\left[\int d^d x_2\dots d^d x_n \; e^{i(x_2p_2+\dots+x_np_n)} G_n(0,x_2,\dots,x_n)\right]$$

$$= (2\pi)^d \delta^d(p_1 + \dots + p_n)\, \underbrace{G_n}_{}(\underbrace{p_1}_{}, \dots, p_n)$$

tendo em mente que a dependencia de p_1 entra por meio da soma dos outros momentos

nestas funções a conservação de momento já está garantida

Um resultado importante, chamado de fórmula de Dyson, pode ser obtido começando com o VEV (valor esperado no vácuo) de operadores quaisquer no vácuo da teoria livre:

$$<0|\hat{O}[\{\hat{\phi}\}]\underbrace{|0>}_{} = \underbrace{\int D\phi\, e^{-S_0[\phi]}}_{} O[\{\phi\}]$$

vácuo da teoria livre

deste lado a informação vácuo está no fato de tomarmos configurações periódicas $\phi(\vec{x}, t_E + \beta) = \phi(\vec{x}, t_E)$ com β infinito e sabemos que é o vácuo da teoria livre pois usamos S_0 na função de partição

Suponha que: $\hat{O} = e^{-S_I[\phi]}$

temos então:

$$\boxed{<0|e^{-S_I[\phi]}|0> = \int D\phi\, e^{-S_0[\phi] - S_I[\phi]}}$$

(eq. 40.1)

e se: $\hat{O} = \hat{\phi}(x_1)\dots\hat{\phi}(x_n)\, e^{-S_I[\phi]}$

$$\boxed{<0|\hat{\phi}(x_1)\dots\hat{\phi}(x_n)\, e^{-S_I[\phi]}|0> = \int D\phi\, e^{-S_0[\phi] - S_I[\phi]}\, \phi(x_1)\dots\phi(x_n) = G_n(x_1,\dots,x_n)}$$

(lembre que quando rodarmos de volta para o espaço de Minkowski vamos obter o ordenamento temporal)

(eq. 40.2)

finalmente, se: $\hat{O} = e^{-S_I[\phi]}\, e^{\int d^dx\, J(x)\phi(x)}$

$$\boxed{<0|e^{-S_I[\phi]}\, e^{\int d^dx\, J(x)\phi(x)}|0> = \int D\phi\, e^{-S_0[\phi] - S_I[\phi] + J\cdot\phi} = Z[J]}$$

Fórmula de Dyson

(eq. 40.3)

Solução da Teoria Livre

Para $S_I[\phi] = 0$

$$Z_0[J] = \int D\phi\, e^{-S_0[J] + J\cdot\phi} = \int D\phi\, \exp\left\{-\frac{1}{2}\int d^dx\left[\partial_\nu\phi\,\partial_\nu\phi + m^2\phi^2\right] + J\cdot\phi\right\}$$

$$= \int D\phi\, \exp\left\{-\frac{1}{2}\int d^dx\, \phi\overbrace{\left[-\partial_\nu\partial_\nu + m^2\right]}^{\Delta^{-1}}\phi + J\cdot\phi\right\}$$

Note que:

$$-\frac{1}{2}\left(\phi - J\cdot\Delta\right)\cdot\Delta^{-1}\cdot\left(\phi - \Delta\cdot J\right) = -\frac{1}{2}\phi\,\Delta^{-1}\phi + \underbrace{\frac{1}{2}\phi\cdot J + \frac{1}{2}J\cdot\phi}_{J\cdot\phi}\;\underbrace{-\frac{1}{2}J\cdot\Delta\cdot J}_{\text{sobrando}}$$

Logo:

$$Z_0[J] = \int D\phi\;\exp\left\{-\frac{1}{2}\underbrace{\left(\phi - J\cdot\Delta\right)}_{\phi'}\cdot\Delta^{-1}\cdot\left(\phi - \Delta\cdot J\right) + \frac{1}{2}J\cdot\Delta\cdot J\right\} =$$

$$\left(D\phi' = D\phi\right)$$

$$= e^{\frac{1}{2}J\Delta J}\underbrace{\int D\phi'\; e^{-\frac{1}{2}\phi'\Delta^{-1}\phi'}}_{{}_0\langle 0|0\rangle_0}$$

(eq 39.1)

$$\boxed{Z_0[J] = e^{\frac{1}{2}J\Delta J}\,{}_0\langle 0|0\rangle_0} \qquad \text{(eq. 41.1)}$$

$$Z_0[0] = {}_0\langle 0|0\rangle_0 = 1 \quad \text{(normalização)}$$

O propagador é tal que: $\Delta^{-1} = -\partial_\mu\partial_\mu + m^2$

e portanto:

$$\boxed{\Delta(x,y) = \int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\,\frac{e^{ip(x-y)}}{p^2+m^2}} \qquad \text{(eq. 41.2)}$$

que não tem polos. A rotação de volta para Minkowski, assim como no caso do oscilador forçado (pg 37) leva a polos ($|p| = \pm i m$), então a rotação feita em p^0 deve ser de $(\pi/2 - \varepsilon)$ ao invés de $(\pi/2)$:

$$p_E^0 = e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-\epsilon\right)}p^0 = -i\left(p^0 + i\epsilon\right)$$

$$p_E^2 + m^2 = (p_E^0)^2 + (\vec{p})^2 + m^2 = -\left(p^0 + i\epsilon\right)^2 + (\vec{p})^2 + m^2 = \underbrace{-(p^0)^2 + (\vec{p})^2}_{p_\mu p^\mu} + m^2 - i\epsilon = p^2 + m^2 - i\epsilon$$

e obtemos (agora tudo no espaço de Minkowski):

$$\boxed{\Delta(t_E = it, \vec{x}; y=0) = \Delta_F(t,\vec{x}) = \int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\,\frac{-i\,e^{ipx}}{p^2+m^2-i\epsilon}} \qquad \text{(eq. 41.3)}$$

Teorema de Wick:

Vejamos que forma toma o teorema de Wick neste formalismo. Considere a função:

$$F[\{\phi\}] = \phi^2(x_1)\,\phi(x_2)\,\phi^4(x_3)$$

$$\langle 0|F[\{\phi\}]|0\rangle = \int \mathcal{D}\phi\; e^{-S_0[\phi]}\,\phi^2(x_1)\,\phi(x_2)\,\phi^4(x_3)$$

Note que: $$\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\, e^{\overbrace{J\cdot\phi}} = e^{J\cdot\phi}\,\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\int d^4x\; \underbrace{J(x)}\phi(x) = e^{J\cdot\phi}\,\phi(x_1)$$

$$J\cdot\phi = \int d^4x\; J(x)\,\phi(x)$$

$$\frac{\delta J(x)}{\delta J(x_1)} = \delta^4(x-x_1)$$

Logo:
$$\langle 0|F[\{\phi\}]|0\rangle = \left(\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\right)^2 \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \left(\frac{\delta}{\delta J(x_3)}\right)^4 \underbrace{\int \mathcal{D}\phi\; e^{-S_0[\phi]+J\cdot\phi}}_{Z_0}\Bigg|_{J=0}$$

$Z_0 \rightarrow$ teoria livre

Podemos, de fato, fazer o mesmo para uma função arbitrária (caso ela não seja um polinômio, podemos considerar que está definida por sua série de potências):

$$\boxed{{}_J\langle 0|F[\{\phi\}]|0\rangle_J = F\left[\left\{\frac{\delta}{\delta J}\right\}\right] Z_0[J]}$$ (eq. 42.1)

Voltando então na fórmula de Dyson (eq. 40.3), temos:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi\; e^{-S_0[\phi]\underbrace{-S_I[\phi]}_{-\int d^dx\, V(\phi(x))}+J\cdot\phi} = {}_J\langle 0|\underbrace{e^{-\int d^dx\, V(\phi(x))}}_{F[\phi]}|0\rangle_J$$

41.1

$$\boxed{Z[J] = e^{-\int d^dx\, V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)} Z_0[J] = \underbrace{e^{-\int d^dx\, V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)}}_{\text{interação}}\; \underbrace{e^{\frac{1}{2} J\cdot\Delta\cdot J}}_{\text{parte livre}}}$$ (eq. 42.2)

interação

parte livre (Δ é o propagador da teoria livre)

obs:
$$\left\{ \langle\Omega|T\{\mathcal{O}_H(x_1)\ldots\mathcal{O}_H(x_n)\}|\Omega\rangle = \lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0|T\{\mathcal{O}_I(x_1)\ldots\mathcal{O}_I(x_n)\,\mathrm{Exp}\left[-i\int_{-T}^{T} dt\, H_{1I}(t)\right]\}|0\rangle}{\langle 0|T\{\mathrm{Exp}\left[-i\int_{-T}^{T} dt\, H_{1I}(t)\right]\}|0\rangle} \right\}$$

Não é muito óbvio, mas este é o teorema de Wick no formalismo de integrais de trajetória. De novo temos uma solução exata da teoria interagente (neste caso a função de partição), mas esta só é útil se pudermos expandir a exponencial da interação e truncar a expansão, ou seja, em teoria de perturbação.

Regras de Feynman

Para perceber que a equação 42.2 é de fato equivalente ao teorema de Wick, vamos calcular algumas funções de green usando-a. Definindo a notação:

$$G_n^{(p)}(x_1, \dots, x_n)$$

em ordem *p* da expansão perturbativa

função de *n* pontos

Podemos obter estas funções a partir do funcional gerador, também calculado até alguma ordem em teoria de perturbação:

$$\boxed{Z[J] = e^{-\int d^dx\, V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)}}\, e^{\frac{1}{2} J\cdot\Delta\cdot J} =$$

$$= \Big[1 - \int d^dx\, V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) + \frac{1}{2!}\int d^dx\, V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\int d^dx\, V\left(\frac{\delta}{\delta J(y)}\right) + \dots \Big] e^{\frac{1}{2} J\cdot\Delta\cdot J} =$$

$$\boxed{\equiv Z_0[J] + Z_1[J] + Z_2[J] + \dots} \quad \text{(eq. 43.1)}$$

$$\boxed{G_n^{(p)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta J(x_n)} Z_p[J]\Big|_{J=0}} \quad \text{(eq. 43.2)}$$

O objeto mais simples que podemos calcular é:

$$G_1^{(0)}(x_1)_J = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} e^{\frac{1}{2} J\cdot\Delta\cdot J} = e^{\frac{1}{2} J\cdot\Delta\cdot J} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \left\{ \frac{1}{2} \int d^dx\, d^dx'\, J(x)\Delta(x,x')J(x') \right\} =$$

$$= e^{\frac{1}{2} J\cdot\Delta\cdot J} \frac{1}{2} \int d^dx\, d^dx' \left\{ \delta(x-x_1)\Delta(x,x')J(x') + J(x)\underbrace{\Delta(x,x')}\delta(x'-x_1) \right\} =$$

$$\int \frac{d^dp}{(2\pi)^d} \frac{e^{ip(x-x')}}{p^2+m^2} = \int \frac{d^dp}{(2\pi)^d} \frac{e^{-ip(x-x')}}{p^2+m^2}$$

$$= e^{\frac{1}{2} J\cdot\Delta\cdot J} \underbrace{\int d^dx\, \Delta(x_1,x) J(x)}_{(\Delta\cdot J)(x_1)} =$$

$$= (\Delta\cdot J)(x_1)\, e^{\frac{1}{2} J\cdot\Delta\cdot J}$$

que, para $J = 0$, é nula: $\boxed{G_1^{(0)}(x_1) = 0}$ (eq. 43.3)

É fácil ver que todas as funções com um número ímpar de pontos são nulas, pois temos dois J's em Z e fazendo um número ímpar de derivadas vai sobrar sempre um J multiplicando tudo, o que anula a função quando fazemos $J=0$.

$$k=0,1,2,\ldots \Rightarrow \boxed{G^{(0)}_{2k+1}(x_1,\ldots,x_{2k+1})=0}$$

(eq. 44.1)

A função de 2 pontos fica:

$$G_2^{(0)}(x_1,x_2)_J = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \underbrace{\frac{\delta}{\delta J(x_2)} e^{\frac{1}{2} J\cdot\Delta\cdot J}}_{G_1^{(0)}(x_2)_J} = \frac{\delta}{\delta J(x_1)}\left[(\Delta\cdot J)(x_2)\, e^{\frac{1}{2} J\cdot\Delta\cdot J}\right] =$$

$$\frac{\delta}{\delta J(x_1)}(\Delta\cdot J)(x_2) = \frac{\delta}{\delta J(x_1)}\int d^dx\, \Delta(x,x_2)J(x) = \int d^dx\, \Delta(x,x_2)\delta(x-x_1) = \Delta(x_1,x_2)$$

$$= \Delta(x_1,x_2)\, e^{\frac{1}{2} J\cdot\Delta\cdot J} + (\Delta\cdot J)(x_2)(\Delta\cdot J)(x_1)\, e^{\frac{1}{2} J\cdot\Delta\cdot J}$$

$$J=0 \Rightarrow G_2^{(0)}(x_1,x_2) = \Delta(x_1,x_2) \longleftrightarrow$$

A função de 3 pontos é zero, como já adiantamos, pois:

$(J=0)$

$$G_3^{(0)}(x_1,x_2,x_3)_J = \frac{\delta}{\delta J(x_3)} G_2^{(0)}(x_1,x_2)_J = \Big[\Delta(x_1,x_2)\cancelto{0}{(\Delta\cdot J)(x_3)} + \Delta(x_2,x_3)\cancelto{0}{(\Delta\cdot J)(x_1)} +$$

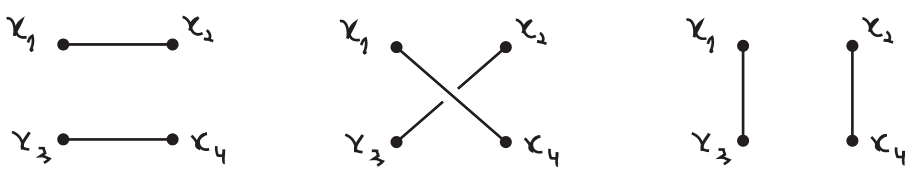
$$+ \cancelto{0}{(\Delta\cdot J)(x_2)}\,\Delta(x_1,x_3) + \underbrace{(\Delta\cdot J)(x_2)(\Delta\cdot J)(x_1)(\Delta\cdot J)(x_3)}_{0}\Big] e^{\frac{1}{2} J\cdot\Delta\cdot J}$$

A próxima função não trivial é (exercício):

$$\boxed{\begin{aligned} G_4^{(0)}(x_1,x_2,x_3,x_4) &= \frac{\delta}{\delta J(x_1)}\cdots\frac{\delta}{\delta J(x_4)} e^{\frac{1}{2} J\cdot\Delta\cdot J}\Big|_{J=0} = \\ &= \Delta(x_1,x_2)\Delta(x_3,x_4) + \Delta(x_1,x_3)\Delta(x_2,x_4) + \Delta(x_1,x_4)\Delta(x_2,x_3) \end{aligned}}$$

(eq. 44.2)

Que, em diagramas, é exatamente o mesmo que o que se obtém com o teorema de Wick:



de onde fica claro que a lógica por trás do Teorema de Wick (conectar os pontos externos de todas as formas possíveis) aqui é implementada pela regra do produto da derivada.

Passemos para o caso com interação, considerando agora a teoria $\lambda\phi^3$:

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{3!}\phi^3$$

(note que só queremos ver como saem as regras de Feynman, esta teoria é problemática pois o potencial não tem mínimo global, e energias infinitamente negativas são permitidas)

Em ordem λ, temos:

$$\boxed{Z_1[J] =} -\int d^dx\, V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) e^{\frac{1}{2}J\cdot\Delta\cdot J} = -\int d^dx \frac{\lambda}{3!}\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^3 e^{\frac{1}{2}J\cdot\Delta\cdot J} =$$

$$= -\frac{\lambda}{3!}\int d^dx \left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^2\left[(\Delta\cdot J)(x)\, e^{\frac{1}{2}J\cdot\Delta\cdot J}\right] = -\frac{\lambda}{3!}\int d^dx\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\left[\Delta(x,x) + (\Delta\cdot J)^2(x)\right]e^{\frac{1}{2}J\cdot\Delta\cdot J} =$$

$$= -\frac{\lambda}{3!}\int d^dx\left[\Delta(x,x)(\Delta\cdot J)(x) + \underbrace{\Delta(x,x)(\Delta\cdot J)(x) + (\Delta\cdot J)(x)\Delta(x,x) + (\Delta\cdot J)^3(x)}\right]e^{\frac{1}{2}J\cdot\Delta\cdot J} =$$

$$\boxed{= -\frac{\lambda}{3!}\int d^dx\left[3\Delta(x,x)(\Delta\cdot J)(x) + (\Delta\cdot J)^3(x)\right]e^{\frac{1}{2}J\cdot\Delta\cdot J}}$$

(eq. 45.1)

Note que este funcional gerador agora tem sempre potências ímpares de *J*, de forma que as funções de *n* pontos serão nulas para *n* par:

$$\boxed{G^{(1)}_{2k}(x_1,\ldots,x_{2k}) = 0} \quad \lambda\phi^3$$

(eq. 45.2)

A função de 1 ponto é dada por:

$$G^{(1)}_1(x_1) = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} Z_1[J]\Big|_{J=0} = -\frac{\lambda}{3!}\int d^dx\Big[3\Delta(x,x)\Delta(x,x_1) + 3\Delta(x,x)\cancel{(\Delta\cdot J)(x)}^{\to 0}\cancel{(\Delta\cdot J)(x_1)}^{\to 0} +$$

$$+ 3\Delta(x,x_1)\cancel{(\Delta\cdot J)^2(x)}^{\to 0} + (\Delta\cdot J)^3(x)\cancel{(\Delta\cdot J)(x_1)}^{\to 0}\Big]e^{\frac{1}{2}J\cdot\Delta\cdot J}\Big|_{J=0} =$$

$$= -\frac{\lambda}{2}\int d^dx\, \Delta(x,x)\Delta(x,x_1)$$