

de onde fica claro que a lógica por trás do Teorema de Wick (conectar os pontos externos de todas as formas possíveis) aqui é implementada pela regra do produto da derivada.

Passemos para o caso com interação, considerando agora a teoria  $\lambda\phi^3$ :

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{3!} \phi^3 \quad (\text{note que só queremos ver como saem as regras de Feynman, esta teoria é problemática pois o potencial não tem mínimo global, e energias infinitamente negativas são permitidas})$$

Em ordem  $\lambda$ , temos:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_1[J] &= - \int d^d x V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} = - \int d^d x \frac{\lambda}{3!} \left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^3 e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} = \\ &= - \frac{\lambda}{3!} \int d^d x \left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^2 \left[ (\Delta \cdot J)(x) e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \right] = - \frac{\lambda}{3!} \int d^d x \left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) \left[ \Delta(x, x) + (\Delta \cdot J)^2(x) \right] e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} = \\ &= - \frac{\lambda}{3!} \int d^d x \left[ \Delta(x, x) (\Delta \cdot J)(x) + \Delta(x, x) (\Delta \cdot J)(x) + (\Delta \cdot J)(x) \Delta(x, x) + (\Delta \cdot J)^3(x) \right] e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} = \\ &= - \frac{\lambda}{3!} \int d^d x \left[ 3 \Delta(x, x) (\Delta \cdot J)(x) + (\Delta \cdot J)^3(x) \right] e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \quad (\text{eq. 45.1}) \end{aligned}$$

Note que este funcional gerador agora tem sempre potências ímpares de  $J$ , de forma que as funções de  $n$  pontos serão nulas para  $n$  par:

$$G_{2k}^{(1)}(x_1, \dots, x_{2k}) = 0 \quad (\text{eq. 45.2})$$

A função de 1 ponto é dada por:

$$\begin{aligned} G_1^{(1)}(x_1) &= \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \mathbb{Z}_1[J] \Big|_{J=0} = - \frac{\lambda}{3!} \int d^d x \left[ 3 \Delta(x, x) \Delta(x, x_1) + 3 \Delta(x, x) (\Delta \cdot J)(x) (\Delta \cdot J)(x_1) + \right. \\ &\quad \left. + 3 \Delta(x, x_1) (\Delta \cdot J)(x) + (\Delta \cdot J)^3(x) (\Delta \cdot J)(x_1) \right] e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \Big|_{J=0} = \\ &= - \frac{\lambda}{2} \int d^d x \Delta(x, x) \Delta(x, x_1) \end{aligned}$$

cujo diagrama é:

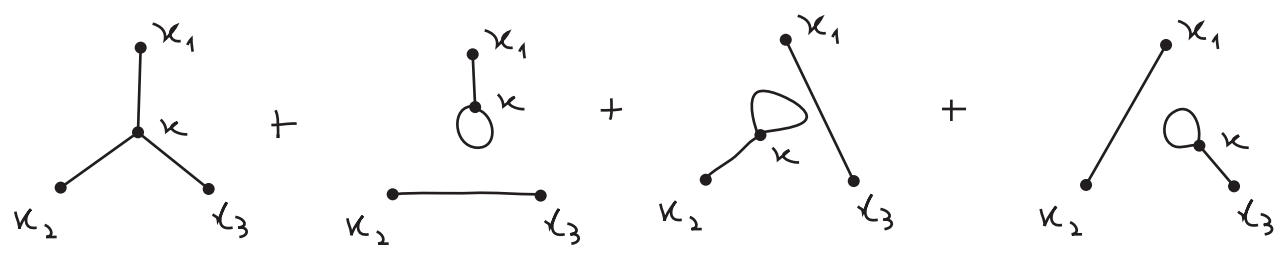


A função de 2 pontos dá zero (cheque!) e a função de 3 pontos é:

$$G_3^{(1)}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \frac{\delta}{\delta J(x_3)} Z_1[J] \Big|_{J=0} =$$

$$= -\lambda \int d^d x \left\{ \Delta(x, x_1) \Delta(x, x_2) \Delta(x, x_3) + \frac{1}{2} \Delta(x, x) [\Delta(x, x_1) \Delta(x, x_3) + \Delta(x, x_2) \Delta(x, x_3) + \Delta(x, x_3) \Delta(x, x_2)] \right\}$$

que em diagramas fica:



Podemos obter as bolhas no vácuo calculando diretamente a função de 0 pontos, dada pelo próprio funcional gerador (pois fazemos zero derivadas), que em segunda ordem de perturbação é:

$$Z_2[J] = + \frac{1}{2!} \int d^d x \frac{\lambda}{3!} \left( \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^3 \int d^d y \frac{\lambda}{3!} \left( \frac{\delta}{\delta J(y)} \right)^3 e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J}$$

ao invés de fazer a regra da cadeia, posso pensar esta exponencial em termos de sua expansão. Como temos 6 derivadas em J e no fim faremos J=0, somente o termo com 6 J's vai sobreviver

$$Z_2[J=0] = \frac{1}{2!} \int d^d x \frac{\lambda}{3!} \left( \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^3 \int d^d y \frac{\lambda}{3!} \left( \frac{\delta}{\delta J(y)} \right)^3 \left\{ \frac{1}{3!} \left( \frac{1}{2} \right)^3 \int d^3 z_1 d^3 z_2 d^3 z_3 d^3 z'_1 d^3 z'_2 d^3 z'_3 \times \right.$$

$$\left. \times J(z_1) \Delta(z_1, z'_1) J(z_2) J(z_3) \Delta(z_2, z'_2) J(z_2) J(z_3) \Delta(z_3, z'_3) J(z_3) \right\} \Big|_{J=0}$$

exercício

$$Z_2[J=0] = \frac{\lambda^2}{2^3} \int d^d x d^d y \Delta(x, x) \Delta(x, y) \Delta(y, y) + \frac{\lambda^2}{2 \cdot 3!} \int d^d x d^d y \Delta^3(x, y)$$

em termos de diagramas (note que os fatores de simetria também já saíram certos):



### Regras de Feynman no espaço das posições

Primeiramente vamos re-escrever o teorema de Wick em um formato mais útil para obter as regras de Feynman:

$$Z[J] = e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi_a} \cdot \Delta \cdot \frac{\delta}{\delta \phi_a}} \left\{ e^{-\int d^4x V(\phi_a) + J \cdot \phi_a} \right\} \Big|_{\phi_a=0} = \text{EXP} \left[ \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \Delta(x-y) \frac{\delta}{\delta \phi_a(x)} \frac{\delta}{\delta \phi_a(y)} \right] \left\{ e^{-\int d^4x V(\phi_a) + J \cdot \phi_a} \right\} \Big|_{\phi_a=0} \quad (\text{eq. 47.1})$$

... ..

$$\text{eq. 95.2} \rightarrow Z[J] = e^{-\int d^4x V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)} \left\{ e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} \right\}$$

não ficaremos carregando esta notação, mas perceba que este campo que fazemos ir a zero é o campo clássico, e:  
 $J \rightarrow 0 \Leftrightarrow \phi_{cl} = 0$   
 (não provamos isso para o campo, mas é análogo às pgs. 21 e 22)

### \\ Demonstração //

Essencialmente queremos provar que, dadas duas funções de múltiplas variáveis (mesmo número para ambas):

$$F(x) = F(x_1, \dots, x_n) \quad G(y) = G(y_1, \dots, y_n)$$

$$\Rightarrow F\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) G(x) = G\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \left[ F(y) e^{x \cdot y} \right]_{y=0} \quad (\text{Lemma de Coleman}) \quad (\text{eq. 47.2})$$

PROVA: podemos considerar a série de Fourier de F e G e aí basta provar o Lemma acima para

$$F(x) = e^{a \cdot x} \quad G(y) = e^{b \cdot y} \quad \left( a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots \right)^m e^{b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + \dots} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} e^{b \cdot x} &= b_i e^{b \cdot x} \\ \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^n e^{b \cdot x} &= (b_i)^n e^{b \cdot x} \end{aligned} \right.$$

$$F\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) G(x) = e^{a \cdot \frac{\partial}{\partial x}} e^{b \cdot x} = \sum_m \frac{1}{m!} \left(a \cdot \frac{\partial}{\partial x}\right)^m e^{b \cdot x} = \sum_m \frac{1}{m!} (a \cdot b)^m e^{b \cdot x} = e^{b \cdot (a+x)} = e^{a \cdot b} \quad \checkmark \text{OK!}$$

$$G\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \left[ F(y) e^{x \cdot y} \right]_{y=0} = e^{b \cdot \frac{\partial}{\partial y}} \left[ e^{a \cdot y} e^{x \cdot y} \right]_{y=0} = e^{b \cdot (a+x)} \left[ e^{a \cdot y} e^{x \cdot y} \right]_{y=0} = e^{b \cdot (a+x)}$$

$$\begin{array}{l} \text{vetor} \\ \mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow \mathcal{J}(x) \\ \text{vetor} \\ \mathcal{Y} = \{y_1, \dots, y_n\} \rightarrow \phi(x) \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{vetor} \\ \mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow \mathcal{J}(x) \\ \text{vetor} \\ \mathcal{Y} = \{y_1, \dots, y_n\} \rightarrow \phi(x) \end{array}} \right\} \text{estamos generalizando de um conjunto discreto de variáveis para um contínuo}$$

$$\hookrightarrow \boxed{F\left[\frac{\delta}{\delta \mathcal{J}}\right] G[\mathcal{J}] = G\left[\frac{\delta}{\delta \phi}\right] \left[ F[\phi] e^{\mathcal{J} \cdot \phi} \right]_{\phi=0}} \quad (\text{eq. 48.1})$$

Logo, partindo do teorema de Wick na forma anterior:

$$Z[\mathcal{J}] = \underbrace{e^{-\int d^4x V\left(\frac{\delta}{\delta \mathcal{J}(x)}\right)}}_{F\left[\frac{\delta}{\delta \mathcal{J}}\right]} \underbrace{\left\{ e^{\frac{1}{2} \mathcal{J} \cdot \Delta \cdot \mathcal{J}} \right\}}_{G[\mathcal{J}]} = \underbrace{e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi} \cdot \Delta \cdot \frac{\delta}{\delta \phi}}}_{G\left[\frac{\delta}{\delta \phi}\right]} \underbrace{\left\{ e^{-\int d^4x V(\phi)} e^{\mathcal{J} \cdot \phi} \right\}}_{\left[ F[\phi] e^{\mathcal{J} \cdot \phi} \right]_{\phi=0}} \Big|_{\phi=0}$$

que é a eq. 47.1

Podemos então obter as regras de Feynman para um potencial mais geral:

$$V(\phi) = \lambda \phi^p$$

$$\begin{aligned} G_n(x_1, \dots, x_n) &= \frac{\delta^n Z[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}(x_1) \dots \delta \mathcal{J}(x_n)} \Big|_{\mathcal{J}=0} = \\ &= \frac{\delta^n}{\delta \mathcal{J}(x_1) \dots \delta \mathcal{J}(x_n)} \left\{ e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi} \cdot \Delta \cdot \frac{\delta}{\delta \phi}} \left[ e^{-\int d^4x V(\phi) + \mathcal{J} \cdot \phi} \right]_{\phi=0} \right\} \Big|_{\mathcal{J}=0} = \\ &= e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi} \cdot \Delta \cdot \frac{\delta}{\delta \phi}} \left\{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{-\int d^4x V(\phi) + \mathcal{J} \cdot \phi} \right\} \Big|_{\phi=0, \mathcal{J}=0} \end{aligned}$$

este termo já se tornou obsoleto, pois depois das derivadas em  $\phi$ , qualquer termo que sobrar com  $\mathcal{J}$  multiplicado vai ser nulo (quando  $\mathcal{J}=0$ )

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi} \cdot \Delta \cdot \frac{\delta}{\delta \phi}} \left\{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{-\int d^d x V(\phi)} \right\}_{\phi=0} \quad (\text{eq. 49.1})$$

Em ordem  $N$  de perturbação:

$$G_n^{(N)}(x_1, \dots, x_n) = e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi} \cdot \Delta \cdot \frac{\delta}{\delta \phi}} \left\{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \frac{(-\lambda)^N}{N!} \int d^d y_1 \dots d^d y_N \phi^P(y_1) \dots \phi^P(y_N) \right\}_{\phi=0}$$

estas derivadas vão agir sobre um produto de  $Q$  campos  $\phi$ , onde:

$$Q = n + pN$$

Se aplicarmos mais do que  $Q$  derivadas a função se anula e se aplicamos menos do que  $Q$  derivadas também (pois nesse caso sobram  $\phi$ 's que serão levados a zero). Assim, da expansão da exponencial contendo  $Q$  derivadas temos (e note  $Q$  deve ser obrigatoriamente par pois temos duas derivadas na exponencial):

$$(Q = 2q = n + pN)$$

$$G_n^{(N)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{q! 2^q} \int d^d z_1 d^d w_1 \dots d^d z_q d^d w_q \frac{\delta}{\delta \phi(z_1)} \Delta(z_1 - w_1) \frac{\delta}{\delta \phi(w_1)} \dots \frac{\delta}{\delta \phi(z_q)} \Delta(z_q - w_q) \frac{\delta}{\delta \phi(w_q)} \times$$

$$\times \left\{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \frac{(-\lambda)^N}{N!} \int d^d y_1 \dots d^d y_N \phi^P(y_1) \dots \phi^P(y_N) \right\}_{\phi=0}$$

(eq. 49.2)

Temos que agir com estas derivadas sobre todos os campos. Note que, quando aplicamos o par

$$\int d^d z_i d^d w_i \frac{\delta}{\delta \phi(z_i)} \Delta(z_i - w_i) \frac{\delta}{\delta \phi(w_i)}$$

sobre um par qualquer:  $\phi(x) \phi(y)$

$$\text{obtemos: } \int d^d z_i d^d w_i \left[ \delta^d(x - z_i) \delta^d(y - w_i) \Delta(z_i - w_i) + \delta^d(y - z_i) \delta^d(x - w_i) \Delta(z_i - w_i) \right] =$$

$$= 2 \Delta(x - y)$$

como temos  $q$  fatores de 2 deste tipo, o  $2^q$  em 49.2 é cancelado

O  $q!$  é cancelado pelo fato de termos  $q!$  formas de agir as  $2q$  derivadas nos  $2q$  campos (e pelo fato das coordenadas nas derivadas serem variáveis mudas de integração). Notem que novamente o que está acontecendo é que estamos conectando pontos externos e vértices de todas as formas possíveis.

Mesmo depois de levar em conta as repetições que cancelam  $q! 2^q$  ainda sobram muitos termos iguais: o fato de ainda termos  $N$  variáveis de integração mudas cancela o  $N!$  advindo da expansão da exponencial com a interação e o fato de cada termo de interação conter  $p$  campos calculados no mesmo ponto introduz um  $(p!)^N$  que cancelamos redefinindo:

$$\lambda = \frac{\lambda_p}{p!}$$

Sabemos (do formalismo canônico), que o cancelamento deste  $N!(p!)^N$  não é exato, dependendo de detalhes das contrações escolhidas. Assim como antes definimos um fator de simetria:

$$S = \frac{N! (p!)^N}{(\# \text{ de diagramas equivalentes})}$$

Este fator pode ser maior que 1 se tivermos menos diagramas equivalentes do que inocentemente se esperaria. Para ver como isto aparece aqui, considere o caso  $n = 0, p = 2, N = 2 (Q = 4, q = 2)$ :

$$A = \frac{1}{2!2^2} \int d^4z_i d^4w_i d^4z_j d^4w_j d^4x d^4y \frac{\delta}{\delta\phi(z_i)} \Delta(z_i - w_i) \frac{\delta}{\delta\phi(w_i)} \frac{\delta}{\delta\phi(z_j)} \Delta(z_j - w_j) \frac{\delta}{\delta\phi(w_j)} \phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)$$

↪ (não confundir o cancelamento destes com o de  $N!$  e  $p!^N$ )

de onde podemos extrair todos os termos que contribuem para:



Inocentemente teríamos  $2!$  advindo das integrais em  $x$  e  $y$  e  $(2!)^2$  advindo do fato de termos dois campos em  $x$  e dois em  $y$ , para um total de 8 termos iguais. Mas veja:

$$A = \frac{1}{8} \int d^4z_i d^4w_i d^4z_j d^4w_j d^4x d^4y \Delta(z_i - w_i) \Delta(z_j - w_j) \frac{\delta}{\delta\phi(z_i)} \frac{\delta}{\delta\phi(w_i)} \frac{\delta}{\delta\phi(z_j)} \times$$

$$\left\{ 2 \delta(x - w_j) \phi(x) \phi(y) \phi(y) + 2 \delta(y - w_j) \phi(x) \phi(x) \phi(y) \right\} =$$

ignoro os termos em que  $\frac{\delta}{\delta\phi(z_j)}$  age em no mesmo campo em que agiu  $\frac{\delta}{\delta\phi(w_j)}$  pois este contribuem para  $\left( \begin{matrix} \circ & \circ \\ x & y \end{matrix} \right)$

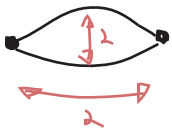
$$= \frac{1}{2} \int \dots \Delta \Delta \cdot \frac{\delta}{\delta\phi(z_i)} \frac{\delta}{\delta\phi(w_i)} \left\{ 2 \delta(x - w_j) \delta(z_j - y) \phi(x) \phi(y) + 2 \delta(y - w_j) \delta(z_j - x) \phi(x) \phi(y) \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \dots \Delta \Delta \cdot \frac{\delta}{\delta\phi(z_i)} \times$$

$$x \left\{ \delta(x - w_j) \delta(z_j - y) \left[ \delta(x - w_i) \phi(y) + \delta(y - w_i) \phi(x) \right] + \delta(y - w_j) \delta(z_j - x) \left[ \delta(w_i - x) \phi(y) + \delta(w_i - y) \phi(x) \right] \right\} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int \dots \int \Delta \Delta \left\{ \delta(x-w_j) \delta(y_j-y) \delta(x-w_i) \delta(y-z_i) + \delta(x-w_j) \delta(y_j-y) \delta(y-w_i) \delta(x-z_i) + \right. \\
 &\quad \left. + \delta(y-w_j) \delta(y_j-x) \delta(w_i-x) \delta(y-z_i) + \delta(y-w_j) \delta(y_j-x) \delta(w_i-y) \delta(z_i-x) \right\} = \\
 &= \frac{1}{2} \int d^d x d^d y \ 4 \Delta^2(x-y) = 2 \int d^d x d^d y \ \Delta^2(x-y)
 \end{aligned}$$

O que é 4 vezes menos termos iguais do que esperávamos. O fator de simetria aqui é 4. De fato:



Vemos que estamos obtendo as mesmas regras do formalismo canônico (só que no espaço Euclidiano):

- (1) para cada propagador:  $x_1 \text{ --- } x_2 = \Delta(x_1 - x_2)$
- (2) para cada vértice:  $\begin{matrix} \text{p linhas} \\ \nearrow \\ \bullet \\ \searrow \\ \delta \end{matrix} = (-i\lambda_p) \int d^d y$
- (3) para cada ponto externo:  $x_1 \text{ --- } = 1$
- (4) divida tudo pelo fator de simetria

(eq. 51.1)

### Regras de Feynman no espaço dos momentos

Conforme visto na pgs 39-40:

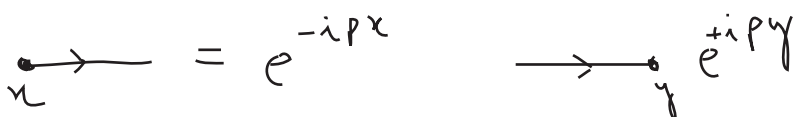
$$\tilde{G}(p_1, \dots, p_n) = (2\pi)^d \delta^d(p_1 + \dots + p_n) G(p_1, \dots, p_n)$$

↙ satisfazem conserv. de momento

O propagador Euclidiano é (eq. 41.2):

$$\Delta(y-x) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{e^{ip(y-x)}}{p^2 + m^2} \quad \therefore \quad \Delta(p) = \frac{1}{p^2 + m^2} \quad (\text{eq. 51.2})$$

E adotamos novamente a convenção para direção de momento:



### Regras de Feynman para uma teoria Bosônica em geral

Suponha agora uma teoria mais geral composta de um número arbitrário de campos bosônicos (veremos adiante que a quantização de campos fermiônicos é mais complicada), que agruparemos usando um índice  $r$ :

$$\phi_r \quad \text{EX: } \phi = \{ \phi_1, \phi_2, \phi_3 = A_0, \phi_4 = A_1, \phi_5 = A_2, \phi_6 = A_3 \} = \{ \phi, \phi_2, A_\mu \}$$

Com a ação livre dada por:

$$S_0 = \frac{1}{2} \int d^d x \sum_{r,s} \phi_r(x) \Delta_{r,s}^{-1} \phi_s(x)$$

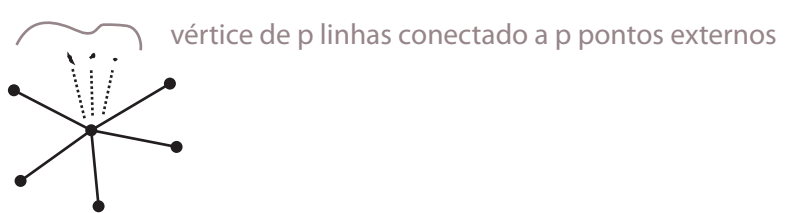
$$\text{EX: } \Delta^{-1} = \begin{pmatrix} -\partial_\mu \partial^\mu + m_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\partial_\mu \partial^\mu + m_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & (g_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu)_{4 \times 4} \end{pmatrix}$$

Este operador deve ser invertido para podermos encontrar os propagadores. Quando ele não é invertível, em geral existem problemas na definição dos campos. Vamos assumir que conseguimos resolver estes problema e encontrar uma base apropriada, aonde ele pode ser invertido (mais tarde veremos um exemplo específico, o campo do fóton). A interação também pode ser escrita em um forma genérica:

$$S_{r_1, \dots, r_p} = \int d^d z \underbrace{A_{r_1, \dots, r_p}}_{\substack{\text{pode conter constantes (acoplamentos) ou operadores} \\ \text{diferenciais agindo em um ou mais campos (o que torna isso} \\ \text{bem mais geral que } \phi^n)}} \underbrace{\phi_{r_1}(z) \dots \phi_{r_p}(z)}_{\text{não há soma subentendida!}}$$

Interação envolvendo  $p$  campos ( $r_i$  e  $r_j$  são genéricos, não necessariamente iguais nem diferentes)

Independentemente da forma de  $A_{\{r_i\}}$ , esta interação colocará  $p$  campos agindo no mesmo ponto, o que leva a um vértice com  $p$  linhas saindo. A forma mais simples de ver a regra para o vértice é considerar a função com  $p$  pontos externos, especificamente o diagrama abaixo:





Podemos então seguir o raciocínio usado para passar de 49.1 para 49.2. A generalização de 49.1, agora que temos vários campos, é:

$$G_n(\{x_1, \dots, x_n\}) = e^{\frac{1}{2} \sum_{\pi, s} \frac{\delta}{\delta \phi_\pi} \Delta_{\pi s} \frac{\delta}{\delta \phi_s}} \left\{ \phi_{\pi_1}(x_1) \dots \phi_{\pi_n}(x_n) e^{-\int d^d z A_{\pi_1 \dots \pi_p} \phi_{\pi_1} \dots \phi_{\pi_p}} \right\}_{\phi=0}$$

→ a função depende das coordenadas dos pontos externos mas também de qual campo age ali

Especializando para o caso com apenas um vértice (N = 1) e número (e tipo) de pontos externos iguais aos da interação temos (n = p):

$$G_p^{(1)}(\{x_1, \dots, x_p\}) = e^{\frac{1}{2} \sum_{\pi, s} \frac{\delta}{\delta \phi_\pi} \Delta_{\pi s} \frac{\delta}{\delta \phi_s}} \left\{ \phi_{\pi_1}(x_1) \dots \phi_{\pi_p}(x_p) (-) \int d^d z A_{\pi_1 \dots \pi_p} \phi_{\pi_1} \dots \phi_{\pi_p} \right\}_{\phi=0}$$

→ o produto escalar tem integrais:  $\int d^d z_1 d^d z_2 \frac{\delta}{\delta \phi(z_1)} \frac{\delta}{\delta \phi(z_2)}$

Agora basta lembrar que a exponencial com as derivadas deve ser expandida e o único termo que sobrevive é aquele que tem o número (e tipo) de derivadas que coincide com o que está dentro das chaves. O efeito destas chaves vai ser conectar pontos externos e internos de todas as formas possíveis, mas só estamos interessados no diagrama acima, onde cada ponto externo é conectado ao vértice. Neste caso cada par de derivadas vai produzir um propagador, assim como vimos na página 49, mas pode haver uma outra contribuição, dependendo de A. O resultado será da forma:

$$G_p^{(1)}(\{x_1, \dots, x_p\}) = \int d^d y_1 \dots d^d y_p \Delta_{\pi s}(x_1 - y_1) \dots \Delta_{\pi s}(x_p - y_p) \times$$

$$\times (-) \frac{\delta}{\delta \phi_{\pi_1}(y_1)} \dots \frac{\delta}{\delta \phi_{\pi_p}(y_p)} A_{\pi_1 \dots \pi_p}$$

estou ignorando estes índices que seriam fixados por deltas de Kronecker, assim como as deltas de Dirac fixam as coordenadas

→ Isso é o que chamamos de "regra do vértice" e no caso de teorias  $\lambda \phi^p$ , obtemos (veja pag 49)

$$\int d^d z \lambda \delta(y_1 - z) \dots \delta(y_p - z)$$

Mas para uma teoria mais geral pode ser mais complicado. Passando para o espaço dos momentos temos:

$p$  linhas

$$= - \int d^d x_1 \dots d^d x_p e^{i(k_1 x_1 + \dots + k_p x_p)} \frac{\delta}{\delta \phi_{\pi_1}(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta \phi_{\pi_p}(x_p)} S_{\pi_1 \dots \pi_p}$$

(eq. 54.1)

Um exemplo trivial seria:

$$S_{\mathbb{I}} = \frac{\lambda_4}{4!} \int d^d x \phi^4(x)$$

$$\times = - \int d^d x_1 \dots d^d x_4 e^{i(k_1 x_1 + \dots + k_4 x_4)} \frac{\delta}{\delta \phi(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta \phi(x_4)} \left[ \frac{\lambda_4}{4!} \int d^d x \phi^4(x) \right] =$$

$$= \frac{\lambda_4}{3!} \int d^d x \frac{\delta}{\delta \phi(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta \phi(x_4)} \phi^3(x) \delta^d(x-x_1) = \frac{\lambda_4}{2!} \int d^d x \frac{\delta}{\delta \phi(x_1)} \frac{\delta}{\delta \phi(x_2)} \phi^2(x) \delta^d(x-x_1) \delta^d(x-x_2) = \dots$$

$$= - \int d^d x_1 \dots d^d x_4 d^d x e^{i(k_1 x_1 + \dots + k_4 x_4)} \lambda_4 \delta^d(x-x_1) \delta^d(x-x_2) \delta^d(x-x_3) \delta^d(x-x_4) =$$

$$= - \lambda_4 \int d^d x e^{i x(k_1 + \dots + k_4)} = - (2\pi)^d \delta^d(k_1 + \dots + k_4) \lambda_4$$

## Quantização de um campo fermiônico

(Nastase 12 e 13; Peskin 3.1-3.4 [campo clássico], 3.5 [quant. canônica], 9.5 [quant. funcional]; Ryder 6.7; Ramond 5.2-5.3)

Comecemos definindo um spinor. Vimos (pg 2) que é possível construir uma representação do grupo de Lorentz tal que:

$$\Psi'(x') = M_D(\Lambda) \Psi(x)$$

(eq. 54.2)

$$M_D(\Lambda) = e^{-\frac{i}{2} \Theta_{\mu\nu} S^{\mu\nu}}$$

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

matrizes de Dirac

As matrizes de Dirac satisfazem a álgebra de Clifford:

(eq. 54.3)

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2 \eta^{\mu\nu} \hat{1} \quad (\text{eq. 54.4})$$

E as matrizes  $S^{\mu\nu}$  satisfazem a álgebra de Lorentz: