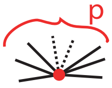
p linhas



$$= -\int d^dx_1 \ldots d^dx_p \, e^{i(k_1x_1+\ldots+k_px_p)} \frac{\delta}{\delta\phi_{\pi_1}(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta\phi_{\pi_p}(x_p)} S_{\pi_1\ldots\pi_p}$$

(eq. 54.1)

Um exemplo trivial seria:

$$S_I = \frac{\lambda_4}{4!}\int d^dx\, \phi^4(x)$$

$$= -\int d^dx_1 \ldots d^dx_4 \; e^{i(k_1x_1+\ldots+k_4x_4)} \frac{\delta}{\delta\phi(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta\phi(x_4)} \left[\frac{\lambda_4}{4!}\int d^dx\, \phi^4(x) \right] =$$

$$\bullet = \frac{\lambda_4}{3!}\int d^dx \frac{\delta}{\delta\phi(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta\phi(x_3)} \phi^3(x)\, \delta^d(x-x_4) = \frac{\lambda_4}{2!}\int d^dx \frac{\delta}{\delta\phi(x_1)} \frac{\delta}{\delta\phi(x_2)} \phi^2(x)\, \delta^d(x-x_4)\, \delta^d(x-x_3) = \ldots$$

$$= -\int d^dx_1 \ldots d^dx_4 \, d^dx \, e^{i(k_1x_1+\ldots+k_4x_4)} \lambda_4 \, \delta^d(x-x_1)\,\delta^d(x-x_2)\,\delta^d(x-x_3)\,\delta^d(x-x_4) =$$

$$= -\lambda_4 \int d^dx \, e^{ix(k_1+\ldots+k_4)} = -(2\pi)^d \delta^d(k_1+\ldots+k_4)\,\lambda_4$$

Quantização de um campo fermiônico

(Nastase 12 e 13; Peskin 3.1-3.4 [campo clássico], 3.5 [quant. canônica], 9.5 [quant. funcional]; Ryder 6.7; Ramond 5.2-5.3)

Comecemos definindo um spinor. Vimos (pg 2) que é possível construir uma representação do grupo de Lorentz tal que:

$$\boxed{\psi'(x') = M_D(\Lambda)\,\psi(x)}$$

(eq. 54.2)

$$\boxed{\begin{array}{l} M_D(\Lambda) = e^{-\frac{i}{2}\theta_{\mu\nu}S^{\mu\nu}} \\ S^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \end{array}}$$

matrizes de Dirac

(eq. 54.3)

As matrizes de Dirac satisfazem a álgebra de Clifford:

$$\boxed{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\hat{1}}$$

(eq. 54.4)

E as matrizes $S^{\mu\nu}$ satizfazem a álgebra de Lorentz:

$$\boxed{[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i\left[g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho}\right]}$$ (eq. 55.1)

Todas as expressões acima valem para um número arbitrário de dimensões e qualquer métrica (Minkowski ou Euclideana), o que vai mudar é a forma das matrizes de Dirac. Por exemplo, em três dimensões euclideanas conseguimos satisfazer 54.4 com:

$$\gamma^j = \sigma^j \quad \leftarrow \text{Pauli}$$

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^i\sigma^j = \delta^{ij} + i\epsilon^{ijk}\sigma^k$$

$$\{\gamma^i, \gamma^j\} = \sigma^i\sigma^j + \sigma^j\sigma^i = 2\delta^{ij} + \cancel{i\epsilon^{ijk}\sigma^k} + \cancel{i\epsilon^{jik}\sigma^k} = 2\delta^{ij}$$

e neste caso: $$\boxed{S^{ij} = \frac{i}{4}\underbrace{[\gamma^i, \gamma^j]}_{[\sigma^i,\sigma^j]} = -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\sigma^k}$$ (eq. 55.2)

Note que isto é a rotação em 3D de um spin 1/2

a representação que vai nos interessar é dada por:

$$\boxed{\gamma^0 = -i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \underbrace{1}_{1_{2\times2}} & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^i = -i\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}}$$ (eq. 55.3)

Representação Quiral ou de Weyl

$$\boxed{\begin{aligned} (\gamma^0)^\dagger &= -\gamma^0 \\ (\gamma^i)^\dagger &= \gamma^i \end{aligned}}$$ (eq. 55.4)

E podemos definir 4-vetores, para as matrizes 2x2: $$\boxed{\begin{aligned} \sigma^\mu &= (1, \sigma^i) \\ \bar{\sigma}^\mu &= (1, -\sigma^i) \end{aligned}}$$ (eq. 55.5)

De forma a re-escrever 55.3 na forma compacta: $$\boxed{\gamma^\mu = -i\begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}}$$ (eq. 55.6)

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -\begin{pmatrix} \sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu \end{pmatrix}$$

o "i" garante a assinatura da métrica (veja abaixo)

totalmente convencional (e dif. do Peskin)

$$\left.\begin{matrix}\{\mu=0,\nu=i\} \\ \text{ou} \\ \{\nu=0,\mu=i\}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad -\begin{pmatrix} -\sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix} = 0$$

$$\mu=0,\ \nu=0 \Rightarrow \quad -\begin{pmatrix} 1_{2\times2} & 0 \\ 0 & 1_{2\times2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1_{2\times2} & 0 \\ 0 & 1_{2\times2} \end{pmatrix} = -2\,\hat{1}_{4\times4}$$

$$\mu=i,\ \nu=j \Rightarrow -\begin{pmatrix} -\sigma^i\sigma^j & 0 \\ 0 & -\sigma^i\sigma^j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\sigma^j\sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^j\sigma^i \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \{\sigma^i,\sigma^j\} & 0 \\ 0 & \{\sigma^i,\sigma^j\} \end{pmatrix} = 2\delta^{ij}\,\hat{1}_{4\times4}$$

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\,\hat{1}_{4\times4} \qquad g^{\mu\nu} = \mathrm{Diag}\{-1,1,1,1\}$$ (Minkowski 4D)

Também nos interessa definir

$$\boxed{\gamma_5 = -i\,\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3} \quad \text{(eq. 56.1)}$$

que, nesta representação (usando eq. 55.6), é: $\gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (que de fato é o objetivo desta rep. Outra rep. popular é a em que γ^0 é diagonal ao invés de γ^5 - cuidado ao comparar livros)

O gerador $S^{\mu\nu}$ agora é um objeto mais complicado (que deve conter rotações e boosts), note que a parte puramente espacial contém as rotações 3D e:

$$\boxed{S^{ij} = \frac{i}{4}[\gamma^i,\gamma^j] = -\frac{i}{4}\begin{pmatrix} -[\sigma^i,\sigma^j] & 0 \\ 0 & -[\sigma^i,\sigma^j] \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}} \quad \text{(eq. 56.2)}$$

Note que isto é o mesmo que temos em 55.2, repetido 2 vezes (se eu aplicar isto num objeto de quatro componentes, as duas "de cima" rodam como um spin 1/2 e as duas "de baixo" também, independentemente)

O próximo passo consiste em construir invariantes de Lorentz com o campo ψ. Infelizmente a primeira opção que vem a mente:

$$\psi^\dagger\psi \to \psi^\dagger \underbrace{M_D^\dagger(\Lambda)M_D(\Lambda)}\psi \neq \psi^\dagger\psi$$

M não é unitária pois alguns elementos de S não são hermiteanos (os boosts)

no entanto não é difícil obter um invariante, definindo:

$$\boxed{\bar{\psi} = \psi^\dagger \underbrace{i\gamma^0}} \quad \text{(eq. 56.3)}$$

cuidado aqui, a convenção mais comum nos livros é (com larga margem de vantagem): $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$

de forma que:

$$= \psi^\dagger i\gamma^0\psi \to \psi^\dagger i\underbrace{M_D^\dagger(\Lambda)\gamma^0}_{=\gamma^0 M_D^{-1}(\Lambda)} M_D(\psi) = \bar{\psi}\psi$$

(veja Peskin, pg 43)

Também podemos provar que: $\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi \to \Lambda^{\nu}{}_{\mu}\,\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$

E que, portanto, a contração dele com um vetor qualquer é invariante: $V_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi \to V_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$

Outros invariantes podem ser obtidos como potências destes no entanto, se quisermos uma teoria renormalizável, somente aceitamos os termos com dois ψ (como veremos mais adiante)

Com isto podemos construir uma ação:

$$\boxed{S_{\psi} = -\int d^4x\, \bar{\psi}(\gamma^{\mu}\partial_{\mu} + m)\psi} \qquad \text{(eq. 57.1)}$$

$$\boxed{\not{\partial} = \gamma^{\mu}\partial_{\mu}}$$

Cuja solução clássica é dada pela equação de Dirac:

$$\boxed{(\not{\partial} + m)\psi = 0} \qquad \text{(eq. 57.2)}$$

basta fazer a variação em relação a $\bar{\psi}$, também podemos obter a equação conjugada, para $\bar{\psi}$, variando ψ.

Soluções (Clássicas) da Equação de Dirac

(uma rápida revisão para fixar notação e convenções, veja detalhes nas notas de TQC I de 2015: http://www.ift.unesp.br/users/matheus/files/courses/2015tqc1/tudo.pdf , pgs 108 a 117)

As soluções de 57.2 também são soluções da equação de Klein-Gordon. As soluções de frequência positiva e negativa são respectivamente:

$$\psi(x) = u(p)\, e^{ipx} \qquad \boxed{u^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{-p\cdot\sigma}\,\xi^s \\ \sqrt{-p\cdot\bar{\sigma}}\,\xi^s \end{pmatrix}} \qquad \text{(eq. 57.3)}$$

$$\xi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \xi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\psi(x) = v(p)\, e^{-ipx} \qquad \boxed{v^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{-p\cdot\sigma}\,\eta^s \\ -\sqrt{-p\cdot\bar{\sigma}}\,\eta^s \end{pmatrix}} \qquad \text{(eq. 57.4)}$$

$$\eta^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \eta^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

onde p é dado pela relação de dispersão relativística: $p^2 + m^2 = 0 \qquad p^0 > 0$

com solução geral:

$$\boxed{\begin{aligned} \psi(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\sum_s \left(a^s_{\vec{p}}\, u^s(p)\, e^{ipx} + b^{s\dagger}_{\vec{p}}\, v^s(p)\, e^{-ipx} \right) \\ \bar{\psi}(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\sum_s \left(b^s_{\vec{p}}\, \bar{v}^s(p)\, e^{ipx} + a^{s\dagger}_{\vec{p}}\, \bar{u}^s(p)\, e^{-ipx} \right) \end{aligned}} \qquad \text{(eq. 57.5)}$$

Quantização (canônica) do campo de Dirac

Sabemos (olhando as transformações sobre rotação em 3D) que este campo descreve partículas de spin 1/2, e que portanto devem obedecer estatística de Fermi. Em termos da quantização canônica isso significa que devemos usar anticomutadores ao invés de comutadores para fazer a quantização

$$\{\psi_\alpha(\vec{x},t), \psi^\dagger_\beta(\vec{y},t)\} = \delta^3(\vec{x}-\vec{y})\delta_{\alpha\beta}$$

$$\{\psi_\alpha(\vec{x},t), \psi_\beta(\vec{y},t)\} = \{\psi^\dagger_\alpha(\vec{x},t), \psi^\dagger_\beta(\vec{y},t)\} = 0$$

o que implica:

$$\{a^r_{\vec{p}}, a^{\dagger s}_{\vec{q}}\} = \{b^r_{\vec{p}}, b^{\dagger s}_{\vec{q}}\} = (2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{q})\delta^{rs}$$

(qualquer outra combinação = 0)

o que leva à usual interpretação de operadores de criação e aniquilação e à contrução de um espaço de Fock:

$$a^s_{\vec{p}}|0\rangle = b^s_{\vec{p}}|0\rangle = 0$$

$$|\vec{p},s\rangle_a = \sqrt{2E_p}\, a^{s\dagger}_p|0\rangle$$

$$|\vec{p},s\rangle_b = \sqrt{2E_p}\, b^{s\dagger}_p|0\rangle$$

Aqui, no entanto, temos o relação spin-estatística certa para férmions:

$$(a^{s\dagger}_p)^2 = (b^{s\dagger}_p)^2 = 0 \qquad\qquad |\vec{p},s;\vec{k},s\rangle = -|\vec{k},s;\vec{p},s\rangle$$

A integral de trajetória fermiônica

Precisamos então pensar em como transportar esta anti-comutação de forma consistente para o formalismo de integral de trajetória. O problema é que neste formalismo, trocamos os operadores por funções, que comutam entre si.

Podemos pensar, que no caso bôsonico, as funções são obtidas a partir dos operadores no limite:

$$[a, a^\dagger] = \hbar \to 0$$

Então agora, deveríamos obter

$$\{a, a^\dagger\} = \hbar \to 0$$

que não são as funções ou números usuais, pois anticomutam (seguem a chamada Álgebra de Grassmann). Podemos dividir o conjunto destes Números de Grassmann em dois:

Parte ímpar da álgebra: $a\,,\, a^\dagger$: $\{a, a^\dagger\} = \{a, a\} = \{a^\dagger, a^\dagger\} = 0$

Parte par da álgebra: $a a^\dagger$: $[a a^\dagger, a a^\dagger] = 0$

De forma que o produto de duas funções fermiônicas (ímpar) vai ser bosônica (par)

(e é fácil ver que [par . par = par] e [ímpar . par = ímpar])

Números de Grassmann, definições e propriedades

Precisamos de funções definindas em um espaço de números complexos que anti-comutem, o que já havia sido proposto antes por Grassmann. Os números de Grassmann satisfazem a seguinte propriedade:

$$\boxed{\{\theta,\eta\} = \theta\eta + \eta\theta = 0}$$

O que tem diversas consequências:

$$\boxed{\theta^2 = 0} \quad \text{(eq. 59.1)}$$

elemento "par" da álgebra (commutative-number)

elemento "ímpar" (anticommutative-number)

um par de números de Grassmann se comporta como um c-number

$$\eta_1\eta_2\eta_3 = -\eta_1\eta_3\eta_2 = \eta_3\eta_1\eta_2$$

$$f(\theta,\eta) = a_0 + a_1\theta + a_2\eta + a_3\theta\eta + a_4\theta^2\eta + a_5\theta\eta^2$$

se a função tiver paridade definida ela é a-number ou c-number

assim, se $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$ então $a_0 = a_3 = 0$ ou $a_1 = a_2 = 0$ (ou então os próprios a's devem ser Grassmann)

Na maior parte do segue, vamos assumir coeficientes pares, o que significa que estamos tomando a álgebra de Grassmann finita, o que quer dizer que, no exemplo abaixo, não há outros ímpares além de θ, η e ρ para aparecer nos coeficientes:

$$f(\theta,\eta,\rho) = a_0 + a_1\theta + a_2\eta + a_3\rho + a_4\theta\eta + a_5\theta\rho + a_6\eta\rho + a_7\theta\eta\rho$$

e considerando funções mais gerais (sem paridade, ou supernumbers)

Há uma ambiguidade na definição de derivada (temos que decidir se ela age pela direita ou esquerda):

$$\frac{\partial^L}{\partial\theta} f(\theta,\eta) = a_1 + a_3\eta \qquad \frac{\partial^R}{\partial\theta} f(\theta,\eta) = a_1 - a_3\eta$$

$$\frac{\partial^L}{\partial\eta} f(\theta,\eta) = a_2 - a_3\theta \qquad \frac{\partial^R}{\partial\eta} f(\theta,\eta) = a_2 + a_3\theta$$

Definiremos: $\boxed{\dfrac{\partial}{\partial\eta} = \dfrac{\partial^L}{\partial\eta}}$ (quando for necessário usar a derivada pela direita indicaremos isto explicitamente)

$$\eta\frac{\partial f}{\partial\eta} = a_2\eta - a_3\eta\theta = \underbrace{a_2\eta + a_3\theta\eta}_{f}$$

$$\eta f = a_0\eta + a_1\eta\theta \Rightarrow \frac{\partial}{\partial\eta}(\eta f) = \underbrace{a_0 + a_1\theta}_{f}$$

$$\left(\eta\frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{\partial}{\partial\eta}\eta\right) f = f$$

A consequência é que a regra do produto também fica modificada:

$$\frac{\partial}{\partial\eta}(\eta f) = f - \eta\frac{\partial f}{\partial\eta}$$

$$\boxed{\left\{\eta_i , \frac{\partial}{\partial \eta_j}\right\} = \delta_{ij}} \quad \text{(eq. 60.1)} \qquad \boxed{\left\{\frac{\partial}{\partial \eta} , \frac{\partial}{\partial \theta}\right\} = 0} \quad \text{(eq. 60.2)}$$

E num caso mais geral:

$$\frac{\partial}{\partial \eta_j}\left(\eta_1 \eta_2 \eta_3 \cdots \eta_n\right) = \delta_{1j}\, \eta_2 \eta_3 \cdots \eta_n - \delta_{2j}\, \eta_1 \eta_3 \cdots \eta_n + \delta_{3j}\, \eta_1 \eta_2 \eta_4 \cdots \eta_n - \cdots$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_k} e^{\sum \theta_i \eta_i} = \eta_k \underbrace{e^{\sum \theta_i \eta_i}}_{\text{PAR}} \qquad \frac{\partial}{\partial \eta_k} e^{\sum \theta_i \eta_i} = -\theta_k\, e^{\sum \theta_i \eta_i}$$

$$a = \sum \theta_i \eta_i$$

$$e^a = 1 + \sum \theta_i \eta_i + \frac{1}{2!}\left(\sum \theta_i \eta_i\right)\left(\sum \theta_j \eta_j\right) + \ldots = 1 + \sum \theta_i \eta_i + \frac{1}{2!}\left(\sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \theta_i \eta_i \theta_j \eta_j\right) + \frac{1}{3!}\left(\sum_{\substack{i,j,k \\ i\neq j,\, j\neq k \\ i\neq k}} \theta_i \eta_i \theta_j \eta_j \theta_k \eta_k\right) =$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta_\ell} e^a = 0 - \theta_\ell + \frac{1}{2!}\left[\sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}}\left(-\theta_i \delta_{i\ell}\theta_j \eta_j - \theta_i \eta_i \theta_j \delta_{\ell j}\right)\right] + \ldots = -\theta_\ell - \theta_\ell \sum_i \theta_i \eta_i - \theta_\ell \frac{1}{2!}\sum_{\substack{i,j \\ j>i}} \theta_i \eta_i \theta_j \eta_j$$

$$= -\theta_\ell\left(1 + \sum_i \theta_i \eta_i + \frac{1}{2!}\sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \theta_i \eta_i \theta_j \eta_j + \ldots\right) = -\theta_\ell\, e^a \;//$$

Para definir integrais é natural assumir que os infinitesimais de Grassmann também anti-comutam:

$$\{\theta, d\eta\} = 0$$

$$\{d\theta, d\eta\} = 0$$

que resolve outra ambiguidade de sinal (se fizemos primeiro a integral de fora o sinal fica invertido)

$$\int d\theta\, d\eta\, f(\theta,\eta) \equiv \int d\theta\left[\int d\eta\, f(\theta,\eta)\right]$$

Considere a integral de uma função de apenas um número de Grassman, queremos que esta integral tenha a propriedade de ser invariante por translações nesta variável:

$$\theta \to \theta + \eta \Rightarrow \underbrace{\int d\theta\, f(\theta)}_{F(\theta)} = \underbrace{\int d\theta\, f(\theta+\eta)}_{F(\theta+\eta)}$$

série $\qquad A + B\theta = A + B(\theta+\eta) \qquad$ série

$$\forall \eta \Rightarrow B = 0$$

A deve ser par, então $\int d\theta\, f(\theta)$ também deve ser par

$$\int d\theta\, f(\theta) = \int d\theta\,(a_1 + a_2\theta) = \int a_1\, d\theta + \int d\theta\, a_2\theta$$

$$\left(\int d\theta\, a_1\right)^2 = \int d\theta \int d\eta\; a_1^2 = \int d\theta\, d\eta\; a_1^2 = -\int d\eta\, d\theta\; a_1^2 = -\left(\int d\theta\, a_1^2\right)^2 = 0$$

$\int d\theta\, a_1$ é ímpar ou zero, para satisfazer a condição acima: $\int d\theta\, a_1 = a_1 \int d\theta \rightarrow \boxed{\int d\theta = 0}$

(eq. 61.1)

$\int d\theta\, a_2\theta$ deve ser par, e tomaremos: $\int d\theta\, a_2\theta = a_2 \int d\theta\, \theta$

& $\boxed{\int d\theta\, \theta = 1}$ (eq. 61.2)

$$\int d\theta\, f(\theta,\eta) = \int d\theta \left(a_0 + a_1\theta + a_2\eta + a_3\theta\eta\right) = a_1 + a_3\eta = \frac{\partial}{\partial\theta} f(\theta,\eta)$$

o que pode ser mostrado em geral, ou seja a integração e a diferenciação tem o mesmo efeito.

A função delta também pode ser definida, usando uma função η: $g(\eta)$

$$g(\eta) = a + b\eta$$

queremos:

$$\underbrace{\int d\eta\, \delta(\eta-\rho)\, g(\eta)} = g(\rho) = a + b\rho$$

$$\int d\eta\, \delta(\eta-\rho)[a + b\eta] = a\underbrace{\int d\eta\, \delta(\eta-\rho)}_{1} + b\underbrace{\int d\eta\, \delta(\eta-\rho)\,\eta}_{\rho}$$

O que é obtido com: $\boxed{\delta(\eta-\rho) = \eta - \rho}$ (eq. 61.3)

$$\int d\eta\, (\eta-\rho) = \underbrace{\int d\eta\, \eta}_{1} - \underbrace{\int d\eta\, \rho}_{0} \qquad \int d\eta\, (\eta-\rho)\,\eta = \underbrace{\int d\eta\, \eta\,\eta}_{0} - \underbrace{\int d\eta\, \rho\,\eta}_{\rho}$$

$(-)$

A mudança de variáveis multiplicativa (por um número complexo) na integração também parece mais com uma mudança em derivadas:

$$\int dx\, x = 1 \qquad y = ax \qquad \int dy\, y = 1 = a\int dy\, x \qquad \boxed{dy = \frac{1}{a}\, dx}$$

(eq. 61.4)

Para números de Grassmann complexos:

$$(\theta\eta)^* \equiv \eta^*\theta^* = -\theta^*\eta^* \qquad \left\{ \int d\eta = \int d\eta^* = 0 \quad \& \quad \int d\eta\,\eta = \int d\eta^*\eta^* = 1 \right\}$$

$$e^{-\eta^*\eta} = 1 - \eta^*\eta$$

$$\int d\eta^* d\eta\, e^{-\eta^* b \eta} = \int d\eta^* d\eta\,(1-\eta^* b\eta) = \int d\eta^* d\eta\,(1+\eta\eta^* b) = b$$

$$\boxed{\int d\eta^* d\eta\, e^{-\eta^* b\eta} = b}$$ (eq. 62.1)

$$\int d\eta^* d\eta\, \eta\eta^*\, e^{-\eta^* b\eta} = \int d\eta^* d\eta\, \eta\eta^*(1-\eta^* b\eta) = 1$$

$$\boxed{\int d\eta^* d\eta\, \eta\eta^*\, e^{-\eta^* b\eta} = \frac{1}{b}\cdot b}$$ (eq. 62.2)

$$\int d\eta^* d\eta\,\eta\eta^*\, e^{-\eta^* b\eta} = \frac{d}{db}\int d\eta^* d\eta\, e^{-\eta^* b\eta}$$

Isto é análogo ao que teríamos obtido para integral gaussiana de váriáveis complexas:

$$\boxed{\int \frac{dz^*}{(2\pi i)^{1/2}}\frac{dz}{(2\pi i)^{1/2}}\, e^{-z^* \cdot b z} = \frac{1}{b}}$$ (eq. 62.3)

$$\boxed{\int \frac{dz^*}{(2\pi i)^{1/2}}\frac{dz}{(2\pi i)^{1/2}}\, z^* z\, e^{-z^* \cdot b z} = \frac{1}{b}\cdot\frac{1}{b}}$$ (eq. 62.4)

$$-\frac{d}{db}\int \frac{dz^* dz}{\cdots}\, e^{-z^* b z} = \cdots$$

Exercício: provar 62.3 e 62.4

Suponha um caso bidimensional:

$$\eta = \begin{pmatrix}\eta_1 \\ \eta_2\end{pmatrix} \qquad \bar{\eta} = \begin{pmatrix}\eta_1^* & \eta_2^*\end{pmatrix}$$

$$(\bar\eta\eta)^2 = (\eta_1^*\eta_1 + \eta_2^*\eta_2)^2 = \eta_1^*\eta_1\eta_2^*\eta_2 + \eta_2^*\eta_2\eta_1^*\eta_1 = 2\eta_1^*\eta_1\eta_2^*\eta_2$$

$$e^{-\bar\eta\eta} = 1 - \eta_1^*\eta_1 + \eta_2^*\eta_2 + \eta_1^*\eta_1\eta_2^*\eta_2$$

$$d\bar\eta\, d\eta \equiv d\eta_1^*\, d\eta_1\, d\eta_2^*\, d\eta_2$$