Para números de Grassmann complexos:

$$(\theta\eta)^* = \eta^*\theta^* = -\theta^*\eta^* \quad \left\{ \int d\eta = \int d\eta^* = 0 \quad \& \quad \int d\eta\,\eta = \int d\eta^*\eta^* = 1 \right\}$$

$$e^{-\eta^*\eta} = 1 - \eta^*\eta$$

$$\int d\eta^* d\eta\, e^{-\eta^* b\eta} = \int d\eta^* d\eta\,(1 - \eta^* b\eta) = \int d\eta^* d\eta\,(1 + \eta\eta^* b) = b$$

$$\boxed{\int d\eta^* d\eta\, e^{-\eta^* b\eta} = b}$$

(eq. 62.1)

$$\int d\eta^* d\eta\, \eta\eta^*\, e^{-\eta^* b\eta} = \int d\eta^* d\eta\, \eta\eta^*(1 - \eta^* b\eta) = 1$$

$$\boxed{\int d\eta^* d\eta\, \eta\eta^*\, e^{-\eta^* b\eta} = \frac{1}{b}\cdot b}$$

(eq. 62.2)

$$\int d\eta^* d\eta\, \eta\eta^*\, e^{-\eta^* b\eta} = \frac{d}{db}\int d\eta^* d\eta\, e^{-\eta^* b\eta}$$

Isto é análogo ao que teríamos obtido para integral gaussiana de váriáveis complexas:

$$\boxed{\int \frac{dz^*}{(2\pi i)^{1/2}}\frac{dz}{(2\pi i)^{1/2}}\, e^{-z^*\cdot bz} = \frac{1}{b}}$$

(eq. 62.3)

$$\boxed{\int \frac{dz^*}{(2\pi i)^{1/2}}\frac{dz}{(2\pi i)^{1/2}}\, z^* z\, e^{-z^*\cdot bz} = \frac{1}{b}\cdot\frac{1}{b}}$$

(eq. 62.4)

$$-\frac{d}{db}\int dz^* dz\, e^{-z^* b z} = \ldots$$

Exercício: provar 62.3 e 62.4

Suponha um caso bidimensional:

$$\eta = \begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix} \qquad \bar\eta = \begin{pmatrix}\eta_1^* & \eta_2^*\end{pmatrix}$$

$$(\bar\eta\eta)^2 = (\eta_1^*\eta_1 + \eta_2^*\eta_2)^2 = \eta_1^*\eta_1\eta_2^*\eta_2 + \eta_2^*\eta_2\eta_1^*\eta_1 = 2\eta_1^*\eta_1\eta_2^*\eta_2$$

$$e^{-\bar\eta\eta} = 1 - \eta_1^*\eta_1 + \eta_2^*\eta_2 + \eta_1^*\eta_1\eta_2^*\eta_2$$

$$d\bar\eta\, d\eta \equiv d\eta_1^*\, d\eta_1\, d\eta_2^*\, d\eta_2$$

$$\int d\bar{\eta}\, d\eta\, e^{-\bar{\eta}\eta} = \int d\eta_1^*\, d\eta_1\, d\eta_2^*\, d\eta_2\, \eta_1^*\eta_1\eta_2^*\eta_2 = 1$$

$$\boxed{\int d\bar{\eta}\, d\eta\, e^{-\bar{\eta}\eta} = 1}$$ (eq. 63.1)

Fazendo uma mudança de variáveis,obtemos:

$$\eta = M\alpha \qquad M, N \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$
$$\bar{\eta} = \bar{\alpha} N$$

$$\eta_1\eta_2 = (M_{11}\alpha_1 + M_{12}\alpha_2)(M_{21}\alpha_1 + M_{22}\alpha_2) =$$
$$= (M_{11}M_{22} + M_{12}M_{21})\alpha_1\alpha_2 = \mathrm{DET}[M]\,\alpha_1\alpha_2$$

Então, se queremos que: $\int d\eta_1\, d\eta_2\, \eta_1\eta_2 = \int d\alpha_1\, d\alpha_2\, \alpha_1\alpha_2$

temos que exigir: $d\eta_1\, d\eta_2 = (\mathrm{DET}[M])^{-1}\, d\alpha_1\, d\alpha_2$

(como já tínhamos visto na mudança de uma variável)

da mesma forma: $d\eta_1^*\, d\eta_2^* = (\mathrm{DET}[N])^{-1}\, d\alpha_1^*\, d\alpha_2^*$

então:

$$1 = \int d\eta_1^*\, d\eta_1\, d\eta_2^*\, d\eta_2\, e^{-\bar{\eta}\eta} = -\int \frac{d\alpha_1^*\, d\alpha_2^*}{\mathrm{DET}[N]}\, \frac{d\alpha_1\, d\alpha_2}{\mathrm{DET}[M]}\, e^{-\bar{\alpha}NM\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{DET}[\underbrace{NM}_{A}]} \int d\alpha_1^*\, d\alpha_1\, d\alpha_2^*\, d\alpha_2\, e^{-\bar{\alpha}\overbrace{NM}^{A}\alpha}$$

$$\boxed{\int d^n\bar{\alpha}\, d^n\alpha\, e^{-\bar{\alpha}\cdot A\alpha} = \mathrm{DET}[A]}$$ (eq. 63.2)

Provamos isso para 2D, mas a mesma coisa poderia ter sido feita para mais dimensões.

compare com: $\int \frac{d^n z^*}{(2\pi i)^{n/2}} \frac{d^n z}{(2\pi i)^{n/2}}\, e^{-\vec{z}^*\cdot A\vec{z}} = (\mathrm{DET}\, A)^{-1}$

Usando derivadas em a, podemos também mostrar que:

$$\boxed{\int d^n\bar{\alpha}\, d^n\alpha\, \alpha_i \bar{\alpha}_j\, e^{-\bar{\alpha}\cdot A\alpha} = (A^{-1})_{ij} \, \mathrm{Det}[A]}$$ (eq. 64.1)

Podemos definir uma “função de Grassmann” (que é ímpar, para cada valor x, fornece um a-number) como:

$$\psi(x) = \sum_i \underbrace{\psi_i}_{\text{coeficientes são números de Grassmann}} \underbrace{\phi_i(x)}_{\{\phi_i\} \text{ base de funções usuais } (\phi_i \in \mathbb{C})}$$

E generalizar as integrais funcionais Gaussianas para funções deste tipo:

$$\boxed{\int D\bar{\psi}\, D\psi\, e^{-\bar{\psi}\cdot A\psi} = \mathrm{Det}[A]}$$ (eq. 64.2)

O Oscilador Harmônico Fermiônico

O operador hamiltoniano de um oscilador harmônico quantizado como um férmion, antes de dispensarmos a energia do vácuo, é:

$$\hat{H}_F = \omega\left(\hat{b}^+\hat{b} - \frac{1}{2}\right) \qquad \{\hat{b}, \hat{b}^+\} = 1$$

Consideremos, assim como no caso bosônico, o estado coerente:

$$|\beta\rangle = e^{\hat{b}^+\beta}|0\rangle = (1+\hat{b}^+\beta)|0\rangle = (1-\beta\hat{b}^+)|0\rangle$$

$$\hat{b}|\beta\rangle = (\underbrace{\cancel{\hat{b}}}_{0} + \beta\underbrace{\hat{b}\hat{b}^+}_{1-\hat{b}^+\hat{b}})|0\rangle = \beta|0\rangle = \overbrace{\beta(1-\beta\hat{b}^+)}^{\beta^2=0}|0\rangle = \beta|\beta\rangle$$

$$\underbrace{(1-\beta\hat{b}^+)|0\rangle}_{|\beta\rangle}$$

Temos a relação de completeza:

$$\hat{1} = \int d\beta^* d\beta\, |\beta\rangle\langle\beta^*|\, e^{-\beta^*\beta}$$

E o hamiltoniano na presença de fontes (oscilador forçado) será escrito como:

$$H(b^+, b; t) = \omega\, b^+ b - b^+\eta(t) - \bar{\eta}(t)\, b$$

Queremos calcular a amplitude de transição:

$$F(\beta^*, t'; \beta, t) = \langle \beta^*, t' | \beta, t \rangle$$

para a qual seguimos os mesmos passos de sempre para encontrar a integral funcional:

$$F(\beta^*, t'; \beta, t) = \int \mathcal{D}\beta^* \mathcal{D}\beta \, \exp\left\{ i \int_t^{t'} d\tau \left[-i\dot{\beta}^*(\tau)\beta(\tau) - H(\beta, \beta^*, t) \right] + \beta^*(t)\beta(t) \right\}$$

As equações de Hamilton na presença de fontes são:

$$\boxed{\begin{aligned} &\dot{\beta}^*(\tau) - i\omega\beta^*(\tau) + i\bar{\eta}(\tau) = 0 \\ &\dot{\beta}(\tau) + i\omega\beta(\tau) - i\eta(\tau) = 0 \end{aligned}} \qquad \text{(eq. 65.1)} \qquad \begin{aligned} \beta(t) &= \beta \\ \beta^*(t') &= \beta^* \end{aligned}$$

Com soluções:

$$\boxed{\begin{aligned} \beta_{cl}(\tau) &= \beta \, e^{i\omega(t-\tau)} + i\int_t^{\tau} e^{i\omega(s-\tau)}\eta(s)\, ds \\ \beta^*_{cl}(\tau) &= \beta^* \, e^{i\omega(\tau - t')} + i\int_{\tau}^{t'} e^{i\omega(\tau - s)}\bar{\eta}(s)\, ds \end{aligned}} \qquad \text{(eq. 65.2)}$$

Que podemos projetar no vácuo fazendo: $\left\{ \begin{aligned} &\beta = \beta^* = 0 \\ &t \to -\infty \\ &t' \to +\infty \end{aligned} \right.$

E neste caso (exercício, mas a dedução prossegue de maneira análoga ao caso bosônico - pg 26):

$$\boxed{Z[\eta, \bar{\eta}] = F(0, \infty; 0, -\infty) = \langle 0 | 0 \rangle \exp\left\{ -\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{\tau}^{+\infty} ds \, e^{i\omega(t-s)} \bar{\eta}(s)\eta(s) \right\}} \qquad \text{(eq. 65.3)}$$

Generalizando para o caso de um campo (em 0+1 dim), teríamos:

$\beta \to \psi \qquad \beta^* \to \bar{\psi}$

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \, \exp\left\{ i \int dt \left[\underbrace{-i\, \partial_t \bar{\psi}\, \psi}_{i\bar{\psi}\partial_t \psi} - \omega\bar{\psi}\psi + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi \right] \right\} =$$

$$= \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \, \exp\left\{ i \int dt \left[\bar{\psi}(i\partial_t - \omega)\psi + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi \right] \right\} =$$

$$D_F^{-1} = -i(i\partial_t - \omega)$$

$$= \int \mathcal{D}\bar\psi\,\mathcal{D}\psi \exp\left\{ \int dt \left[-\bar\psi D_F^{-1} \psi \right] + i \int dt \left[\bar\psi \eta + \bar\eta \psi \right] \right\}$$

$$\therefore \boxed{Z[\eta,\bar\eta] = Z[0,0] \exp\left\{ - \int ds\, d\tau\, \bar\eta(s) D_F(s,\tau) \eta(\tau) \right\}}$$
(eq. 66.1)

$$\boxed{D_F(s,\tau) = \left[-i\left(i\partial_t - \omega \right) \right]^{-1} = i \int \frac{dE}{2\pi} \frac{e^{-iE(s-\tau)}}{E-\omega+i\epsilon} = \Theta(s-\tau)\, e^{-i\omega(s-\tau)}}$$
(eq. 66.2)

Note que: (1) Temos apenas um polo, em $E = \omega - i\epsilon$

(2) Isso significa que se fizemos a integral no hemisfério superior ($Im\,E > 0$) ela dá zero, e somos forçados a fazer isso se ($s < \tau$), portanto a integral é zero para ($s < \tau$). No outro hemisfério (obrigatório se $s > \tau$) pegamos o polo e obtemos o resultado não nulo acima.

$$-iE(s-\tau) \sim Im(E)(s-\tau)$$

(3) Basta substituir a última expressão em 66.1 para obter 65.2 (incluindo o limite de integração, que impõe $s > \tau$)

Passando para o espaço Euclideano: $t = -it_E$

$$Z_E[\eta,\bar\eta] = \int \mathcal{D}\bar\psi\,\mathcal{D}\psi\, \mathrm{Exp}\left\{ \int dt_E\, \bar\psi_E \left(-\partial_{t_E} - \omega \right) \psi_E + \int dt_E\, \bar\psi_E \eta_E + \bar\eta_E \psi_E \right\}$$

suprimindo o "E"

$$= Z[0,0] \,\mathrm{Exp}\left\{ \int d\tau\, ds\, \bar\eta(s) D(s,\tau) \eta(\tau) \right\}$$

$$\boxed{-S_E = -\bar\psi \cdot D^{-1} \psi + \bar\psi \cdot \eta + \bar\eta \cdot \psi}$$
(eq. 66.3)

$$\boxed{D[s,\tau] = \left(\partial_t + \omega \right)^{-1} = i \int \frac{dE}{2\pi} \frac{e^{-iE(s-\tau)}}{E + i\omega}}$$
(eq. 66.4)

E rodando de volta para Minkowski com $E_E = (-i + \epsilon) E$ (para evitar o polo), voltamos ao propagador em 66.2

Agora basta aumentar o número de coordenadas espaciais para obter uma teoria de campo. A lagrangeana (em Mink.) é:

$$\mathcal{L}_F^{(M)} = -\bar\psi \left(\partial\!\!\!/ + m \right) \psi$$

Passando para o Euclideano:

$$\mathcal{L}_F^{(E)} = \bar{\psi}(\not{\partial}+m)\psi$$

Tomando o cuidado de manter a álgebra de Clifford funcionando: $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$

$$(\gamma^0)^2 = -1 \Rightarrow (\gamma^4)^2 = +1$$

$$\boxed{\gamma^4 = i\gamma^0}$$

$$\rightarrow \bar{\psi} = \psi^+ i\gamma^0 = \psi^+\gamma^4$$

E, nesta representação: $\gamma_\mu = \gamma^\mu = (\gamma^\mu)^+$

A função de partição obtida é:

$$\boxed{Z_F^{(0)}[\bar{\eta},\eta] = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp\left\{-\int d^4x\, \bar{\psi}(\not{\partial}+m)\psi + \int d^4x(\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)\right\}} =$$

(eq. 67.1)

$$= Z(0,0)\, e^{\bar{\eta}(\not{\partial}+m)^{-1}\eta}$$

Atenção para o índice Espinorial:

$$\int d^4x\, \bar{\eta}\psi = \int d^4x\, \bar{\eta}_\alpha(x)\psi_\alpha(x) \qquad \alpha = 1,2,3,4$$

$$\bar{\eta}(\not{\partial}+m)^{-1}\eta = \int d^4x\, d^4y\, \bar{\eta}_\alpha(x)\,(\not{\partial}+m)^{-1}_{\alpha\beta}\,\eta_\beta(y)$$

$$\boxed{S_F(x,y) = (\not{\partial}_x+m)^{-1} = i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{ip\cdot(x-y)}}{-\not{p}+im}}$$

(eq. 67.2)

$$(\not{\partial}_x+m)S_F(x,y) = \delta^4(x-y) \quad \therefore$$

$$\not{\partial}_x e^{ipx} = i\not{p}\, e^{ipx}$$

Usaremos com frequência a seguinte relação: $\dfrac{1}{-\not{p}+im} = \dfrac{-\not{p}-im}{p^2+m^2}$ $= \dfrac{-\not{p}_{\alpha\beta} - im\,\mathbb{1}_{\alpha\beta}}{p^2+m^2}$

$$\not{p}\not{p} = \gamma^\mu p_\mu \gamma^\nu p_\nu = 2g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu - \underbrace{\gamma^\nu\gamma^\mu p_\mu p_\nu}_{\gamma^\mu\gamma^\nu p_\nu p_\mu} \Rightarrow 2p^2 = 2\not{p}\not{p}$$

$$\boxed{\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}}$$

Voltando para Minkwoski, obtemos:

$$S_F^{(E)}(x,y) = i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{ip\cdot(x-y)}}{-\not{p}+im} = i\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{-\not{p}-im}{p^2+m^2}e^{ip\cdot(x-y)}$$

$$t_E = i t \qquad p_E^0 = (-i + \epsilon) p^0 \qquad p_E^2 + m^2 = p^2 + m^2 - i\epsilon$$

$$\not{p}^E = \gamma^4 p_E^0 + \gamma^i p_i = i\gamma^0 (-i + \epsilon) p^0 + \gamma^i p_i = \gamma^0 p^0 + \gamma^i p_i + i\gamma^0 \epsilon'$$

$$S_F^{(M)}(x,y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{i[p^0(x^0-y^0) + p^i(x^i-y^i)]} \frac{-\gamma^0 p^0 - \gamma^i p_i - im}{p^2 + m^2 - i\epsilon} =$$

$$\overset{p_i \to -p_i}{=} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ip(x-y)} \frac{-\not{p} - im}{p^2 + m^2 - i\epsilon}$$

Teorema de Wick para Campos Fermiônicos

Como um exemplo, consideremos uma teoria com um escalar ϕ (com fonte J) e um férmion ψ, interagindo por meio de um termo $S_I[\bar{\psi}, \psi, \phi]$, neste caso poderíamos escrever:

$$\boxed{Z[\bar{\eta}, \eta, J] = e^{-S_I\left[-\frac{\delta}{\delta\eta}, \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}}, \frac{\delta}{\delta J}\right]} Z_F^{(0)}[\bar{\eta}, \eta]\, Z_\phi^{(0)}[J]} \qquad \text{(eq. 68.1)}$$

que é obtida seguindo exatamente o mesmo procedimento usado na pag 42. A única diferença está no termo $-\frac{\delta}{\delta\eta}$ que tem este sinal pois o termo de fonte tem a forma: $\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta$

Logo: $\psi\, e^{\int d^4x\, \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta} = -\frac{\delta}{\delta\eta} e^{\int d^4x\, \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta}$

O lema de Coleman (eq. 47.2) também ganha um sinal pelo mesmo motivo:

$$\boxed{F\left(-\frac{\delta}{\delta\eta}, \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}}\right) Z[\bar{\eta}, \eta] = Z\left[-\frac{\delta}{\delta\psi}, \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}}\right]\left(F(\bar{\psi}, \psi)\, e^{\bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi}\right)\Big|_{\bar{\psi} = \psi = 0}} \qquad \text{(eq. 68.2)}$$

$$Z[\bar{\eta}, \eta, J] = e^{-S_I\left(-\frac{\delta}{\delta\eta}, \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}}, \frac{\delta}{\delta J}\right)} e^{\bar{\eta} S_F \eta} Z_\phi^{(0)}[J] =$$

(eq. 68.3)

$$\boxed{\begin{aligned} &= e^{-\frac{\delta}{\delta\psi} S_F \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}}} e^{-S_I\left(\bar{\psi}, \psi, \frac{\delta}{\delta J}\right) + \bar{\psi}\cdot\eta + \bar{\eta}\cdot\psi} Z_\phi^{(0)}[J] \Big|_{\psi = \bar{\psi} = J = 0} = \\ &= e^{-\frac{\delta}{\delta\psi} S_F \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}}} e^{\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\phi}\cdot\Delta\cdot\frac{\delta}{\delta\phi}} \left\{ e^{-S_I(\bar{\psi}, \psi, \phi) + \bar{\psi}\cdot\eta + \bar{\eta}\cdot\psi + J\cdot\phi} \right\}_{\psi = \bar{\psi} = \phi = 0} \end{aligned}}$$