

Regras de Feynman para Férmions (Interação de Yukawa)

$$\mathcal{L}_Y = g \bar{\Psi} \Psi \phi$$

$$Z[\bar{\eta}, \eta, J] = e^{-\frac{\delta}{\delta \Psi} S_F \frac{\delta}{\delta \bar{\Psi}}} e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi} \Delta \frac{\delta}{\delta \phi}} \left\{ e^{-g \int d^4x \bar{\Psi} \Psi \phi + \bar{\Psi} \cdot \eta + \bar{\eta} \cdot \Psi + J \cdot \phi} \right\}_{\Psi = \bar{\Psi} = \phi = 0}$$

Começamos com a função de dois pontos livre (onde os dois pontos são aplicações do campo fermiônico):

$G_{(n,m)}^{(N)}$
 ↳ ordem na expansão perturbativa
 ↳ numero de pontos externos bosônicos
 ↳ numero de pontos externos fermiônicos

$$G_{(2,0)}^{(0)} = \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle = \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} \left(-\frac{\delta}{\delta \eta(y)} \right) Z_0(\bar{\eta}, \eta, J) \Big|_{\eta = \bar{\eta} = J = 0}$$

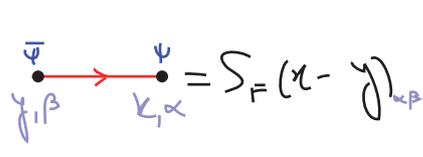
note que, trivialmente, temos $\langle 0 | \psi \psi | 0 \rangle = \langle 0 | \bar{\psi} \bar{\psi} | 0 \rangle = 0$

$$Z_0[\bar{\eta}, \eta, J] = e^{-\frac{\delta}{\delta \Psi} S_F \frac{\delta}{\delta \bar{\Psi}}} e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi} \Delta \frac{\delta}{\delta \phi}} \left\{ e^{-g \int d^4x \bar{\Psi} \Psi \phi + \bar{\Psi} \cdot \eta + \bar{\eta} \cdot \Psi + J \cdot \phi} \right\}_{\Psi = \bar{\Psi} = \phi = 0}$$

↳ Só estou interessado na parte que contribui para $G_{(2,0)}^{(0)}$ ou seja com $\eta \cdot \bar{\eta}$

$$= -\frac{\delta}{\delta \Psi} S_F \frac{\delta}{\delta \bar{\Psi}} e^{\bar{\Psi} \cdot \eta + \bar{\eta} \cdot \Psi} = \bar{\eta} \cdot S_F \cdot \eta \Big|_{\bar{\Psi} = \Psi = 0} = \bar{\eta} \cdot S_F \cdot \eta$$

$$G_{(2,0)}^{(0)} = \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} \left(-\frac{\delta}{\delta \eta(y)} \right) \bar{\eta} \cdot S_F \cdot \eta = \int d^4z_1 d^4z_2 \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} \bar{\eta}(z_1) S_F(z_1 - z_2) \delta_{\beta\gamma} \frac{\delta}{\delta \eta(y)} \eta(z_2)_{\beta} = S_F(x - y)_{\alpha\beta}$$



$$= S_F(x - y)_{\alpha\beta} = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left(\frac{e^{i p \cdot (x - y)}}{-\not{p} + m} \right)_{\alpha\beta}$$

(eq. 69.1)

Note que agora o sinal do momento (ou a ordem de x e y) importa!

A regra para o vértice vem trivialmente da função de três pontos:

$$G_{(2,1)}^{(1)} = \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} \left(-\frac{\delta}{\delta \eta(y)} \right) \frac{\delta}{\delta J(z)} e^{-\frac{\delta}{\delta \Psi} S_F \frac{\delta}{\delta \bar{\Psi}}} e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi} \Delta \frac{\delta}{\delta \phi}} \left\{ e^{-g \int d^4x \bar{\Psi} \Psi \phi + \bar{\Psi} \cdot \eta + \bar{\eta} \cdot \Psi + J \cdot \phi} \right\}_{\Psi = \bar{\Psi} = \phi = 0}$$

↳ índice espinoriais subentendidos

$$= e^{-\frac{\delta}{\delta\psi} S_F \frac{\delta}{\delta\psi}} e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta\phi} \Delta \frac{\delta}{\delta\phi}} \left\{ \phi(z) \psi(x) \bar{\psi}(y) \underbrace{e^{-g \int d^4w \bar{\psi}(w) \psi(w) \phi(w)}}_{\text{só quero o termo } O(g^1)} \right\} =$$

só quero o termo $O(g^1)$

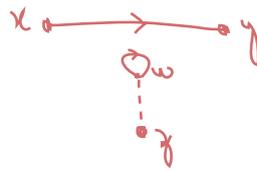
$$= e^{-\frac{\delta}{\delta\psi} S_F \frac{\delta}{\delta\psi}} e^{\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta\phi} \Delta \frac{\delta}{\delta\phi}} (-g) \phi(z) \psi(x) \bar{\psi}(y) \int d^4w \bar{\psi}(w) \psi(w) \phi(w) =$$

índice espinoriais subentendidos

$$= -g \int d^4w \Delta(z-w) \frac{1}{2} \left(-\frac{\delta}{\delta\psi} S_F \frac{\delta}{\delta\psi} \right) \left(-\frac{\delta}{\delta\psi} S_F \frac{\delta}{\delta\psi} \right) \psi(x) \bar{\psi}(y) \bar{\psi}(w) \psi(w) =$$

$$\left(-\frac{\delta}{\delta\psi} S_F \frac{\delta}{\delta\psi} \right) \psi(x) \bar{\psi}(y) \bar{\psi}(w) \psi(w) =$$

$$= \int d^4z_1 d^4z_2 \left(-\frac{\delta}{\delta\psi(z_1)} S_F(z_1 - z_2) \right) \left[-\psi(x) \delta(z_2 - y) \delta_{\alpha\beta} \bar{\psi}(w) \psi(w) + \psi(x) \bar{\psi}(y) \delta(w - z_2) \delta_{\beta\alpha} \psi(w) \right] =$$



Não quero o diagrama de bolha no vácuo:

$$= \int d^4z_1 d^4z_2 \left(-S_F(z_1 - z_2) \right) \left[-\psi(x) \delta(z_2 - y) \bar{\psi}(w) \delta(z_1 - w) \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + \delta(x - z_1) \bar{\psi}(y) \delta(w - z_2) \psi(w) \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} \right] + \text{BOLHAS}$$

$$= +S_F(w - y)_{\beta\alpha} \psi(x) \bar{\psi}(w) - S_F(x - w)_{\alpha\beta} \bar{\psi}(y) \psi(w) + \text{BOLHAS}$$

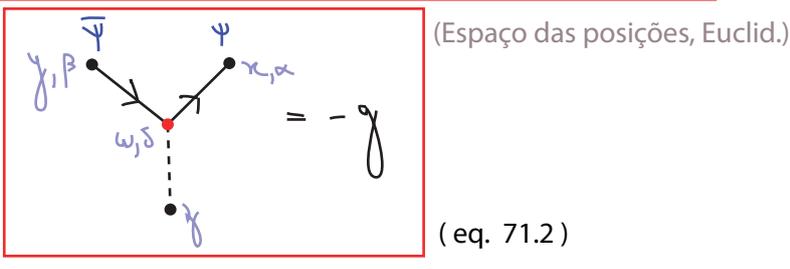
$$= -g \int d^4w \Delta(z-w) \frac{1}{2} \int d^4z_3 d^4z_4 \left(-\frac{\delta}{\delta\psi(z_3)} S_F(z_3 - z_4) \cdot \frac{\delta}{\delta\psi(z_4)} \right) \left[+S_F(w - y) \psi(x) \bar{\psi}(w) - S_F(x - w) \bar{\psi}(y) \psi(w) \right] =$$

$$= -g \int d^4w \Delta(z-w) \frac{1}{2} \int d^4z_3 d^4z_4 \left(-S_F(z_3 - z_4) \right) \left[-S_F(w - y) \psi(x) \delta(w - z_4) - S_F(x - w) \delta(y - z_4) \psi(w) \right] =$$

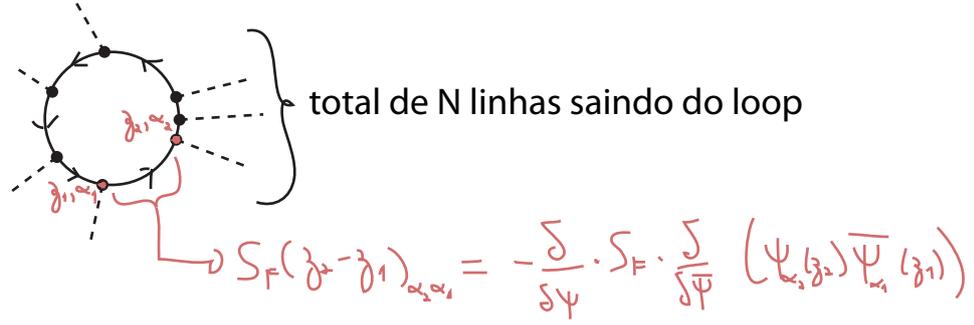
$$= -g \int d^4w \Delta(z-w) \frac{1}{2} \int d^4z_3 d^4z_4 \left(-S_F(z_3 - z_4) \right) \left[-S_F(w - y) \delta(x - z_3) \delta(w - z_4) - S_F(x - w) \delta(y - z_4) \delta(w - z_3) \right] =$$

$$= -g \int d^4w \Delta(z-w) \frac{1}{2} \left[S_F(x - w)_{\alpha\beta} S_F(w - y)_{\beta\alpha} + S_F(w - y)_{\beta\alpha} S_F(x - w)_{\alpha\beta} \right] =$$

$$G_{(A,1)}^{(1)} = -g \int d^4\omega \Delta(\gamma-\omega) S_F(x-\omega) S_F(\omega-\gamma) \quad (\text{eq. 71.1})$$



A importância do ordenamento do campo fermiônico cria uma importante diferença entre um loop fermiônico e um loop bosônico, pense no seguinte diagrama:



Temos vários termos deste tipo:

$$\left(-\frac{\delta}{\delta\psi} \cdot S_F \cdot \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}}\right) \dots \left(-\frac{\delta}{\delta\psi} \cdot S_F \cdot \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}}\right) \left((\bar{\psi}\psi)_{\gamma_1} \dots (\bar{\psi}\psi)_{\gamma_N} \right) \leftrightarrow (\bar{\psi}\psi)_{\gamma_i} = \bar{\psi}(\gamma_i) \psi(\gamma_i)$$

note que estes vêm todos da interação, por isso a ordem $\bar{\psi}\psi$

Para obter a combinação cíclica (já que é um loop):

$$S_F(\gamma_N-\gamma_1)_{\alpha_N\alpha_1} S_F(\gamma_1-\gamma_2)_{\alpha_1\alpha_2} \dots S_F(\gamma_{N-1}-\gamma_N)_{\alpha_{N-1}\alpha_N} = \text{Tr} \left[S_F(\gamma_1-\gamma_2) \dots S_F(\gamma_{N-1}-\gamma_N) \right]$$

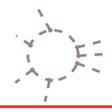
(loops de férmions geram traços)

temos que trazer o último campo para a primeira posição e então aplicar as derivadas:

$$\left((\bar{\psi}\psi)_{\gamma_1} \dots (\bar{\psi}\psi)_{\gamma_N} \right) = -\psi(\gamma_N) (\bar{\psi}\psi)_{\gamma_1} \dots (\bar{\psi}\psi)_{\gamma_{N-1}} \psi_N(\gamma_N)$$

passo por 2N-1 campos

De onde vemos que, além de qualquer sinal que venha dos vértices $(-g)^N$, temos uma regra de Feynman nova, devemos multiplicar por sinal total negativo toda vez que aparecer um loop fermiônico. Você pode checar, por exemplo que o mesmo loop gerado em uma teoria $\lambda\phi^3$ não tem sinal algum além do que vem dos vértices.



Regras de Feynman para interação de Yukawa:

(Espaço das posições, Euclid.)

(eq. 71.3)

Para uma interação geral entre férmions e um número arbitrário de escalares:

$$S_I(\bar{\Psi}, \Psi, \phi_1, \dots, \phi_n)$$

Temos uma expressão semelhante a 54.1, a regra do vértice é dada por:

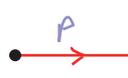
$$\int d^4x d^4y d^4z_1 \dots d^4z_n e^{-i(p \cdot x + p' \cdot y + q_1 \cdot z_1 + \dots + q_n \cdot z_n)} \times$$

$$\times \frac{\delta}{\delta \phi_1(z_1)} \dots \frac{\delta}{\delta \phi_n(z_n)} \left(-\frac{\delta}{\delta \bar{\Psi}(y)} \frac{\delta}{\delta \Psi(x)} \right) \left[-S_I[\bar{\Psi}, \Psi, \phi_1, \dots, \phi_n] \right] \quad (\text{eq. 72.1})$$

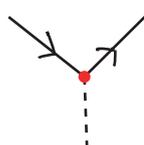
Regras de Feynman no Espaço de Minkowsky:

Basta fazer a rotação de volta na expressão 71.1 (os propagadores já tinham sido deduzidos anteriormente) para mostrar que

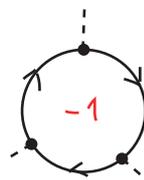
Regras de Feynman para interação de Yukawa (Minkowski):


 $= -i \frac{-i \not{p} + m}{p^2 + m^2 - i\epsilon}$

(direção é importante)


 $= -i g$


 $= \frac{-i}{p^2 + M^2 - i\epsilon}$



-1

(multiplico por -1^L , onde $L = \#$ loops fermiônicos)
(a contração dos índices espinoriais vai produzir um traço)

(Espaço dos momentos, Mink.) (eq. 72.2)

Lembrando que um estado fermiônico pode ser escrito como:

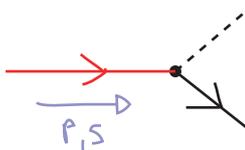
$$|p, s\rangle = \sqrt{2E_p} \alpha_p^{s+} |0\rangle$$

Então:

$$\Psi(x) |p, s\rangle = \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{p'}}} \sum_{s'} \alpha_{p'}^{s'} u^{s'}(p') e^{i p' \cdot x} \sqrt{2E_p} \alpha_p^{s+} |0\rangle =$$

$$= e^{i p \cdot x} u^s(p) |0\rangle \quad (\text{note que especificamos também o spin})$$

Dá para intuir que, quando convertemos isto em regras de Feynman para amplitudes de espalhamento, as exponenciais serão convertidas na conservação de momento total, deixando como regra da linha externa:


 $= u^s(p)$

usando o mesmo raciocínio para a^\dagger , b e b^\dagger , chegamos a (note que estas regras só fazem sentido no espaço de Minkowski onde podemos definir um espalhamento):

Linhas externas fermiônicas

(eq. 73.1)

Quantização de Campos de Gauge

(Nastase 16, Peskin 9.4, Ryder 7.1)

Voltaremos agora ao “mundo bosônico” para lidar com um tipo bastante especial de bóson, os **Bósons de Gauge**. Estes campos vetoriais são introduzidos em teorias toda vez que assumimos a existência de alguma simetria contínua e local (simetria de Gauge), em geral postulando que o conteúdo de matéria da teoria (escalares e férmions) se transformem sobre alguma representação de um grupo de Lie (embora seja também comum pensar em teorias de puro Gauge, onde temos apenas os campos vetoriais, comumente chamadas de teorias de Yang-Mills).

Neste caso, o campo vetorial deve, para manter a invariância da ação sobre as transformações do grupo em questão, se transformar da seguinte forma:

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \frac{1}{e} \partial_\mu \lambda(x) \quad (\text{no caso de uma simetria } U(1), \text{ abeliana})$$

$\underbrace{e}_{\text{constantes de acoplamento}}$

$$A_\mu^a(x) \rightarrow A_\mu^a(x) + \frac{1}{g} \partial_\mu \lambda^a(x) + f^{abc} A_\mu^b \lambda^c(x) \quad (a, b, c \rightarrow \text{índices da representação adjunta do grupo (vão de 1 até \#Geradores do Grupo)})$$

$\underbrace{f^{abc}}_{\text{constantes de estrutura do grupo}}$

(no caso de uma simetria não-abeliana)

Vamos nos restringir ao caso abeliano, por enquanto, e comecemos tentando o caminho ingênuo, análogo ao que fizemos no campo escalar:

$$Z[J] = N \int \mathcal{D}\phi \ e^{i \int (\mathcal{L} + J\phi) dx} = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\phi \ e^{-i \int d^4x \left[\frac{1}{2} \phi (\square + m^2) \phi - \phi J \right]} = \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x \ d^4y \ J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right]$$

No caso do campo eletromagnético (sem interação com a matéria):

$$Z[J] = N \int \mathcal{D}A_\mu \ e^{i \int (\mathcal{L} + J^\mu A_\mu) d^4x}$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$$

$$\int d^4x (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\mu A^\nu) = \int d^4x \partial_\mu (A_\nu \partial^\mu A^\nu) - \int d^4x A_\nu \partial_\mu \partial^\mu A^\nu = - \int d^4x g_{\mu\nu} A^\mu \square A^\nu$$

$$\int d^4x (\partial_\nu A_\mu) (\partial^\nu A^\mu) = \int d^4x \partial_\nu (A_\mu \partial^\nu A^\mu) - \int d^4x A_\mu \partial_\nu \partial^\nu A^\mu = - \int d^4x A^\mu \partial_\nu \partial_\mu A^\nu$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu + \partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu) =$$

$$= \frac{1}{2} A^\mu (g_{\mu\nu} \square - \partial_\nu \partial_\mu) A^\nu \quad (\text{eq. 74.1})$$

$$(g_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu) A^\nu = 0 \quad (\text{eq. de Maxwell})$$

Em princípio só precisaríamos inverter este operador, mas aí esbarramos em um problema: imagine uma configuração de campo específica (estamos somando sobre TODAS ELAS):

$$A^\mu(x) = \partial^\mu \alpha(x)$$

$$(g_{\mu\nu} \square - \partial_\nu \partial_\mu) \partial^\mu \alpha = (\square \partial_\nu - \partial_\nu \square) \alpha = 0$$

O operador tem autovalores zero, e portanto é singular. De fato, a integral:

$$\int \mathcal{D}A_\mu \exp \left\{ \frac{i}{2} \int d^4x A_\mu(x) (g^{\mu\nu} \partial^2 - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu(x) \right\}$$

vai receber uma contribuição igual a "1" cada vez que considerarmos uma contribuição deste tipo. É divergente. Podemos ver que esta divergência é transmitida para o que seria a função de Green:

$$(g_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu) D^{\nu\lambda}(x-y) = \delta_\mu^\lambda \delta^4(x-y)$$

(tem que ser realmente grande para satisfazer isto)

$$(0 \cdot \partial_\nu) D^{\nu\lambda}(x-y) = \partial^\lambda \delta^4(x-y)$$

A raiz do problema está na invariância de gauge. Quando somamos sobre diversas configurações de A_μ , somamos inclusive aquelas equivalentes (ligadas por uma transformação de gauge) o que é uma forma de "múltipla contagem".

