Temos que forçar a nossa integral de trajetória a considerar somente estados inequivalentes por uma transformação de gauge. Uma forma óbvia de fazê-lo é fixar o gauge, mas como fazemos isto em uma integral de trajetória?

Fixação de Gauge em Integrais de Trajetória, método de Fadeev-Popov

Começamos fazendo a rotação de Wick para o espaço Euclideano. É preciso atentar para o fato de que A_μ é um vetor de Lorentz e sua componente zero também deve ser rodada:

$$x^0 = t = -i x_4 = -i x^4 \qquad \partial_0 = \frac{\partial}{\partial x^0} = i\frac{\partial}{\partial x^4} = i\,\partial_4$$

$$x_0 = -t = i x_4$$

$$\boxed{A_0 = i A_4} \quad \text{(eq. 75.1)}$$

$$\boxed{E_i^{(m)} = F_{0i}} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = i\partial_4 A_i - i\,\partial_i A_4 = \boxed{i F_{4i} \equiv i\, E_i^{(E)}} \quad \boxed{F^{0i} = -i F^{4i}} \quad \text{(eq. 75.2)}$$

$$\mathcal{L}_{EM}^{(m)} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}F_{0i}F^{0i} - \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} = -\frac{1}{4}F_{4i}F^{4i} - \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{(E)}F^{(E)\,ij}$$

$$i\int \underbrace{d^4x}_{-i\,d^4x_E}\, \mathcal{L}_{EM}^{(m)} = \int d^4x_E \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{(E)}F^{(E)\,ij}\right) = \underbrace{-\int d^4x_E \underbrace{\left(F_{\mu\nu}^{(E)}\right)^2}_{\mathcal{L}_{EM}^{(E)}}}_{S_{EM}^{(E)}}$$

$$\boxed{\mathcal{L}_{EM}^{(E)} = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{(E)}F_{\mu\nu}^{(E)} = \frac{1}{2}\left[\left(E_i^{(E)}\right)^2 + \left(B_i^{(E)}\right)^2\right]} \quad \text{(eq. 75.3)}$$

Esquecendo o índice (E) e fazendo uma integração por parte (análogo ao que fizemos para obter 146.1, mas aqui não há termos de borda por definição):

$$S_{EM}[A] = \int d^4x\left[-\frac{1}{2}A_\mu\left(\delta_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\nu\partial_\mu\right)A_\nu\right]$$

A idéia agora é que em: $Z = \int \mathcal{D}A_\mu(x)\, e^{-S_{EM}[A]}$

temos duas "somas":

(1) uma desejável, sobre todas as configurações fisicamente inequivalentes do campo A_μ que criam o comportamento quântico do campo

(2) uma soma igual a anterior só que com todos as configurações levadas em outras fisicamente equivalentes por meio de uma transformação de Gauge, para um parâmetro de Gauge λ específico. Claramente temos uma "cópia" desta para cada escolha de λ, o que acaba virando uma integral em λ.

Se conseguirmos fatorar a integral acima em duas: $\int \mathcal{D}A_\mu(x) = \underbrace{\int d\lambda}_{\text{integral para os diversos "Gauges"}} \underbrace{\int \mathcal{D}A_\mu^{GF}(x)}_{\text{integral sobre os campos fisicamente relevantes (Gauge-fixados)}}$

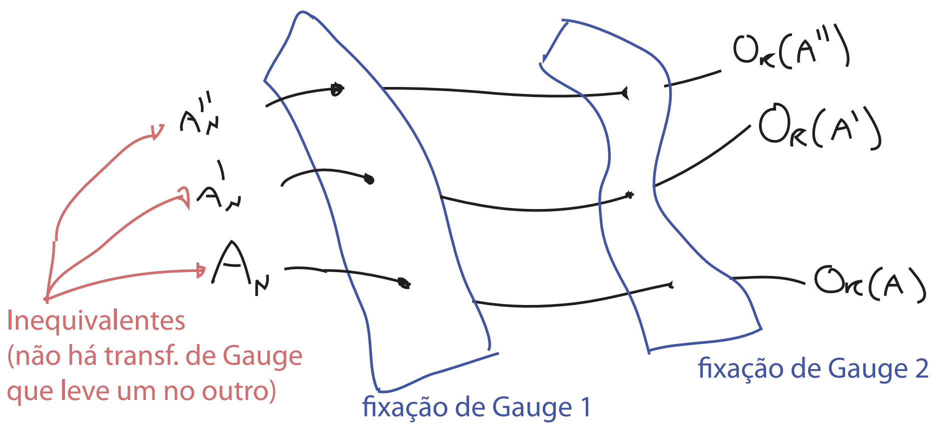
e eliminarmos toda dependencia em λ da integral de trajetória, então a integral em λ vira um fator multiplicativo em Z, completamente irrelevante (é o "volume" do espaço interno definido pelo grupo U(1)). Essa é nossa meta nas próximas páginas.

Para começar, consideremos uma fixação de Gauge covariante mais geral do que a de Lorenz:

$$\boxed{\partial_\mu A_\mu = C(x)} \quad \text{(eq. 76.1)}$$

Dada uma configuração de campo específica A_μ, definamos a órbita de A_μ, *Or(A)*, como o conjunto de todas as outras configurações que podem ser obtidas a partir de A_μ por meio de uma transformação de Gauge.

Agora imagine também o espaço de todas as possíveis condições de fixação de Gauge. Se estas são "boas" fixações de Gauge, deve haver apenas um ponto de intersecção entre este espaço e *Or(A)* (para cada configuração inequivalente):



Vamos assumir que a intersecção é única, mas existe um problema conhecido em teorias não Abelianas com esta suposição, as chamadas cópias de Gribov (outras intersecções, uma infinidade delas de fato). Não nos preocuparemos com elas pois (1) só aparecem no caso não Abeliano e (2) mesmo nas teorias não Abelianas, só são importantes no regime não perturbativo destas.

Considere então que estamos percorrendo a órbita fazendo a transformação:

$$A_\mu(x) \to \boxed{{}^{\chi}A_\mu(x) \equiv A_\mu(x) + \partial_\mu \chi(x)} \quad \text{(eq. 76.2)}$$

$$\partial^\mu\, {}^{\chi}A_\mu = \partial^\mu A_\mu + \partial^\mu \partial_\mu \chi^{(A)}$$
$$\partial^\mu\, {}^{\chi}A_\mu = C$$

a forma:
$$\boxed{\chi^A(x) \,/\, \partial^2 \chi^{(A)}(x) = -\partial_\mu A_\mu(x) + C(x)} \quad \text{(eq. 76.3)}$$

É a transformação que nos coloca exatamente na intersecção de *Or(A)* com a fixação 76.1.

Queremos então provar o seguinte:

$$\boxed{\int \prod_{x \in \mathbb{R}^4} d\chi(x) \prod_{y \in \mathbb{R}^4} \delta\left(-\partial_\mu\left({}^{\chi}A_\mu(y)\right) + C(y)\right) = \frac{1}{\mathrm{Det}(-\partial^2)}} \quad \text{(eq. 76.4)}$$

porque se isso for verdade, teremos encontrado uma identidade:

“δ funcional” no sentido em que a derivada de A tem que ser c para qualquer ponto y

$$1 = \mathrm{Det}(-\partial^2)\int \overbrace{\prod_{x\in\mathbb{R}^4} d\chi(x)}^{\int D\chi}\ \overbrace{\prod_{y\in\mathbb{R}^4} \delta\left(-\partial_\mu({}^{\chi}A_\mu(y)) + c(y)\right)}^{\delta[-\partial_\mu A + c]} \qquad \text{(eq. 77.1)}$$

que pode ser inserida dentro da integral de trajetória de A e impõe, por meio desta δ, a condição 76.1 para qualquer valor de χ.

Demonstração

$$-\partial_\mu({}^{\chi}A_\mu) + c = -\partial^2\chi - \partial_\mu A_\mu + c = -\partial^2\chi + \partial^2\chi^{(A)}$$

Podemos fazer uma mudança de variáveis na integral em χ: $\quad \chi \to \chi - \chi^A$

$$\int \prod_{x\in\mathbb{R}^4} d\chi(x) \prod_{y\in\mathbb{R}^4} \delta\Big[\underbrace{-\partial_\mu({}^{\chi}A_\mu(y)) + c(y)}_{G({}^{\chi}A_\mu)}\Big] = \int \prod_{x\in\mathbb{R}^4} d\chi(x) \prod_{y\in\mathbb{R}^4} \delta\left[-\partial^2\chi(y)\right]$$

Note que, dado o vínculo:

$$G({}^{\chi}A_\mu(y)) \equiv -\partial_\mu {}^{\chi}A_\mu + c = -\partial^2\chi(y) - \partial_\mu A_\mu(y) + c(y)$$

$$\frac{\delta G({}^{\chi}A_\mu(y))}{\delta\chi(x)} = -\partial^2\delta(x-y) \equiv -\partial^2(x,y)$$

Mostrando que este operador $-\partial^2(x,y)$ age como elemento de matriz do Jacobiano de uma mudança de váriáveis:

$$\chi \to G({}^{\chi}A_\mu)$$

O que é uma versão contínua de:

$$\int \prod_{i=1}^{n} d\chi_i \prod_{j=1}^{n} \delta(\Delta_{ij}\chi_j) = \int d^n\chi\, \delta^n(\underbrace{\Delta\vec{\chi}}_{\vec{\eta}=\Delta\vec{\chi}}) = \int d^n\eta\, \frac{\delta^n(\vec{\eta})}{\mathrm{Det}(\Delta)} = \frac{1}{\mathrm{Det}(\Delta)}$$

$$\eta_i = \Delta_{ij}\chi_j \to d^n\eta = \mathrm{Det}(\Delta)\, d^n\chi$$

Portanto:

$$\int \prod_{x\in\mathbb{R}^4} d\chi(x) \prod_{y\in\mathbb{R}^4} \delta\left[-\partial^2\chi(y)\right] = \frac{1}{\mathrm{Det}(-\partial^2)}$$

que é o que queríamos demonstrar

Podemos então, a partir da identidade 77.1, obter uma outra, integrando sobre as condições de Gauge (com um peso gaussiano):

$$\underbrace{N(\alpha)}_{\text{garante a identidade}} \int Dc\; e^{-\frac{1}{2\alpha}\int d^4x\; c^2(x)} = 1$$

$$N(\alpha)\int Dc\; e^{-\frac{1}{2\alpha}\int d^4x\; c^2(x)}\, \mathrm{Det}(-\partial^2)\int D\chi\; \delta\left[-\partial_\mu {}^{\chi}A_\mu + c(y)\right] = 1$$

$$\boxed{\int D\chi\; N(\alpha)\, e^{-\frac{1}{2\alpha}\int d^4x\left(\partial_\mu {}^{\chi}A_\mu(x)\right)^2}\, \mathrm{Det}(-\partial^2) = 1}$$ (eq. 78.1)

Podemos então inserir a identidade 78.1 dentro de qualquer integral de trajetória em A:

$$\int DA\; e^{-S[A]}\,\mathcal{O}[A] = \int DA\; e^{-S[A]}\,\mathcal{O}[A]\,\mathrm{Det}(-\partial^2)\int D\chi\; N(\alpha)\, e^{-\frac{1}{2\alpha}\int d^4x\left(\partial_\mu {}^{\chi}A_\mu(x)\right)^2}$$

Não depende de A. Este passo, aparentemente inofensivo, é onde está uma das grandes diferenças entre teorias abelianas e não abelianas. Para uma teoria não abeliana este $\mathrm{Det}[\delta G/\delta\chi]$ vai depender de A e não poderá ser tirado da integral de trajetória. Neste caso seríamos forçados a reescrevê-lo como uma integral de gaussiana, ou seja, mais um termo quadrático seria adicionado a ação. É dessa forma que nascem os fantasmas de Fadeev-Popov (como veremos em breve)

$$\int DA\; e^{-S[A]}\,\mathcal{O}[A] = \mathrm{Det}(-\partial^2) N(\alpha)\int D\chi \int DA\, e^{-S[A]-\frac{1}{2\alpha}\int d^4x\left(\partial_\mu {}^{\chi}A_\mu(x)\right)^2}\,\mathcal{O}[A]$$

Fazemos uma mudança de variáveis em A: $A \to A - \partial_\mu \chi$

$$\partial_\mu {}^{\chi}A_\mu \to \partial_\mu A_\mu$$

Já sabemos que a ação é invariante de Gauge, então: $S[A] \to S[A]$

e vamos assumir que *O[A]* também tenha esta propriedade (o que é obrigatório para qualquer observável: $\mathcal{O}[A] \to \mathcal{O}[A]$

$$\therefore \boxed{\int DA\, e^{-S[A]}\mathcal{O}[A] = \mathrm{Det}(-\partial^2)N(\alpha)\underbrace{\left(\int D\chi\right)}_{\text{Não há mais nada dependendo de } \chi\text{, logo esta integral é só um número (infinito).}}\int DA\, e^{-S[A]-\frac{1}{2\alpha}\int d^4x(\partial_\mu A_\mu(x))^2}\mathcal{O}[A]} \quad \text{(eq. 79.1)}$$

Esta é de fato a expressão que buscávamos, pois conseguimos fatorar a integração sobre o parâmetro de Gauge. Todos as constantes fora da integral em A são irrelevantes pois qualquer correlator vai ser obtido via:

$$\langle \mathcal{O}[A] \rangle = \frac{\int DA\, \mathcal{O}(A)\, e^{-S[A]}\hat{1}}{\int DA\, e^{-S[A]}\hat{1}} = \frac{\int DA\, \mathcal{O}(A)\, e^{-S_{EFF}[A]}}{\int DA\, e^{-S_{EFF}[A]}}$$

Onde:

$$\boxed{S_{EFF}[A] \equiv \frac{1}{2}F_{\mu\nu}^2 + \underbrace{\frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A_\mu)^2}_{S_{GF}\ \text{(Gauge Fixing)}}} \quad \text{(eq. 79.2)}$$

O propagador do Fóton:

Podemos agora usar a nova Lagrangeana para obter o propagador do fóton. Integrando por partes podemos escrever:

$$\boxed{\begin{aligned} S_{EFF} &= \int d^4x \left[-\frac{1}{2}A_\mu(\delta_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\nu)A_\nu\right] \underbrace{-\frac{1}{2\alpha}A_\mu\partial_\mu\partial_\nu A_\nu}_{\text{parte nova}} = \\ &= \frac{1}{2}\int d^4x\, A_\mu(x)\underbrace{\left(-\delta_{\mu\nu}\partial^2 + \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\partial_\mu\partial_\nu\right)}_{(G^{(0)})^{-1}_{\mu\nu}(x)\ \text{(que agora é inversível)}}A_\nu(x) \end{aligned}} \quad \text{(eq. 79.3)}$$

$$S_{EFF} = \frac{1}{2}\int d^4x \int d^4k\, A_\mu(k)\, e^{ikx}\left(-\delta_{\mu\nu}\partial^2 + \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\partial_\mu\partial_\nu\right)\int d^4k'\, A_\nu(k')\, e^{ik'x} =$$

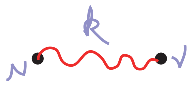
$$= \frac{1}{2}\int d^4k\, d^4k'\;\delta^4(k+k')\;A_\mu(k)\left[+\delta_{\mu\nu}\,k'^2-\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)k'_\mu k'_\nu\right]A_\nu(k') =$$

$$\boxed{S_{EFF} = \frac{1}{2}\int d^4k\;A_\mu(-k)\underbrace{\left[\delta_{\mu\nu}\,k^2-\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)k_\mu k_\nu\right]}_{G^{(0)\,-1}(k)_{\mu\nu}}A_\nu(k)}$$ (eq. 80.1)

Finalmente:

$$\left[\delta_{\mu\nu}\,k^2-\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)k_\mu k_\nu\right]G^{(0)}_{\nu\rho}(k) = \delta_{\nu\rho}$$

$$\boxed{G^{(0)}_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^2}\left(\delta_{\mu\nu}-(1-\alpha)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)}$$



(Moment., Euclid.)

(eq. 80.2)

De onde vemos que o propagador de um bóson de Gauge depende deste parâmetro α (que está ligado a escolha de de Gauge). No chamado "Gauge" de Feynman $\alpha = 1$ e:

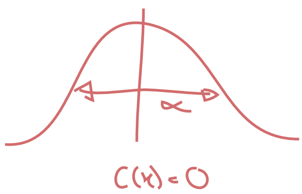
$$\boxed{G^{(0)}_{\mu\nu}(k\,;\alpha=1) = \frac{1}{k^2}\,\delta_{\mu\nu}}$$

(Moment., Euclid., Gauge de Feynman)

(eq. 80.3)

fixamos o Gauge e depois integramos sobre todas as fixações possíveis com a seguinte distribuição:

$$e^{-\frac{1}{2\alpha}\int d^4x\;C^2(x)}$$



Quantização de Teorias não-Abelianas

(Ryder 7.1-7.2, Peskin 16.1-16.2)

Queremos agora quantizar a teoria obtida para um campo de gauge não-abeliano:

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}\left(F^a_{\mu\nu}\right)^2$$

Assim como no caso Abeliano, temos um problema com a soma sobre configurações equivalentes. Agora as configurações equivalentes estão ligadas por:

$$A^M_\mu = A^a_\mu t^a \longleftrightarrow A^{M\chi}_\mu \equiv (A^\chi_\mu)^a t^a = e^{i\chi^a t^a}\left[A^b_\mu t^b + \frac{i}{g}\partial_\mu\right]e^{-i\chi^c t^c}$$