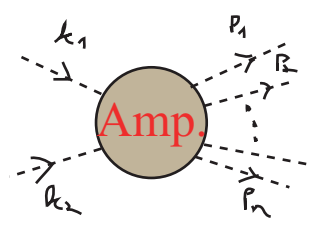


Uma análise equivalente para funções de mais pontos nos leva a:

$$\langle p_1 \dots p_n | S | k_1, k_2 \rangle = (\sqrt{Z})^{n+2}$$



Note que para campos com spin teríamos fatores de polarização no lado direito, tal como  $u_s(k)$  ou  $\epsilon_\mu(k)$

### Funções de Vértice

(Ryder 7.3)

Da mesma forma que fizemos para o propagador, podemos também definir uma soma para todas as correções do vértice (por exemplo em  $\lambda\phi^4$ ):

$$\begin{aligned}
 -i\lambda\Gamma &= \text{[diagram 1]} + \text{[diagram 2]} + \text{[diagram 3]} + \text{[diagram 4]} + \dots \\
 -i\lambda\Gamma(p_1, p_2, p_3, p_4) &= -i\lambda + \dots \\
 \Gamma(p_1, p_2, p_3, p_4) &= 1 + \dots
 \end{aligned}$$

No caso da QED:  $-ie\Gamma^\mu(p', p) = -ie\gamma^\mu + \dots$

$$\Gamma^\mu(p', p) = \gamma^\mu + \dots$$

Note que no caso da teoria  $\lambda\phi^4$  temos um vértice com 4 pernas externas e na QED com três. Podemos também (em ambas as teorias) definir uma função de vértice para duas pernas externas.

$$\begin{aligned}
 \Pi^{(2)}(p) &= \text{[diagram 1]} + \text{[diagram 2]} + \dots \\
 \Pi^{(2)}(p) &= \text{[diagram 3]} + \text{[diagram 4]} + \dots
 \end{aligned}$$

Mais para frente ficará claro porque eu chamei a função com duas pernas externas de  $\Pi^{(2)}$  ao invés de  $\Gamma^{(2)}$

Vamos ver como podemos definir estas funções para qualquer ordem o obter um funcional gerador para elas. Primeiro definimos:

$$\phi_{cl}[J]_{(x)} = \frac{\delta W}{\delta J(x)} = -i \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)}$$

para  $J=0$   $\left\{ \begin{aligned} \frac{\delta Z[J]}{\delta J} &= \langle 0 | \phi | 0 \rangle = 0 \\ Z[J] &= 1 \end{aligned} \right.$

$W = -i \ln[Z[J]]$

mas estamos pensando em  $J \neq 0$

$$\phi_{ce}(\mathcal{J}(x)) = -i \frac{\langle \Omega | \phi | \Omega \rangle_{\mathcal{J}}}{\langle \Omega | \Omega \rangle_{\mathcal{J}}}$$

Pensemos neste objeto em uma teoria escalar livre:

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\phi \left( -\frac{1}{2} \phi (\square + m^2) \phi + \phi \mathcal{J} \right) \rightarrow \mathcal{Z}_0[\mathcal{J}] = e^{-\frac{i}{2} \int \mathcal{D}^4x \mathcal{D}^4y \mathcal{J}(x) \Delta_F(x-y) \mathcal{J}(y)}$$

$$\Delta_F(k) = \frac{1}{k^2 - m^2}$$

$$W_0 = -i \ln \mathcal{Z}_0 = -\frac{1}{2} \int \mathcal{D}^4x \mathcal{D}^4y \mathcal{J}(x) \Delta_F(x-y) \mathcal{J}(y)$$

$$\phi_{ce}(\mathcal{J}(x)) = -\int \mathcal{D}^4y \Delta_F(x-y) \mathcal{J}(y) \quad \xrightarrow{\text{DIAGRAMA}} \quad \begin{array}{c} \text{---} \text{X} \\ \text{K} \qquad \text{Y} \end{array}$$

↳ que é a solução clássica do sistema

$$d_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \phi \mathcal{J}$$

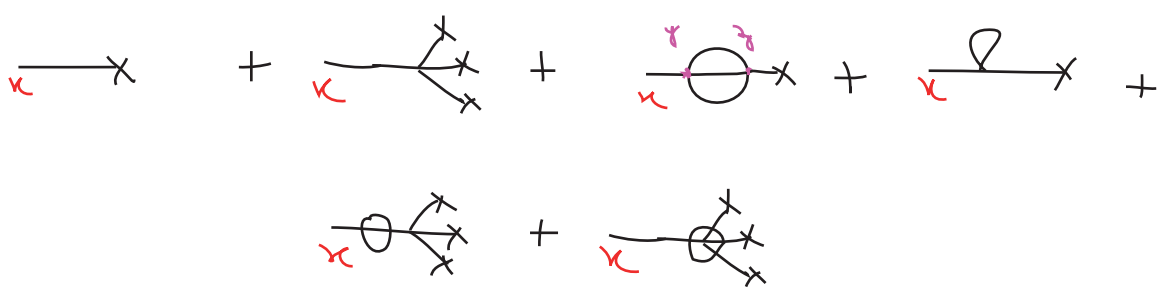
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi + \mathcal{J}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi$$

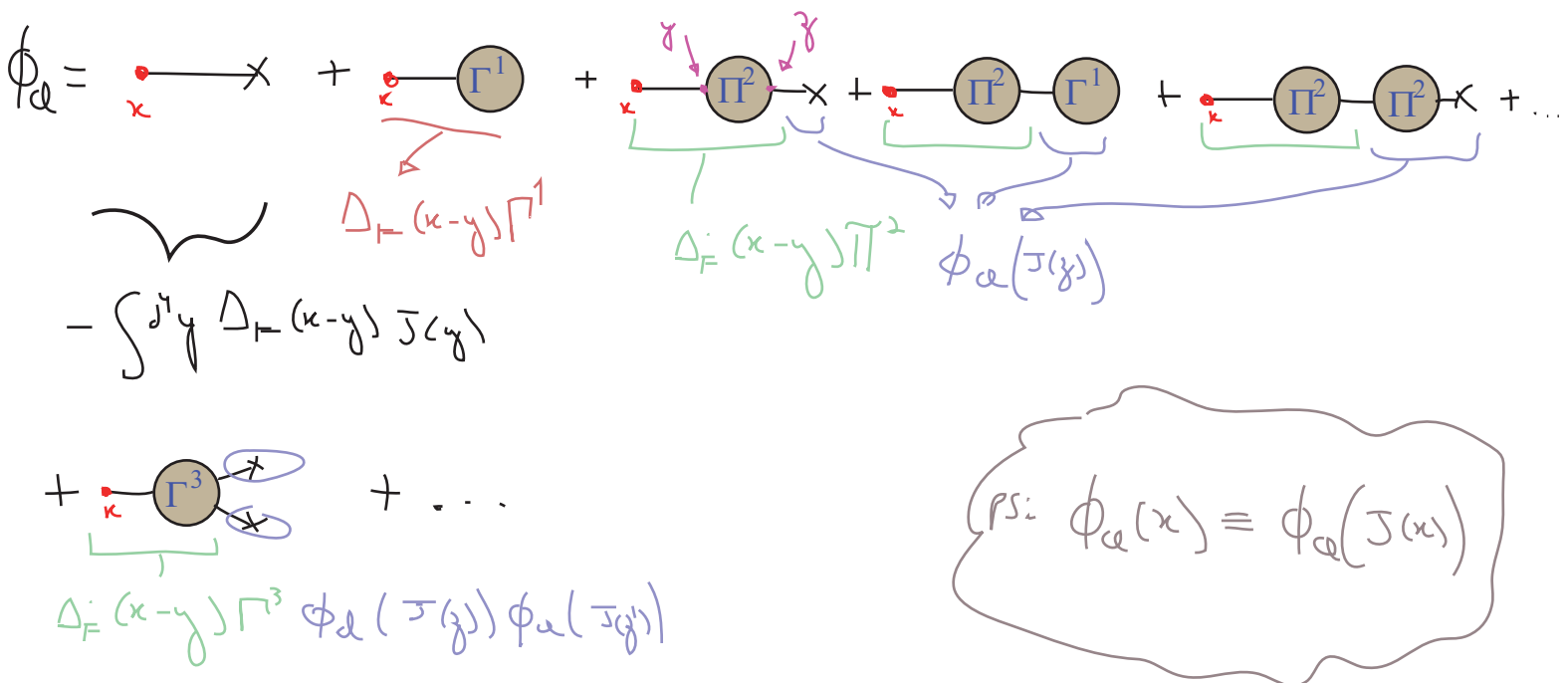
$$\square \phi - m^2 \phi + \mathcal{J} = 0 \Rightarrow (\square - m^2) \phi = -\mathcal{J}$$

$$\phi_{ce} = -(\square - m^2)^{-1} \mathcal{J}$$

Supondo agora que eu "ligasse" a interação, as contribuições para esta função de um ponto seriam (pensando em  $\lambda \phi^4$ ):



Pensando em termos de diagramas 1PI (e em uma teoria mais geral):



$$\phi_a(x) = - \int d^4y \Delta_F(x-y) \left\{ J(y) + \left( \Gamma^{(1)}(y) + \int d^4z \Pi^{(2)}(y,z) \phi_a(z) + \frac{1}{2} \int d^4z d^4z' \Pi^{(3)}(y,z,z') \phi_a(z) \phi_a(z') + \dots \right) \right\}$$

(eq. 104.1)

Vamos definir o funcional gerador para estas funções de vértice:

$$\hat{\Gamma}[\phi_a] \equiv \int d^4x \Gamma^{(1)}(x) \phi_a(x) + \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \Pi^{(2)}(x,y) \phi_a(x) \phi_a(y) + \dots$$

$$\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta}{\delta \phi_a(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta \phi_a(x_n)} \hat{\Gamma}[\phi_a] \Big|_{\phi_a=0} \quad (n \neq 2)$$

Comparando isto com 104.1, temos (toda a parte entre parênteses é basicamente isto com uma potência do campo clássico a menos):

$$\frac{\delta W}{\delta J(x)} = \phi_a(J(x)) = - \int d^4y \Delta_F(x-y) \left( J(y) + \frac{\delta \hat{\Gamma}[\phi_a]}{\delta \phi_a(y)} \right)$$

$$(\square_x + m^2) \phi_a(\mathcal{J}(x)) = - \int d^4y \underbrace{(\square_x + m^2) \Delta_F(x-y)}_{-\delta(x-y)} \left( \mathcal{J}(y) + \frac{\delta \hat{\Gamma}[\phi_a]}{\delta \phi_a(y)} \right)$$

$$(\square_x + m^2) \phi_a(\mathcal{J}(x)) - \frac{\delta \hat{\Gamma}[\phi_a]}{\delta \phi_a(x)} = \mathcal{J}(x)$$

$$\frac{\delta}{\delta \phi_a(x)} \left[ \int d^4y \phi_a(y) (\square_y + m^2) \phi_a(y) \right] = \int d^4y \delta(x-y) (\square_y + m^2) \phi_a(y) = (\square_x + m^2) \phi_a(x)$$

$$\frac{\delta}{\delta \phi_a(x)} \left( \underbrace{\hat{\Gamma}[\phi_a] - \frac{1}{2} \int d^4y \phi_a(\mathcal{J}(y)) (\square_y + m^2) \phi_a(\mathcal{J}(y))}_{\Gamma[\phi_a]} \right) = -\mathcal{J}(x) \quad (\text{eq. 105.1})$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_a(x)} = -\mathcal{J}(x)$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_a(x) \delta \phi_a(y)} \Big|_{\phi_a=0} = \underbrace{\Pi^{(2)}(x,y)}_{\Gamma^{(2)}(x,y)} - (\square_x + m^2) \delta(x-y)$$

$$n \geq 2 \Rightarrow \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta}{\delta \phi_a(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta \phi_a(x_n)} \Gamma[\phi_a] \Big|_{\phi_a=0}$$

Suponha que definamos  $\Gamma[\phi_a]$  com a expressão:

$$W[\mathcal{J}] = \Gamma[\phi_a] + \int d^4x \mathcal{J}(x) \phi_a(x) \quad (\text{eq. 105.2})$$

$$\Rightarrow \frac{\delta W[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}(x)} = \phi_a(x) \quad (\text{eq. 105.3})$$

$$\frac{\delta}{\delta \phi_a(y)} \left( \Gamma[\phi_a] = W[\mathcal{J}] - \int d^4x \mathcal{J}(x) \phi_a(x) \right)$$

$$\frac{\delta \Gamma[\phi_a]}{\delta \phi_a(y)} = \underbrace{\frac{\delta W[\mathcal{J}]}{\delta \phi_a(y)}}_{\frac{\delta W[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}(y)} \frac{\delta \mathcal{J}(y)}{\delta \phi_a(y)}} - \frac{\delta \mathcal{J}(y)}{\delta \phi_a(y)} \phi_a(y) - \mathcal{J}(y)$$



$$\frac{\delta W[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}(y)} \frac{\delta \mathcal{J}(y)}{\delta \phi_a(y)} \Big|_{\phi_a = \phi_a(y)}$$

$$\frac{\delta \Gamma[\phi_a]}{\delta \phi_a(y)} = -J(y)$$

que é justamente como o definimos antes (eq. 105.1) - usaremos esta nova definição porque é mais fácil generalizá-la quando tivermos mais campos.

Note que a função 1PI de dois pontos é  $\Pi^{(2)}(x,y)$  e não  $\Gamma^{(2)}(x,y)$

Temos uma interpretação para  $\Gamma^{(2)}$  ?

TEORIA LIVRE  
 $\Delta_F^C(x-y) = i \Delta_F(x-y) = \frac{-i}{p^2 - m^2}$

$$\phi_a(x) = \frac{\delta W}{\delta J(x)} \quad \Delta_F^C(x-y) \text{ Propagador completo}$$

$$\frac{\delta \phi_a(x)}{\delta J(y)} = \frac{\delta^2 W}{\delta J(y) \delta J(x)} = i \langle n | T \{ \phi_a(x) \phi(y) \} | n \rangle$$

EQ 17.1

$$- \Delta_F(x-y) \left( 1 + \int d^4z \Pi^{(2)}(y,z) \frac{\delta \phi_a(z)}{\delta J(y)} + \dots \right) = i \Delta_F^C(x-y)$$

$i \Delta_F^C(z-y) \rightarrow 0 \text{ / } J = \phi_a = 0$

Quando faço  $J=0 \rightarrow \phi_a = 0$  (pg 103)

$$- \Delta_F(x-y) - i \Delta_F(x-y) \int d^4z \Pi^{(2)}(y,z) \Delta_F^C(z-y) = i \Delta_F^C(x-y)$$

$$-(\square + m^2)_x \left( \int d^4z \left( \delta^4(z-x) + \Delta_F(x-y) \Pi^{(2)}(y,z) \right) \Delta_F^C(z-y) = i \Delta_F(x-y) \right)$$

$$\int d^4z \left( -(\square + m^2)_x \delta^4(z-x) + \delta(x,y) \Pi^{(2)}(y,z) \right) \Delta_F^C(z-y) = i J(x-y)$$

$\Gamma^{(2)}(x,y)$  (pg 105)

$$\int d^4y \Gamma^{(2)}(x,y) \Delta_F^C(y-y) = i \delta(x-y)$$

(eq. 107.1)

$\Gamma^{(2)}(x,y)$  é a inversa do propagador completo! No espaço dos momentos:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma^{(2)}(x,y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-i p(x-y)} \Gamma^{(2)}(p) \\ \Delta_F^C(y,y) &= \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} e^{-i p'(y-y)} \Delta_F^C(p') \end{aligned} \right\} \begin{cases} \int d^4y \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-i p(x-y)} \Gamma^{(2)}(p) \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} e^{-i p'(y-y)} \Delta_F^C(p') = i \delta(x-y) \\ \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} \delta^4(p-p') \Gamma^{(2)}(p) \Delta_F^C(p') e^{-i p x} e^{i p' y} = i \delta(x-y) \\ \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \Gamma^{(2)}(p) \Delta_F^C(p) e^{-i p(x-y)} = i \delta(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} i e^{-i p(x-y)} \end{cases}$$

$$\Gamma^{(2)}(p) \Delta_F^C(p) = i$$

(eq. 107.2)

$$\Delta_F^C(p) = \frac{i}{p^2 - \underbrace{m^2}_{m^2 = m_0^2 + M^2(p^2)}}$$

↑ massa física  
↑ correções 1PI ao propagador (pg 100)  
↓ massa livre

↳ função de Green de 2-pontos completa

$$\Gamma^{(2)}(p) = -i (p^2 - m_0^2 - M^2(p^2)) = i (M^2(p^2) - (p^2 - m_0^2))$$

$$\Gamma^{(2)}(x,y) = \Gamma^{(2)}(x,y) - (0 + m^2) \delta(x-y)$$

Queremos achar relações análogas a 107.1 e 107.2 para vértices de mais pontos. Notando que:

$$\Delta_F^C(y-y) = \left( -i \frac{\delta^2 W}{\delta J(y) \delta J(y)} \right) = -i \frac{\delta \phi_a(y)}{\delta J(y)} \tag{105.3}$$

Podemos escrever a seguinte derivada

$$\frac{\delta}{\delta J(x'')} = \int d^4z'' \frac{\delta \phi_a(z'')}{\delta J(x'')} \frac{\delta}{\delta \phi_a(z'')} = i \int d^4z'' \Delta_F^C(z'', x'') \frac{\delta}{\delta \phi_a(z'')} \tag{eq. 107.3}$$

$$\frac{\delta}{\delta \mathcal{J}(x'')} \int d^3z \Delta_F^c(x, z) \Gamma^{(2)}(z, y) = 0$$

$$\int d^3z \left( \frac{\delta}{\delta \mathcal{J}(x'')} \Delta_F^c(x, z) \right) \Gamma^{(2)}(z, y) + \int d^3z \Delta_F^c(x, z) \left( \frac{\delta}{\delta \mathcal{J}(x'')} \Gamma^{(2)}(z, y) \right) = 0$$

107.3



$$\int d^3z \left( -i \frac{\delta^3 W[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}(x'') \delta \mathcal{J}(x) \delta \mathcal{J}(y)} \right) \Gamma^{(2)}(z, y) + i \int d^3z d^3z'' \Delta_F^c(x, z) \times \Delta_F^c(z'', x'') \left( \frac{\delta^3 \Gamma[\phi]}{\delta \phi_\alpha(z'') \delta \phi_\alpha(z) \delta \phi_\alpha(y)} \right) = 0$$

Red arrow pointing down with text:  $\times i \Delta_F^c(x', y)$  and  $\int dy$

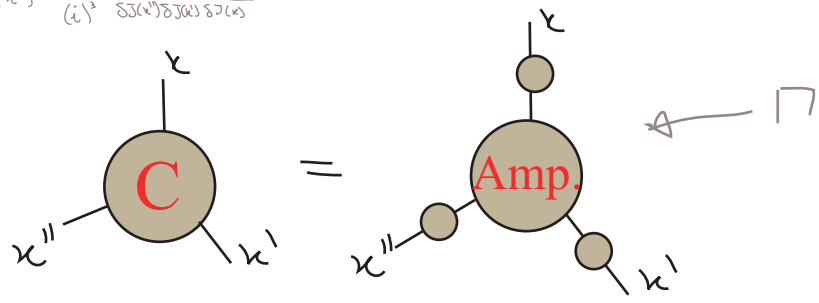
$$\int d^3z \frac{\delta^3 W[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}(x'') \delta \mathcal{J}(x) \delta \mathcal{J}(y)} \int dy \underbrace{(\Delta_F^c(x', y) \Gamma^{(2)}(z, y))}_{i \delta(x' - y)} +$$

$$- \int d^3z d^3z'' dy \Delta_F^c(x, z) \Delta_F^c(z'', x'') \Delta_F^c(x', y) \frac{\delta^3 \Gamma[\phi]}{\delta \phi_\alpha(z'') \delta \phi_\alpha(z) \delta \phi_\alpha(y)} = 0$$

Red arrow pointing down with text:  $y \rightarrow z'$

$$i \frac{\delta^3 W[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}(x'') \delta \mathcal{J}(x) \delta \mathcal{J}(z')} = \int d^3z d^3z'' d^3z' \Delta_F^c(x, z) \Delta_F^c(z'', x'') \Delta_F^c(x', z') \frac{\delta^3 \Gamma[\phi]}{\delta \phi_\alpha(z'') \delta \phi_\alpha(z) \delta \phi_\alpha(z')}$$

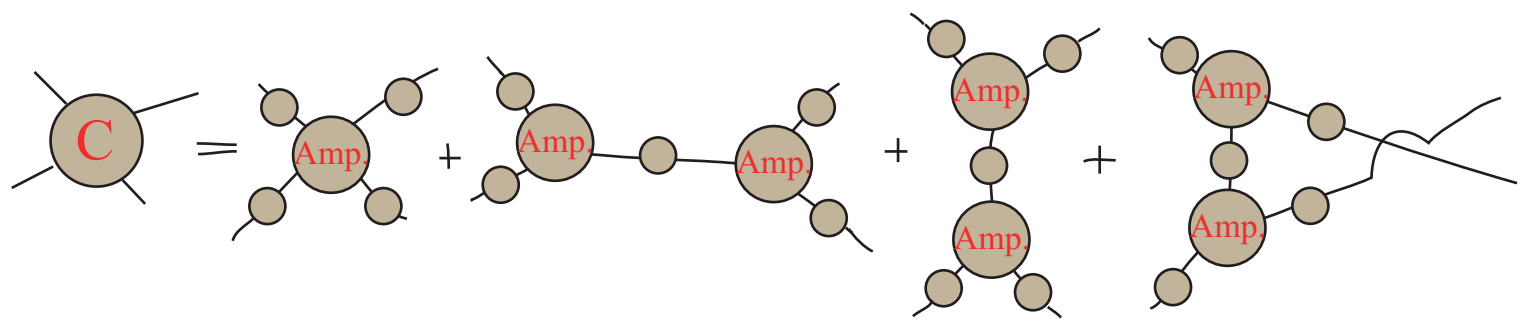
$$\phi(x, x', x'') = \frac{1}{(i)^3} \frac{\delta^3 W}{\delta \mathcal{J}(x) \delta \mathcal{J}(x') \delta \mathcal{J}(x')}$$



O que nos mostra que a função de vértice de fato contém os diagramas amputados que queríamos. Outra forma de ver isso é invertendo a expressão acima:

$$\frac{\delta^3 \Gamma[\phi]}{\delta\phi(z'') \delta\phi(z) \delta\phi(z')} = - \int dx dx' dx'' \underbrace{\Gamma^{(A)}(x, z) \Gamma^{(A)}(x', z') \Gamma^{(A)}(x'', z'')}_{\text{como estes são os inversos dos propagadores completos, o efeito deles sobre o correlator será o de "amputar" os propagadores.}} \frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(x'') \delta J(x) \delta J(x')} \quad (\text{eq. 109.1})$$

Podemos continuar derivando para obter expressões para as funções de ordem superior. Em termos de diagramas, a expressão para a função de 4 pontos seria:



Obs: note que na pg 105, trocamos a definição de  $\Gamma[\phi_a]$  dada por 105.1 por:

$$W[J] = \Gamma[\phi_a] + \int dx J(x) \phi_a(x)$$

com  $\boxed{\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \phi_a(x)} \quad \boxed{\frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_a(x)} = -J(x)}$

$f(x) \rightarrow g(\mu) \quad \mu = \frac{df}{dx}$   
 $g(\mu) = f(x) - \mu x$

o que é uma generalização da transformada de Legendre

### Identidades de Ward-Takahashi na QED

(Ryder 7.4, Peskin 7.4)

Com as definições feitas nas últimas páginas podemos agora provar uma generalização das identidades de Ward para os propagadores e vértices completos, as identidades de Ward-Takahashi. Começemos notando que quando quantizamos o campo eletromagnético fomos obrigado a fixar o gauge, pensando na Lagrangeana da QED:

$$\mathcal{L}_{\text{EFF}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i \bar{\Psi} \not{\partial} \Psi + i e \bar{\Psi} \not{A} \Psi - m \bar{\Psi} \Psi - \underbrace{\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2}_{\mathcal{L}_{\text{GF}}} \quad (\text{eq. 109.2})$$