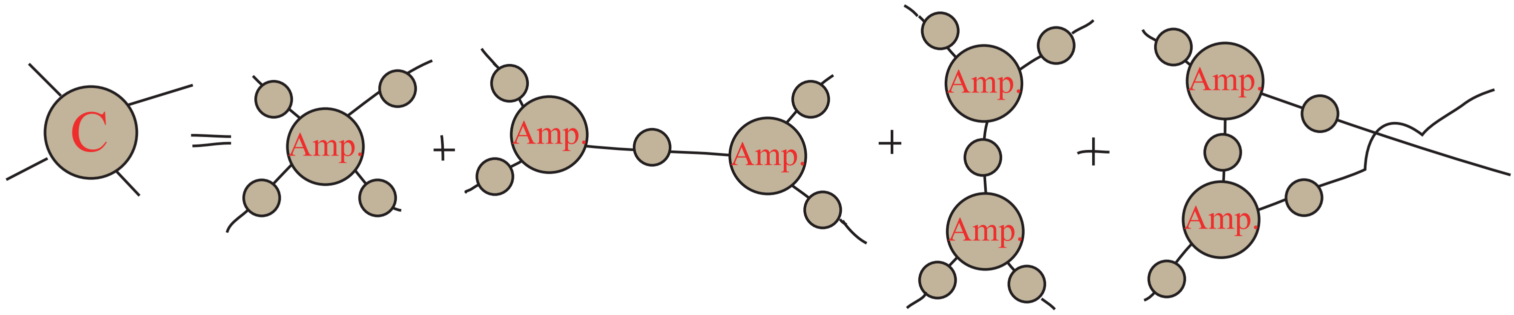
O que nos mostra que a função de vértice de fato contém os diagramas amputados que queríamos. Outra forma de ver isso é invertendo a expressão acima:

$$\frac{\delta^3 \Gamma[\phi]}{\delta\phi(z'')\,\delta\phi(z)\,\delta\phi(z')} = -\int dx\, dx'\, dx''\, \underbrace{\Gamma^{(2)}(x,z)\,\Gamma^{(2)}(x',z')\,\Gamma^{(2)}(x'',z'')}_{\text{como estes são os inversos dos propagadores completos, o efeito deles sobre o correlator será o de ``amputar'' os propadores.}} \frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(x'')\,\delta J(x)\,\delta J(x')}$$

(eq. 109.1)

Podemos continuar derivando para obter expressões para as funções de ordem superior. Em termos de diagramas, a expressão para a função de 4 pontos seria:



Obs: note que na pg 105, trocamos a definição de $\Gamma[\phi_{cl}]$ dada por 105.1 por:

$$W[J] = \Gamma[\phi_{cl}] + \int dx\, J(x)\, \phi_{cl}(x)$$

com $\boxed{\dfrac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \phi_{cl}(x)}$ $\boxed{\dfrac{\delta \Gamma}{\delta \phi_{cl}(x)} = -J(x)}$

o que é uma generalização da transformada de Legendre

$f(x) \longrightarrow g(u) \qquad u = \dfrac{df}{dx}$

$g(u) = f(x) - ux$

(Detalhes sobre o gerador das funções conectadas e ação efetiva -> Campos I 2015, pgs 157-168)

Identidades de Ward-Takahashi na QED

(Ryder 7.4, Peskin 7.4)

Com as definições feitas nas últimas páginas podemos agora provar uma generalização das identidades de Ward para os propagadores e vértices completos, as identidades de Ward-Takahashi. Comecemos notando que quando quantizamos o campo eletromagnético fomos obrigador a fixar o gauge, pensando na Lagrangeana da QED:

$$\mathcal{L}_{EFF} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^{\mu}(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi \underbrace{- \frac{1}{2\xi}(\partial^{\mu}A_\mu)^2}_{\mathcal{L}_{GF}}$$

(eq. 109.2)

A Lagrangeana fixada, no entanto, não é invariante de gauge - mas precisamos que os observáveis da teoria - que vêem das funções de Green - o sejam. Portanto o funcional gerador deve ser invariante. Assim, dada uma transformação de gauge infinitesimal:

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \alpha \qquad \alpha = \alpha(x)$$

$$\psi \to \psi - ie\alpha\psi$$

$$\bar{\psi} \to \bar{\psi} + ie\alpha\bar{\psi}$$

vamos ver o que acontece com Z. Lembrando que no funcional gerador aparece:

$$S = \int d^4x \left(\mathcal{L}_{EFF} + J^\mu A_\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta \right)$$

Quase toda a lagrangeana efetiva é invariante de gauge, com exceção do termo de gauge-fixing:

$$-\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 \to -\frac{1}{2\xi}\left(\partial^\mu A_\mu + \Box\alpha\right)\left(\partial^\nu A_\nu + \Box\alpha\right) =$$

$$= -\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 - \frac{1}{\xi}\underbrace{(\partial^\mu A_\mu)(\Box\alpha)} + \mathcal{O}(\alpha^2)$$

integração por partes:

$$\int d^4x (\partial^\mu A_\mu)(\Box\alpha) = \int d^4x \left(\Box\partial^\mu A_\mu\right)\alpha(x)$$

As fontes também contribuem para a variação:

$$\underbrace{J^\mu A_\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta}_{\mathcal{L}_F} \to \mathcal{L}_F + \underbrace{J^\mu \partial_\mu \alpha} - ie\alpha\bar{\eta}\psi + ie\alpha\bar{\psi}\eta$$

integração por partes:

$$\int d^4x\, J^\mu \partial_\mu \alpha = -\int d^4x (\partial_\mu J^\mu)\alpha(x)$$

Portanto:

$$Z = N\int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\, e^{iS} \to N\int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\, \mathrm{EXP}\left\{ i\int d^4x \left[-\frac{1}{\xi}\left(\Box\partial^\mu A_\mu\right) - \partial_\mu J^\mu + \right.\right.$$

$$\left.\left. - ie\bar{\eta}\psi + ie\bar{\psi}\eta \right]\alpha(x) \right\} e^{iS}$$

Considerando que $\alpha(x)$ é pequeno, podemos expandir a exponencial e obter:

$$Z \to Z + N\int DA_\mu D\bar{\psi} D\psi \left\{ i\int d^4x \underbrace{\left[-\frac{1}{\xi}\left(\Box\partial^\nu A_\nu\right) - \partial_\mu J^\mu - ie\left(\bar{\eta}\psi - \bar{\psi}\eta\right)\right]}_{O[A_\mu,\bar{\psi},\psi]} \alpha(x) \right\} e^{iS}$$

Uma forma simples de tratar O é usar o mesmo método que usamos para tratar interações anteriormente - transformamos ele em um operador diferencial agindo na exponencial da ação, fazendo as substituições:

* parece errado no Ryder

$$\psi \to \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}} \qquad \bar{\psi} \to -\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\eta} \qquad A_\mu \to \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^\mu}$$

$$\boxed{Z = N\int DA_\mu D\bar{\psi} D\psi\, e^{iS_{eff} + i\int d^4x\left(J^\mu A_\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta\right)}}$$

Então:

$$\hat{O}[A_\mu,\bar{\psi},\psi] = \left[+\frac{i}{\xi}\Box\partial^\nu\frac{\delta}{\delta J^\nu} - \partial^\mu J_\mu - e\left(\bar{\eta}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}} \overbrace{- \eta\frac{\delta}{\delta\eta}}^{+\eta\bar{\psi}}\right)\right]$$

$$Z \to \left(1 + i\int d^4x\, \alpha(x)\hat{O}\right) Z$$

Para garantir a invariância de Z, qualquer que seja α, precisamos que: $\hat{O}Z = \overset{\text{ZERO!}}{\emptyset}$

$$\left[+\frac{i}{\xi}\Box\partial^\nu\frac{\delta}{\delta J^\nu} - \partial^\mu J_\mu - e\left(\bar{\eta}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}} - \eta\frac{\delta}{\delta\eta}\right)\right] Z = 0$$

$$Z = e^{iW}$$

$$\left[-\frac{1}{\xi}\Box\partial^\nu\frac{\delta W}{\delta J^\nu} - \partial^\mu J_\mu - ie\left(\bar{\eta}\frac{\delta W}{\delta\bar{\eta}} - \eta\frac{\delta W}{\delta\eta}\right)\right] e^{iW} = 0$$

$$-\frac{1}{\xi}\Box\partial^\nu\frac{\delta W}{\delta J^\nu} - \partial^\mu J_\mu - ie\left(\bar{\eta}\frac{\delta W}{\delta\bar{\eta}} + \frac{\delta W}{\delta\eta}\eta\right) = 0$$

Fazemos então uma generalização da definição para as funções de vértice, usando a transformação de Legendre mas três variáveis:

$$\Gamma[\psi_{cl}, \bar{\psi}_{cl}, A^{cl}_\mu] = W[\eta, \bar{\eta}, J_\mu] - \int d^4x\left(\bar{\eta}\psi_{cl} + \bar{\psi}_{cl}\eta + J^\mu A^{cl}_\mu\right)$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta A^{a}_{\nu}} = -J^{\nu} \qquad \frac{\delta W}{\delta J_{\nu}} = A^{\nu}_{a}$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \psi_a} = \overset{*}{+}\bar{\eta} \qquad \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}} = \psi_a$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}_a} = -\eta \qquad \frac{\delta W}{\delta \eta} = \overset{*}{-}\bar{\psi}_a$$

* parece errado no Ryder

* tem um i na derivada em A e um sinal errado entre os fermiônicos

$$\boxed{-\frac{1}{\xi}\,\Box\,\partial^{\nu}A^{a}_{\nu} + \partial^{\nu}\frac{\delta \Gamma}{\delta A^{a}_{\nu}} - ie\left(\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi_a}\psi_a + \bar{\psi}_a\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}}\right) = 0}$$

alguns autores se referem a esta equação como Ward Takahashi ou W-T Generalizada

(eq. 112.1)

Esta relação entre os geradores das funções de vértice garante a invariância de gauge de Z em todas as ordens de perturbação. A partir dela podemos obter algumas relações mais conhecidas:

(I) aplicando as derivadas abaixo de ambos os lados de 112.1

$$\frac{\delta}{\delta\psi_a(y_1)}\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}_a(x_1)}\Big(\qquad \text{''} \qquad \Big) \qquad 0 \,/\, \psi = \bar{\psi} = 0$$

$$\frac{\delta}{\delta\psi_a(y_1)}\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}_a(x_1)}\left[\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi_a(x)}\psi_a(x)\right] = \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}_a(x_1)}\left[\delta(x-y_1)\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi_a(x)} + \dots\right] = -\delta(x-y_1)\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi_a(x)\,\delta\bar{\psi}_a(x_1)} + \dots$$

$$\frac{\delta}{\delta\psi_a(y_1)}\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}_a(x_1)}\left[\bar{\psi}_a(x)\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}_a(x)}\right] = \frac{\delta}{\delta\psi_a(y_1)}\left[\delta(x-x_1)\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}_a(x)} + \dots\right] = \delta(x-x_1)\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi_a(y_1)\,\delta\bar{\psi}_a(x)}$$

e então fazemos: $\bar{\psi}_a = \psi_a = A^{a}_{\nu} = 0$

$$\partial^{\nu}_{x}\underbrace{\frac{\delta^3\Gamma[0]}{\delta\psi_a(y_1)\,\delta\bar{\psi}_a(x_1)\,\delta A^{a}_{\nu}(x)}}_{\Gamma^{(3)}_{ij;\nu}(y_1,x_1;x)} = +ie\left(-\delta(x-y_1)\underbrace{\frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta\psi_a(x)\,\delta\bar{\psi}_a(x_1)}}_{[S^c_F(x-x_1)]^{-1}} + \delta(x-x_1)\underbrace{\frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta\psi_a(y_1)\,\delta\bar{\psi}_a(x)}}_{[S^c_F(y_1-x)]^{-1}}\right)$$

$$\boxed{\partial^{\nu}_{x}\,\Gamma^{(3)}_{ij;\nu}(y_1,x_1;x) = ie\,\delta(x-x_1)\left[S^c_F(y_1-x)\right]^{-1} - ie\,\delta(x-y_1)\left[S^c_F(x-x_1)\right]^{-1}}$$

(eq. 112.2)

Passando para o espaço dos momentos temos:

$$\int d^4x\, d^4y_1\, d^4x_1\, e^{ip_1y_1} e^{-ip_2x_1} e^{ikx}\, \delta(x-x_1)\left[S_F^{<}(y_1-x)\right]^{-1} =$$

$$= \int d^4x\, d^4y_1\, d^4x_1\, e^{ip_1y_1} e^{-ip_2x_1} e^{ikx}\, \delta(x-x_1) \int \frac{d^4p_1'}{(2\pi)^4} e^{-ip_1'(y_1-x)} \left[S_F^{<}(p_1')\right]^{-1} =$$

$$= \int d^4y_1\, d^4x_1\, e^{ip_1y_1} e^{-ip_2x_1} e^{ikx_1} \int \frac{d^4p_1'}{(2\pi)^4} e^{-ip_1'(y_1-x_1)} \left[S_F^{<}(p_1')\right]^{-1} =$$

$$= (2\pi)^4 \int d^4p_1'\, \delta(p_1-p_1')\, \delta(-p_2+k+p_1') \left[S_F^{<}(p_1')\right]^{-1} = (2\pi)^4\, \delta(k+p_1-p_2) \left[S_F^{<}(p_1)\right]^{-1}$$

$$\int d^4x\, d^4y_1\, d^4x_1\, e^{ip_1y_1} e^{-ip_2x_1} e^{ikx}\, \delta(x-y_1)\left[S_F^{<}(x-x_1)\right]^{-1} =$$

$$= \int d^4x\, d^4y_1\, d^4x_1\, e^{ip_1y_1} e^{-ip_2x_1} e^{ikx}\, \delta(x-y_1) \int \frac{d^4p_1'}{(2\pi)^4} e^{-ip_1'(x-x_1)} \left[S_F^{<}(p_1')\right]^{-1} =$$

$$= \int d^4y_1\, d^4x_1\, e^{ip_1y_1} e^{-ip_2x_1} e^{iky_1} \int \frac{d^4p_1'}{(2\pi)^4} e^{-ip_1'(y_1-x_1)} \left[S_F^{<}(p_1')\right]^{-1} =$$

$$= (2\pi)^4 \int d^4p_1'\, \delta(p_1+k-p_1')\, \delta(-p_2+p_1') \left[S_F^{<}(p_1')\right]^{-1} = (2\pi)^4\, \delta(p_1+k-p_2) \left[S_F^{<}(p_2)\right]^{-1}$$

$$\int d^4x\, d^4y_1\, d^4x_1\, e^{ip_1y_1} e^{-ip_2x_1} e^{ikx}\, \partial_x^{\nu}\, \Gamma^{(3)}_{i j;\nu}(y_1,x_1;x) = -k^{\nu}\, \Gamma^{(3)}_{i j;\nu}(p_1,-p_2;k)$$

$$-k^{\nu}\, \Gamma^{(3)}_{i j;\nu}(p_1,-p_2;k) = ie(2\pi)^4\, \delta(k+p_1-p_2) \left\{ \left[S_F^{<}(p_1)\right]^{-1} - \left[S_F^{<}(p_2)\right]^{-1} \right\}$$

$$-ik^{\nu}\, \Gamma^{(3)}_{i j;\nu}(p_1,-p_2;k) = e(2\pi)^4\, \delta(k+p_1-p_2) \left\{ \left[S_F^{<}(p_1+k)\right]^{-1} - \left[S_F^{<}(p_1)\right]^{-1} \right\}$$

Da forma como está definida, $\Gamma^{(3)}_{i j;\nu}$ contém a carga e conservação de momento, para separar estes de forma explícita:

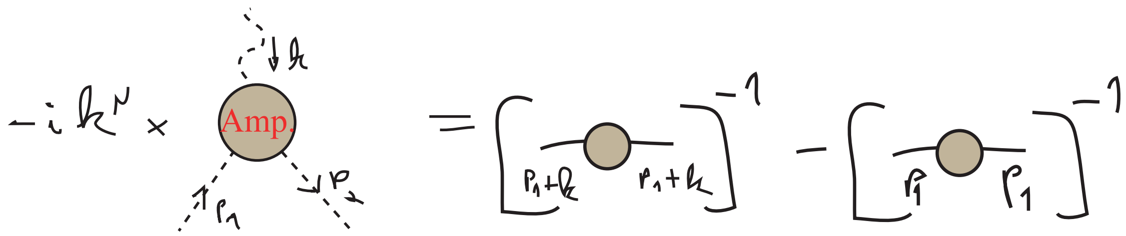
$$\Gamma^{(3)}_{ij;\mu}(p_1,-p_2;k) \equiv e\,(2\pi)^4\,\delta^4(p_1+k-p_2)\,\Gamma^{QED(3)}_{ij;\mu}(p_1,p_2;k)$$

$$\boxed{-i k^\mu\,\Gamma^{QED(3)}_{ij;\mu}(p_1,p_2;k) = \left[S_F^c(p_1+k)\right]^{-1} - \left[S_F^c(p_1)\right]^{-1}}$$

(eq. 114.1)

Identidade de Ward-Takahashi

Que, em diagramas, fica:

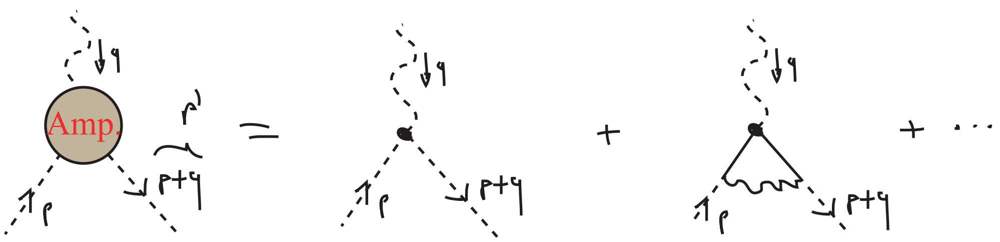


A partir da equação 114.1 podemos fazer outras combinações de derivações funcionais para obter relações entre diagramas com mais pontos ou diferentes campos.

Correções Radiativas na QED

Função de Vértice

(Peskin secs 6.2 e 6.3)



$$-ie\Gamma^\mu = -ie\gamma^\mu + \ldots$$

Considerando simplesmente a estrutura de Lorentz e a restrição oriunda da indentidade de Ward, podemos escrever uma forma geral para a função de vértice (veja Peskin, pg 186)

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu \underbrace{F_1(q^2)} + i\frac{\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}\underbrace{F_2(q^2)}$$

$$\boxed{\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]}$$

Fatores de Forma

L.O. $\rightarrow$ $\boxed{\begin{aligned} F_1^{LO}(q^2) &= 1 \\ F_2^{LO}(q^2) &= 0 \end{aligned}}$ (eq. 114.2)

L.O. - leading order (primeira contrib. não nula em teoria de perturbação)