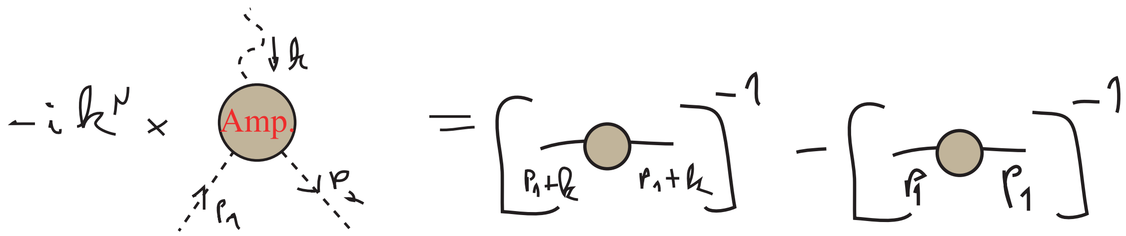
$$\Gamma^{(3)}_{ij;\mu}(p_1,-p_2;k) \equiv e\,(2\pi)^4\,\delta^4(p_1+k-p_2)\,\Gamma^{QED(3)}_{ij;\mu}(p_1,p_2;k)$$

$$\boxed{-ik^{\mu}\,\Gamma^{QED(3)}_{ij;\mu}(p_1,p_2;k) = \left[S_F^{c}(p_1+k)\right]^{-1} - \left[S_F^{c}(p_1)\right]^{-1}} \qquad \text{(eq. 114.1)}$$

Identidade de Ward-Takahashi

Que, em diagramas, fica:

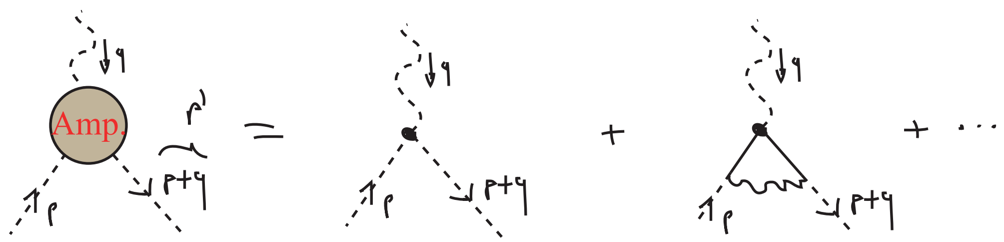


A partir da equação 114.1 podemos fazer outras combinações de derivações funcionais para obter relações entre diagramas com mais pontos ou diferentes campos.

Correções Radiativas na QED

Função de Vértice

(Peskin secs 6.2 e 6.3)



$$-ie\Gamma^{\mu} = -ie\gamma^{\mu} + \ldots$$

Considerando simplesmente a estrutura de Lorentz e a restrição oriunda da indentidade de Ward, podemos escrever uma forma geral para a função de vértice (veja Peskin, pg 186)

$$\Gamma^{\mu} = \gamma^{\mu}\,F_1(q^2) + i\,\frac{\sigma^{\mu\nu}q_{\nu}}{2m}\,F_2(q^2)$$

$$\boxed{\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\right]}$$

Fatores de Forma

L.O. $\rightarrow$
$$\boxed{\begin{aligned} F_1^{LO}(q^2) &= 1 \\ F_2^{LO}(q^2) &= 0 \end{aligned}} \qquad \text{(eq. 114.2)}$$

L.O. - leading order (primeira contrib. não nula em teoria de perturbação)

Tanto F_1 quanto F_2 têm interpretação física. O espalhamento em um potencial eletrostático é dado por:

$$A_\mu^{EXT}(x) = (\phi(\vec{x}), 0, 0, 0) \qquad A_\mu^{EXT}(q) = (2\pi\,\delta(q^0)\,\tilde{\phi}(\vec{q}), 0, 0, 0)$$

estático e varia muito pouco no espaço

$$i\mathcal{M} = -ie\,\bar{u}(p')\,\Gamma^0\,u(p)\,\tilde{\phi}(\vec{q})$$

(para lembrar como tratamos um potencial externo clássico, ver problema 4.4 do Peskin)

$$\hookrightarrow \sim \delta(q)$$

$$q \to 0 \Rightarrow \Gamma^0 = \gamma^\mu F_1(0)$$

$$i\mathcal{M} = -ie\,F_1(0)\,\bar{u}(p')\,\gamma^\mu\,u(p)$$

De onde vemos que $F_1(0)$ é a carga do elétron, em unidades de e. $\Rightarrow$ $\boxed{F_1(0) = 1}$

(eq. 115.1)

$$\left(\begin{array}{c} F_1(q^2) = \underbrace{F_1^{LO}(q^2)}_{1} + F_1^{>LO}(q^2) \\ \underbrace{F_1(0)}_{1} = 1 + \underbrace{F_1^{>LO}(0)}_{0} \end{array} \right)$$

Como ele já é 1 em primeira ordem pert., vemos que as correções a este fator devem ser 0 para $q^2 = 0$

O mesmo pode ser feito para F_2 em um campo vetorial constante:

$$A_\mu^{EXT}(x) = (0, \vec{A}(\vec{x}))$$

$$i\mathcal{M} = -ie\,\bar{u}(p')\,\Gamma^i\,u(p)\,A^i(\vec{q})$$

$$i\mathcal{M} = -ie\,\bar{u}(p')\,\Gamma^i\,u(p)\,A^i(\vec{q})$$

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\xi \end{pmatrix}$$

$q \to 0$

$\sim$ N RELATIVIST.

$$i\mathcal{M} = -i(2m)\cdot e\,\xi'^{\dagger}\left(-\frac{1}{2m}\sigma^k\left[\underbrace{F_1(0)}_{1} + F_2(0)\right]\right)\xi\,\underbrace{\left(-i\epsilon^{ijk}\,q^i A^j(\vec{q})\right)}_{B^k(\vec{q})}$$

comparando com a aprox. de Born

$$(2\pi)^4\,\delta^{(4)}(p-p')\,i\mathcal{M} = \langle p'|\,iT\,|p\rangle = -i\,\tilde{V}(q)\,2\pi\,\delta(E_{p'}-E_p)$$

$\hookrightarrow$ A MENOS DE UM FATOR $(2m)\,\delta^{(3)}(p-p')$

$$V(\vec{x}) = -\underbrace{\langle\vec{\mu}\rangle}_{\text{Momento magnético do elétron}}\cdot\vec{B}(x)$$

$$\langle\vec{\mu}\rangle = \frac{e}{m}\left[1+F_2(0)\right]\xi'^{\dagger}\frac{\vec{\sigma}}{2}\xi$$

SPIN DO e^-

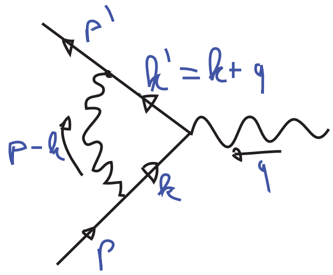
Se escrevermos o momento magnético da forma usual: $\vec{\mu} = g\left(\frac{e}{2m}\right)\vec{S}$

$$\boxed{g = 2+2F_2(0)}$$

Vimos (eq 114.2) que F2 = 0 em primeira ordem pert. portanto g = 2 nesta ordem. Mas ele será corrigido em ordens superiores:

$$g = 2 + \underbrace{\mathcal{O}(\alpha)}_{\text{Momento magnético anômalo do elétron}} + \dots$$

Vamos calcular as correções de primeira ordem ao vértice: $\Gamma^\mu = \gamma^\mu + \delta\Gamma^\mu$



Lembrando sempre que isto aparece em:

$$\bar{u}(p')\left(-ie\,\delta\Gamma^\mu\right)u(p)\,\frac{(-i)g_{\mu\beta}}{q^2}\dots$$

$$\delta\Gamma^\mu = \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{-i\,g_{\nu\rho}}{(k-p)^2+i\varepsilon}\,(-ie\gamma^\nu)\,\frac{i(\not{k}'+m)}{k'^2-m^2+i\varepsilon}\,\gamma^\mu\,\frac{i(\not{k}+m)}{k^2-m^2+i\varepsilon}\,(-ie\gamma^\rho) =$$

$$\gamma_\rho\gamma^\mu\gamma^\rho = -2\gamma^\mu$$

$$\gamma^\mu\not{k} = \gamma^\mu\gamma^\nu k_\nu = \left[2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu\gamma^\mu\right]k_\nu = 2k^\mu - \not{k}\gamma^\mu$$

$$-m\left(\gamma^\mu\not{k} + \not{k}\gamma^\mu + \gamma^\mu\not{k}' + \not{k}'\gamma^\mu\right) = -m\left(2k^\mu + 2k'^\mu\right) = -2m(k+k')^\mu$$

$$= 2ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\left[\not{k}\gamma^\nu \not{k}' + m^2\gamma^\nu - 2m(k+k')^\nu\right]}{\left[(k-p)^2 + i\varepsilon\right]\left[k'^2 - m^2 + i\varepsilon\right]\left[k^2 - m^2 + i\varepsilon\right]}$$

(eq. 117.1)

Para fazer esta integral usaremos o método conhecido como parametrização de Feynman. A idéia é transformar o denominador acima em um único polinômio de grau 2 em k (que por sua vez estará elevado a 3). Fica fácil ver com fazemos isso no caso da integral simples:

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{\left[xA + (1-x)B\right]^2} = \int_0^1 dx\, dy\, \delta(x+y-1) \frac{1}{\left[xA + yB\right]^2}$$

parâmetros de Feynman

Que poderia ser usada para integrar:

$$\int d^4k \frac{1}{(k-p)^2(k^2-m^2)} = \int d^4k \int_0^1 dx\, dy\, \delta(x+y-1) \frac{1}{\left[x(k-p)^2 + y(k^2-m^2)\right]^2} =$$

$$= \int d^4k \int_0^1 dx\, dy\, \delta(x+y-1) \frac{1}{\left[\underbrace{(x+y)}_{1}k^2 - 2x\, k\cdot p + xp^2 - m^2 y\right]^2}$$

$$l \equiv k - xp \qquad \Rightarrow \left[l^2 - m^2 y\right]$$
$$d^4k = d^4l$$

ficaria bem fácil fazer a integral em L, uma vez que é esfericamente simétrica

Temos uma identidade mais geral para o caso de vários fatores no denominador:

$$\frac{1}{A_1 A_2 \cdots A_n} = \int_0^1 dx_1 \ldots dx_n\, \delta\left(\sum x_i - 1\right) \frac{(n-1)!}{\left[x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_nA_n\right]^n}$$

(eq. 117.2)

Aplicando isso ao denominador de 117.1 temos:

$$\frac{1}{\left[(k-p)^2+i\varepsilon\right]\left[k'^2-m^2+i\varepsilon\right]\left[k^2-m^2+i\varepsilon\right]} = \int_0^1 dx\,dy\,dz\,\delta(x+y+z-1)\,\frac{2}{D^3}$$

$$D = x\left[k^2-m^2+i\varepsilon\right] + y\left[\overset{(k+q)^2}{k'^2}-m^2+i\varepsilon\right] + z\left[(k-p)^2+i\varepsilon\right] =$$

$$= x(k^2-m^2) + y(k^2+2k\cdot q+q^2-m^2) + z(k-p)^2 + \underbrace{(x+y+z)}_{1}\,i\varepsilon =$$

$$= xk^2 - xm^2 + yk^2 + 2y\,k\cdot q + yq^2 - ym^2 + zk^2 - 2z\,k\cdot p + zp^2 + i\varepsilon =$$

$$= \underbrace{k^2 + 2y\,k\cdot q - 2z\,k\cdot p}_{} + zp^2 + yq^2 - xm^2 - ym^2 + i\varepsilon =$$

$$\ell = k + yq - zp$$

$$= \ell^2 + \underbrace{2yz\,p\cdot q - z^2p^2 - y^2q^2 + zp^2 + yq^2 - xm^2 - ym^2}_{} + i\varepsilon =$$

$$= \ell^2 + i\varepsilon - \Delta$$

"a bit of algebra"

$$-\Delta = 2yz\,p\cdot q - z^2\overbrace{p^2}^{m^2} - y^2q^2 + z\overbrace{p^2}^{m^2} + yq^2 - xm^2 - ym^2 =$$

$$p\cdot q = p\cdot(p'-p) = p\cdot p' - p^2 = p\cdot p' - m^2$$

$$= 2yz\,p\cdot p' - 2yz\,m^2 - z^2m^2 - y^2q^2 + zm^2 + yq^2 - xm^2 - ym^2 =$$

$$= m^2\left(-2yz + z - x - y - z^2\right) + \underline{2yz\,p\cdot p'} - y^2q^2 + yq^2 =$$

$$q^2 = (p'-p)^2 = \underbrace{p'^2 + p^2}_{2m^2} - 2p\cdot p'$$

$$\to 2p\cdot p' = 2m^2 - q^2$$

$$= m^2\Big(-\cancel{2yz} + \underbrace{z \overbrace{-x-y}^{z-1} - z^2}_{-(1-z)^2} + \cancel{2yz}\Big) + (\underbrace{-yz - y^2 + y}_{xy})q^2 =$$

$$= -(1-z)^2 m^2 + xy\,q^2$$

$q^2 < 0$

$$\Delta = -xy\,q^2 + (1-z)^2 m^2 > 0$$

$$D = \ell^2 + i\varepsilon - \Delta = \ell^2 + i\varepsilon + xy\,q^2 - (1-z)^2 m^2$$

$$\delta\Gamma^\mu = 2ie^2 \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx\,dy\,dz\,\delta(x+y+z-1)\,\frac{2}{D^3}\,[m]$$

Falta fazer a mudança de variáveis no numerador

$$[m] = [\not{k}\gamma^\mu \not{k}' + m^2\gamma^\mu - 2m(k+k')^\mu]$$

Isso envolve um bocado de álgebra, é necessário lembrar que:

$$(\mathrm{I}) \quad D = D(\ell^2) \Rightarrow \begin{cases} \displaystyle\int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell^\mu}{D^3} = 0 \\ \displaystyle\int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell^\mu \ell^\nu}{D^3} = \frac{1}{4}\int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{g^{\mu\nu}\ell^2}{D^3} \end{cases}$$

(II) $[m]$ está entre espinores: $\bar{u}(p')[m]u(p)$

portanto podemos trocar $\not{p}\,u(p) = m\,u(p)$

De resto é só usar relações de comutação e as relações entre os momentos para chegar em:

$$[m] = \Big[\gamma^\mu\Big(-\frac{1}{2}\ell^2 + (1-x)(1-y)q^2 + (1-2z-z^2)m^2\Big) + (p'^\mu + p^\mu)\cdot m\,z(z-1) \; -$$

$$+ q^\mu \cdot \underbrace{m(z-2)(x-y)}\Big]$$

pois é ímpar sobre a troca $x \leftrightarrow y$ (todo o resto da integral é par)

Usando a identidade de Gordon:

$$\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p')\left[\frac{p'^\mu + p^\mu}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}\right]u(p)$$

podemos fazer: $p'^\mu + p^\mu \longrightarrow 2m\gamma^\mu - i\sigma^{\mu\nu}q_\nu$

obtendo:

$$\delta\Gamma^\mu = 2ie^2\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\int_0^1 dx\,dy\,dz\,\delta(x+y+z-1)\,\frac{2}{D^3}\times$$

$$\times\left[\gamma^\mu\left(-\frac{1}{2}l^2 + (1-x)(1-y)q^2 + (1-4z+z^2)m^2\right) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}\left(2m^2 z(1-z)\right)\right]$$

(eq. 120.1)

pg. 27

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}F_2(q^2)$$

Fica bem mais fácil fazer a integral em l caso possamos passar para coordenadas esféricas em 4D, podemos fazer isso se passarmos para o espaço Euclideano por meio de uma rotação de Wick

$$l^0 = i\,l^0_E \qquad\qquad d^4l = i\,dl^0_E\,d^3\vec{l}_E = i\,d^4l_E$$

$$\vec{l} = \vec{l}_E$$

$$l^2 = -(l^0_E)^2 - (\vec{l}_E)^2 = -l_E^2$$

$$\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\frac{1}{[l^2-\Delta]^m} = i\int\frac{d^4l_E}{(2\pi)^4}\frac{1}{[-l_E^2-\Delta]^m} = \frac{i}{(-1)^m}\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4l_E\,\frac{1}{[l_E^2+\Delta]^m} =$$

$$= \frac{i(-1)^m}{(2\pi)^4} \underbrace{\int d\Omega_4}_{2\pi^2} \underbrace{\int_0^\infty dl_E \frac{l_E^3}{[l_E^2+\Delta]^m}}_{} =$$

$\mu = l_E^2 + \Delta$

$d\mu = 2 l_E \, dl_E$

$$\Rightarrow \int_\Delta^\infty \frac{d\mu}{2} \frac{\mu - \Delta}{(\mu)^m} = \frac{1}{2} \frac{\Delta^{2-m}}{(m-1)(m-2)}$$

$$\boxed{m \geq 3}$$

$$= \frac{i(-1)^m}{(2\pi)^4} 2\pi^2 \frac{1}{2} \frac{\Delta^{2-m}}{(m-1)(m-2)} = \frac{i(-1)^m}{(4\pi)^2} \frac{1}{(m-1)(m-2)} \frac{1}{\Delta^{m-2}}$$

(eq. 121.1)

$$\boxed{m \geq 3}$$

$$\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{l^2}{[l^2-\Delta]^m} = i \int \frac{d^4 l_E}{(2\pi)^4} \frac{-l_E^2}{[-l_E^2-\Delta]^m} = \frac{i(-1)^{m+1}}{2^3\pi^2} \underbrace{\int_0^\infty dl_E \frac{l_E^5}{[l_E^2+\Delta]^m}}_{\int_\Delta^\infty \frac{d\mu}{2}\frac{(\mu-\Delta)^2}{\mu^m} = \frac{\Delta^{3-m}}{(m-3)(m-2)(m-1)}} =$$

$$\boxed{m \geq 4}$$

$$= \frac{i(-1)^{m+1}}{(4\pi)^2} \frac{2}{(m-3)(m-2)(m-1)} \frac{1}{\Delta^{m-3}}$$

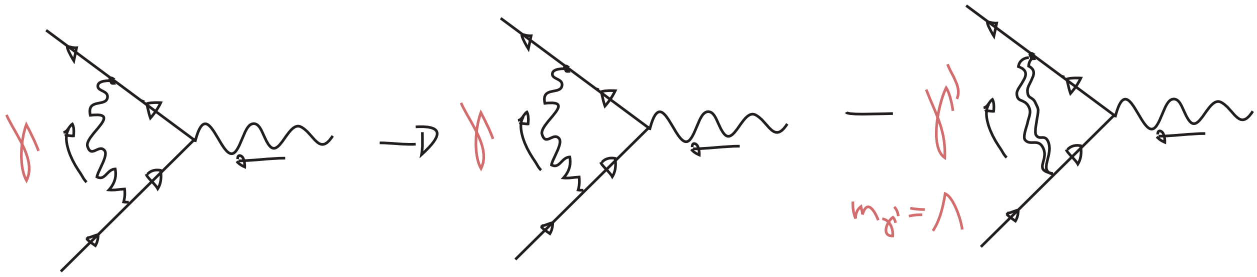
(eq. 121.2)

Aqui temos um problema, já que estamos justamente interessados em integrar termos com D^3 no denominador e a integral é divergente neste caso

$$\int_\Delta^\infty d\mu \frac{\mu^2 - 2\mu\Delta + \Delta^2}{\mu^3} = \lim_{K\to\infty} \ln\left[\frac{K}{\Delta}\right]$$

Estudaremos o significado desta divergência em breve. Por enquanto vamos dar um jeito de isolar esta divergência na integral, este procedimento é chamado de regularização e existem muitas técnicas diferentes para executá-la. O importante é não confundir este procedimento com a renormalização, tudo que a regularização faz é colocar a resposta numa forma em que a divergência fique mais fácil de analisar, separada de uma parte finita (o que ajuda muito na hora de renormalizar). O método que usaremos é conhecido como regularização de Pauli-Villars e consiste em introduzir uma nova partícula fictícia de massa Λ. Nosso objetivo é fazer a seguinte modificação no propagador do fóton que está no loop:

$$\frac{1}{(k-p)^2+i\varepsilon} \longrightarrow \frac{1}{(k-p)^2+i\varepsilon} - \frac{1}{(k-p)^2-\Lambda^2+i\varepsilon}$$



Note que recuperamos o propagador usual fazendo $\Lambda^2 \to \infty$

mas para $k^2 \gg \Lambda^2$ podemos deprezar Λ^2 e os dois propagadores se cancelam.

Se voltarmos na pg 118 vemos que ganhamos uma nova contribuição em que a única mudança introduzida é (nada muda nos numeradores):

$$\Delta_\Lambda = -xyq^2+(1-z)^2m^2+z\Lambda^2$$

De forma que agora temos:

$$\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\left(\frac{l^2}{[l^2-\Delta]^3}-\frac{l^2}{[l^2-\Delta_\Lambda]^3}\right)=\frac{2i}{(4\pi)^2}\int_0^\infty dl_E\left(\frac{l_E^5}{[l_E^2+\Delta]^3}-\frac{l_E^5}{[l_E^2+\Delta_\Lambda]^3}\right)=$$

$$=\frac{2i}{(4\pi)^2}\lim_{K\to\infty}\left[\int_\Delta^K\frac{du}{2}\left(\frac{u^2-2u\Delta+\Delta^2}{u^3}\right)-\int_{\Delta_\Lambda}^K\frac{du}{2}\left(\frac{u^2-2u\Delta_\Lambda+\Delta_\Lambda^2}{u^3}\right)\right]=$$

$$=\frac{i}{(4\pi)^2}\lim_{K\to\infty}\left[\ln\left[\frac{K}{\Delta}\right]+\frac{3}{2}-2\frac{\Delta}{K}+\frac{\Delta^2}{2K^2}-\left(\ln\left[\frac{K}{\Delta_\Lambda}\right]+\frac{3}{2}-2\frac{\Delta_\Lambda}{K}+\frac{\Delta_\Lambda^2}{2K^2}\right)\right]=$$

$$=\frac{i}{(4\pi)^2}\ln\left[\frac{\Delta_\Lambda}{\Delta}\right]$$

As integrais finitas mudam da seguinte forma:

eq 121.1 / m = 3

$$\int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4}\left(\frac{1}{[\ell^2-\Delta]^3}-\frac{1}{[\ell^2-\Delta_\Lambda]^3}\right)=-\frac{i}{2(4\pi)^2}\left(\frac{1}{\Delta}-\underbrace{\frac{1}{\Delta_\Lambda}}_{O(\Lambda^2)}\right)$$

podemos ignorar esta modificação se $\Lambda >> 1$

Voltando com os resultados das integrais na equação 120.1, temos:

$$\delta\Gamma^\mu = \cancel{2}\cancel{i}e^2\int_0^1 dx\,dy\,dz\,\delta(x+y+z-1)\,\frac{\cancel{i}}{(4\pi)^2}\left\{\gamma^\mu\left[+\frac{1}{\cancel{2}}\ln\left[\frac{\Delta_\Lambda}{\Delta}\right]+\frac{1}{\cancel{2}\Delta}\left((1-x)(1-y)q^2\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+(1-4z+z^2)m^2\right)\right]+\frac{1}{\cancel{2}\Delta}\,\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}\left(2m^2z(1-z)\right)\right]$$

$\to F_2$

$$\boxed{\Delta_\Lambda \underset{\Lambda>>1}{\sim} z\Lambda^2}$$

$$\boxed{\frac{e^2}{4\pi}=\alpha}$$ constante de estrutura fina

$$\boxed{\delta\Gamma^\mu = \gamma^\mu\,\delta F_1(q^2)+\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}\,\delta F_2(q^2)}$$

(eq. 123.1)

$$\boxed{\delta F_1(q^2)=\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)\int_0^1 dx\,dy\,dz\,\delta(x+y+z-1)\left\{\ln\left[\frac{z\Lambda^2}{\Delta}\right]+\frac{1}{\Delta}\left[(1-x)(1-y)q^2+(1-4z+z^2)m^2\right]\right\}}$$

(eq. 123.2)

$$\boxed{\delta F_2(q^2)=\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)\int_0^1 dx\,dy\,dz\,\delta(x+y+z-1)\,\frac{1}{\Delta}\,2m^2z(1-z)}$$

(eq. 123.3)