

$$\int \frac{d^3 \ell}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{[\ell^2 - \Delta]^3} - \frac{1}{[\ell^2 - \Delta_\Lambda]^3} \right) \stackrel{\text{eq 121.1 / m=3}}{=} -\frac{i}{2(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Delta_\Lambda} \right)$$

$\mathcal{O}(\Lambda^2)$ ←

podemos ignorar esta modificação se $\Lambda \gg 1 \Delta$

Voltando com os resultados das integrais na equação 120.1, temos:

$$\delta \Gamma^N = 2i e^2 \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \gamma^\mu \left[\frac{1}{2} \ln \left[\frac{\Delta_\Lambda}{\Delta} \right] + \frac{1}{2\Delta} \left((1-x)(1-y)q^2 + (1-yz + yz^2) m^2 \right) \right] \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\Delta} \frac{i \sigma^{\mu\nu} q_\nu (2m^2 z(1-z))}{2m} \right]$$

$\rightarrow F_2$

$$\Delta_\Lambda \underset{\Lambda \gg 1}{\sim} \Delta \approx \Lambda^2$$

$$\frac{e^2}{4\pi} = \alpha$$

constante de estrutura fina

$$\delta \Gamma^N = \gamma^\mu \delta F_1(q^2) + \frac{i \sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \delta F_2(q^2)$$

(eq. 123.1)

$$\delta F_1(q^2) = \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \ln \left[\frac{\Lambda^2}{\Delta} \right] + \frac{1}{\Delta} \left[(1-x)(1-y)q^2 + (1-yz + yz^2) m^2 \right] \right\}$$

(eq. 123.2)

$$\delta F_2(q^2) = \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{1}{\Delta} 2m^2 z(1-z)$$

(eq. 123.3)

Recapitulando o método usado:

- (1) Usamos os **diagramas de Feynman** para escrever a amplitude
- (2) Combinamos os denominadores dos propagadores usando os **parâmetros de Feynman**
- (3) Completamos quadrados no denominador, mudando a variável de integração para ℓ (somando uma constante a k)
- (4) Passamos o **numerador para ℓ** e notamos que as integrais das potências ímpares são nulas. As potências pares são escritas em termos de ℓ^2, ℓ^4, \dots (o uso da equação de movimento ajuda muito a simplificação do numerador)
- (5) fazemos a **rotação de Wick** e integramos no espaço Euclideo. Caso as integrais sejam divergentes, usamos algum tipo de **regularização**.

Notamos que $\int \bar{F}_2$ não tem qualquer divergência, de fato podemos calculá-lo:

$$\begin{aligned} \int \bar{F}_2(0) &= \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{2k^2 y(1-z)}{(1-y)^2 m^2} = \\ & \quad \swarrow x_0 = 1-y-z \\ & \quad 0 < x_0 < 1 \Rightarrow 0 < 1-y-z < 1 \Rightarrow 1-z > y > -z \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{2y}{1-y} = \frac{\alpha}{2\pi} \approx 0,0011617 \end{aligned}$$

O valor experimental atual é 0,00115965218073 (28) - tão preciso que é necessário considerar as correções $O(\alpha^4)$. Uma vez consideradas, estas correções concordam com este valor em $1/10^8$

$\int \bar{F}_1$, no entanto, contém divergências de dois tipos. A primeira, e mais óbvia, está ligada a grandes momentos no loop e é chamada de **divergência ultravioleta**. Na expressão que obtivemos ela aparece quando retiramos a partícula fictícia da teoria, fazendo:

$$\begin{aligned} \Lambda &\rightarrow \infty \\ \int \bar{F}_1 &\sim L_N \left[\frac{\Lambda}{\Delta} \right] \end{aligned}$$

A outra está associada a momentos muito pequenos do fóton no loop, e é chamada de **divergência no infravermelho**. Ela fica evidente se tomarmos, por exemplo, o seguinte termo de F_1 e fizermos $q = 0$

$$\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{1}{\Delta} \left[(1-y+z^2) m^2 \right] \quad \Delta = -2xy q^2 + (1-y)^2 m^2$$

$$q^2=0 \Rightarrow \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{(1-y+z)^2}{(1-y)^2} =$$

$$= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{-2 + (1-z)(3-z)}{(1-y)^2} = \int_0^1 dz \frac{-2 + (1-z)(3-z)}{(1-z)}$$

→ problema em $z=1$

É relevante notar que esta divergência não existiria caso o fóton tivesse uma massa μ , já que nesse caso teríamos:

$$\Delta(q^2) = -xy q^2 + (1-y)m^2 + y\mu^2 \Rightarrow \Delta(q^2=0) = (1-y)m^2 + y\mu^2$$

De fato, divergências infravermelhas estão ligadas a partículas sem massa (e o quão fácil é produzi-las) e aparecerão em teorias que as contenham.

Divergência Infravermelha

Começaremos pela divergência de baixas energias. Para facilitar a discussão, vamos assumir que a divergência ultravioleta foi devidamente "resolvida", por enquanto isso significa forçar a condição da eq. 115.1:

$$F_1(0) = 1$$

$$\text{Como: } F_1(q^2) = \underbrace{F_1^e(q^2)}_1 + \underbrace{\delta F_1(q^2)}_{O(\epsilon^3)} + \dots$$

Precisamos que a correção se anule para $q^2=0$. O jeito mais rápido de conseguir isso é redefinindo a correção para subtrair o infinito:

$$\delta F_1'(q^2) = \delta F_1(q^2) - \delta F_1(0)$$

Com isso obtemos

$$\delta F_1'(q^2) = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \ln \left[\frac{z\Lambda^2}{\Delta} \right] + \frac{1}{\Delta} \left[(1-x)(1-y)q^2 + (1-y+z)^2 m^2 \right] \right.$$

$$\left. - \ln \left[\frac{z\Lambda^2}{\Delta_0} \right] - \frac{1}{\Delta_0} \left[(1-y+z)^2 m^2 \right] \right\} =$$

$$\Delta_0 = (1-y)^2 m^2$$

$$= \left(\frac{\kappa}{2\pi}\right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \ln \left[\frac{\Delta_0}{\Delta} \right] + \frac{(1-x)(1-y)q^2 + (1-yz+z^2)m^2}{(1-z)^2 m^2 - xyq^2} + \right. \\ \left. - \frac{(1-yz+z^2)m^2}{m^2(1-z)^2} \right\}$$

É claro que a esta altura esta subtração "a força" é totalmente arbitrária e nos deixa com uma profunda sensação de injustiça, mas quando tratarmos da divergência ultravioleta veremos que ela é justificada. Portanto aguarde mais um pouco.

Voltando à divergência infravermelha, vimos que esta não existe no caso de um fóton com massa. Portanto, uma forma de "regularizar" esta divergência é dar uma pequena massa μ para o fóton depois ver o que acontece quando fazemos o limite $\mu \rightarrow 0$

Temos:

$$SF_1' = \left(\frac{\kappa}{2\pi}\right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \ln \left[\frac{\Delta_0 + \mu^2 z}{\Delta + \mu^2 z} \right] + \frac{(1-x)(1-y)q^2 + (1-yz+z^2)m^2}{(1-z)^2 m^2 - xyq^2 + \mu^2 z} + \right. \\ \left. - \frac{(1-yz+z^2)m^2}{m^2(1-z)^2 + \mu^2 z} \right\}$$

REGULAR
EM $\mu \rightarrow 0$

Como estamos apenas interessados no limite $\mu \rightarrow 0$ desprezaremos tudo que não diverge neste limite. A divergência vem dos termos $(1-z)^2$, portanto ela ocorre em um "canto" do espaço de parâmetros de Feynman:

$$\left. \begin{array}{l} z \sim 1 \\ x \sim 0 \\ y \sim 0 \end{array} \right\} \text{podemos fazer estas substituições no numerador e no } z \text{ que multiplica } \mu$$

$$SF_1' = \left(\frac{\kappa}{2\pi}\right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \frac{q^2 - 2m^2}{(1-z)^2 m^2 - xyq^2 + \mu^2} - \frac{-2m^2}{m^2(1-z)^2 + \mu^2} \right\} = \\ = \left(\frac{\kappa}{2\pi}\right) \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \left\{ \frac{q^2 - 2m^2}{(1-z)^2 m^2 - (1-z-y)yq^2 + \mu^2} + \frac{2m^2}{m^2(1-z)^2 + \mu^2} \right\} =$$

$$y = (1-z)\xi = w\xi$$

$$w = (1-z)$$

$$z = 1-w$$

$$dz dy = -w dw d\xi$$

$z=0 \rightarrow w=1$
 $z=1 \rightarrow w=0$

$$\Rightarrow \int_1^0 dw \int_0^1 d\xi \Rightarrow y=w \rightarrow \xi=1$$

$$y=0 \rightarrow \xi=0$$

$$= \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right) \int_0^1 w dw \int_0^1 d\xi \left\{ \frac{q^2 - 2m^2}{w^2 m^2 - w(1-\xi)\xi q^2 + N^2} + \frac{2m^2}{m^2 w^2 + N^2} \right\} =$$

$$= \left(\frac{\alpha}{4\pi} \right) \int_0^1 d\xi \int_0^1 dw^2 \left\{ \frac{q^2 - 2m^2}{w^2(m^2 - (1-\xi)\xi q^2) + N^2} + \frac{2m^2}{m^2 w^2 + N^2} \right\} =$$

$$= \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 d\xi \left[\frac{-2m^2 + q^2}{m^2 - q^2\xi(1-\xi)} \text{Log} \left(\frac{m^2 - q^2\xi(1-\xi) + N^2}{N^2} \right) + 2m^2 \frac{1}{m^2} \text{Log} \left(\frac{m^2 + N^2}{N^2} \right) \right] =$$

Para $N^2 \rightarrow 0 \Rightarrow \text{LN} \left(\frac{m^2 - q^2\xi(1-\xi)}{N^2} \right) \equiv \text{LN} \left(\frac{m^2 - q^2}{N^2} \right)$

$$= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 d\xi \left[\frac{-2m^2 + q^2}{m^2 - q^2\xi(1-\xi)} + 2 \right] \text{LN} \left(\frac{m^2 - q^2}{N^2} \right) =$$

Os detalhes do numerador não interessam, indicaremos desta forma

$$\Delta F_1 = - \frac{\alpha}{2\pi} \underbrace{\int_0^1 d\xi \left[\frac{m^2 - q^2/2}{m^2 - q^2\xi(1-\xi)} - 1 \right]}_{f_{IR}(q^2)} \text{LN} \left(\frac{m^2 - q^2}{N^2} \right)$$

Este fator de forma modifica a carga, então ele é transportado diretamente para a seção de choque:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{L.O.} \left[1 - \frac{\alpha}{\pi} f_{IR}(q^2) \text{LN} \left(\frac{m^2 - q^2}{N^2} \right) + \mathcal{O}(\alpha^2) \right]$$

↳ Resultado em "Leading Order" (primeira ordem na expansão pert.)

Como $\begin{cases} q^2 < 0 \\ 0 < \int (1-\xi) < \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow 1 < \frac{m^2 + 1q^{3/2}}{m^2 + 1q^{1/4}} < \frac{m^2 + 1q^{3/2}}{m^2 + 1q^2 \xi (1-\xi)} = \frac{m^2 - q^2}{m^2 - q^2 \xi (1-\xi)}$

$\therefore \rho_{\text{IR}}(q^2) > 0$

Portanto, não só temos uma seção de choque enorme, mas ainda por cima ela é negativa. Para entender melhor o que está acontecendo, vamos calcular f_{IR} no limite de alto q^2

$$\int_0^1 d\xi \left[\frac{m^2 - q^2/2}{m^2 - q^2 \xi (1-\xi)} - 1 \right] \xrightarrow{q^2 \rightarrow -\infty} \int_0^1 d\xi \left(\frac{-q^2/2}{m^2 - q^2 \xi (1-\xi)} - 1 \right) =$$

$$= \frac{2(-q^2)}{\sqrt{(-q^2)(-q^2+4m^2)}} \text{COTH}^{-1} \left(\sqrt{\frac{1 + \frac{4m^2}{(-q^2)}}{1 - \frac{2m^2}{q^2}}} \right) - 1 =$$

$$= \text{LN} \left(\frac{1 - 2\frac{m^2}{q^2} + 1}{1 - 2\frac{m^2}{q^2} - 1} \right) - 1 = \text{LN} \left(-\frac{q^2}{m^2} \right) - 1$$

note que abandonamos a notação $\text{LN}(-q^2/m^2)$ porque no limite de grandes $-q^2$, só estamos interessados nos coeficientes de $\text{LN}(-\frac{q^2}{m^2}) \approx \text{LN}(-q^2)$

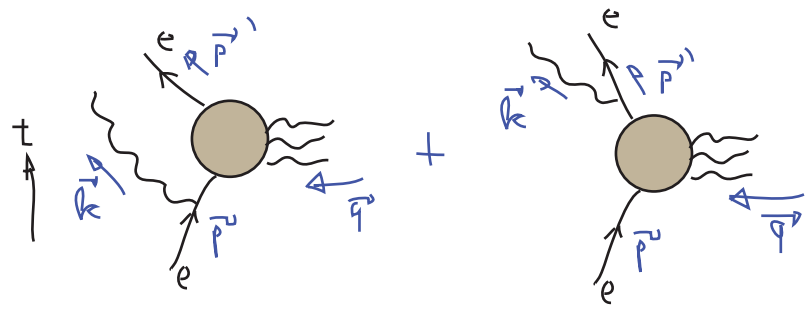
O $\text{LN}(m^2)$ é justamente o "1" que foi desprezado aqui

Temos enfim:

$$F_1(-q^2 \rightarrow \infty) = 1 - \frac{\alpha}{2\pi} \ln \left(-\frac{q^2}{m^2} \right) \ln \left(-\frac{q^2}{\mu^2} \right) + O(\alpha^2)$$

(eq. 128.1)

Esta estrutura de dois logaritmos (chamada de "Sudakov double logarithm,") aparece em outro cálculo famoso de QED, o "soft bremsstrahlung", a radiação emitida em baixas frequências por um eletron acelerado. Do ponto de vista de diagramas de Feynman, estamos falando do seguinte processo:



Não calcularemos isto em detalhes (se estiver interessado, olhe a sec 6.1 do Peskin) - o importante é saber que, no limite em que os fotons emitidos tem pouco momento:

$$|\vec{k}| \ll |\vec{p}' - \vec{p}| = |\vec{q}|$$

podemos fazer a separação:

$$\hat{i}M = \hat{i}M_{el} \cdot f_r$$

fator que dá conta da emissão de 1 fóton
 amplitude do espalhamento elástico (sem emissão de fóton)
 amplitude total

na seção de choque ocorre algo semelhante

$$d\sigma(p \rightarrow p' + \gamma) = d\sigma(p \rightarrow p') \cdot \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k} \sum_{\lambda=1,2} e^2 \left| \frac{p' \cdot \epsilon^{(\lambda)}}{p' \cdot k} - \frac{p \cdot \epsilon^{(\lambda)}}{p \cdot k} \right|^2$$

polarizações do fóton
 densidade de probabilidade para emissão de um fóton com momento k

Esta probabilidade não pode ser integrada para qualquer k, precisamos respeitar a premissa de que k é pequeno colocando um limite superior na integral:

$$|\vec{k}| < |\vec{q}| = |\vec{p} - \vec{p}'|$$

Com um pouco de álgebra, conseguimos colocar a integral na forma:

$$P_{\text{prob}} \approx \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{|\vec{q}|} dk \frac{1}{k} I(\vec{v}, \vec{v}')$$

velocidades associadas a \vec{p}, \vec{p}'
 função que não depende de k
 probabilidade total de emitir um fóton com $0 < |\vec{k}| < |\vec{q}|$

Esta probabilidade diverge! Temos uma **infinita probabilidade de emitir um fóton de baixo momento** ("soft photons"). Este fato é conhecido como divergência infravermelha da QED. A regularização possível é novamente introduzir uma pequena massa para o fóton, neste caso obtemos:

$$\int_0^{|\vec{q}|} d|\vec{k}| \frac{1}{|\vec{k}|} = \int_0^{|\vec{q}|} \frac{d|\vec{k}|^2}{2|\vec{k}|^2} = \int_{\mu^2}^{|\vec{q}|^2 + \mu^2} \frac{dE^2}{2E^2} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{|\vec{q}|^2 + \mu^2}{\mu^2} \right)$$

No limite: $|\vec{q}|^2 \rightarrow \infty$ $\left\{ \begin{array}{l} |\vec{q}|^2 \approx -q^2 \end{array} \right.$ (Peskin pg 201)

queremos comparar com 128.1, onde também tomamos este limite. Isto significa olhar a região em que o elétron sofreu uma grande mudança de momento.

$$I(\vec{v}, \vec{v}') = 2 \ln \left(\frac{q^2}{m^2} \right) \approx 2 \ln \left(-\frac{q^2}{m^2} \right)$$

Assim, temos:

$$d\sigma(p \rightarrow p' + \gamma) \underset{-q^2 \rightarrow \infty}{\sim} d\sigma_0(p \rightarrow p') \cdot \frac{\alpha}{\pi} \ln\left(\frac{-q^2}{\nu^2}\right) \ln\left(-\frac{q^2}{m^2}\right)$$

(eq. 130.1)

que é a expressão que queríamos, comparemos isto com o que obtivemos em 128.1

$$(128.1) \rightarrow F_1(-q^2 \rightarrow \infty) = 1 - \frac{\alpha}{2\pi} \ln\left(-\frac{q^2}{m^2}\right) \ln\left(-\frac{q^2}{\nu^2}\right) + O(\alpha^2)$$

Que modifica a seção de choque de forma que:

$$d\sigma(p \rightarrow p') \underset{-q^2 \rightarrow \infty}{\sim} d\sigma_0(p \rightarrow p') \left[1 - \frac{\alpha}{\pi} \ln\left(\frac{-q^2}{\nu^2}\right) \ln\left(-\frac{q^2}{m^2}\right) + O(\alpha^2) \right]$$

$d\sigma \sim e^2 \rightarrow d\sigma \sim e^2 F_1^2 \sim \left[1 + 2 \frac{\alpha}{\pi} \ln \ln + \alpha^2 \ln^2 \ln + \dots \right]$

Vemos que, pelo menos até ordem α , a soma destas duas seções de choque está livre de divergências já que as contribuições se cancelam. Mas o que uma tem a ver com o outra? O fato é que, do ponto de vista prático, não faz muito sentido diferenciar "medi um elétron" de "medi um elétron + um fóton quase sem energia", até porque fótons de energia infinitamente pequena são objetos estranhos (sem momento, nem energia e nem massa). Qualquer medida vai ter uma sensibilidade máxima a fótons "soft", que podemos expressar em termos de uma energia limite E_ℓ , abaixo da qual o fóton não é observado. Assim, a seção de choque total de espalhamento de eletrons é dada por:

$$\frac{d\sigma_{\text{Exp}}}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega}(p \rightarrow p') + \frac{d\sigma}{d\Omega}(p \rightarrow p' + \gamma(\ell < E_\ell))$$

Se abandonamos o limite $-q^2 \rightarrow \infty$ obtemos:

A integral em k na página 42 é feita só até E_ℓ

$$\frac{d\sigma_{\text{Exp}}}{d\Omega} = \frac{d\sigma_0}{d\Omega} \left[1 - \frac{\alpha}{\pi} \ln\left(\frac{-q^2/m^2}{\nu^2}\right) P_{\text{IR}}(q^2) + \frac{\alpha}{\pi} \ln\left(\frac{E_\ell^2}{\nu^2}\right) P_{\text{IR}}(q^2) + \dots \right]$$

$$= \frac{d\sigma_0}{d\Omega} \left[1 - \frac{\alpha}{\pi} P_{\text{IR}}(q^2) \ln\left(\frac{-q^2/m^2}{E_\ell^2}\right) + O(\alpha^2) \right]$$

(eq. 130.2)

Onde já não temos mais μ , e podemos tomar o limite $\nu \rightarrow 0$ sem medo de divergências

É possível mostrar que este cancelamento ocorre para todas as ordens de perturbação (Peskin sec 6.5), neste caso a seção de choque medida é:

$$\frac{d\sigma_{\text{Exp}}}{d\Omega} = \frac{d\sigma_0}{d\Omega} \text{EXP} \left[-\frac{\alpha}{\pi} \ln(q^2) L_N \left(-\frac{q^2}{E_e^2} \right) \right]$$

Auto-energia do elétron

(Peskin 7.1)

Resta tratar a divergência ultravioleta do vértice elétron-elétron-fóton, veremos agora que ela está ligada às correções radiativas do propagador do elétron. Vamos a elas:

Primeiramente vale lembrar o resultado obtido na pag 92:

$$\int d^4x e^{iPx} \langle \Omega | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(0) | \Omega \rangle = i \frac{Z_2 (\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots$$

$$\langle \Omega | \psi(0) | p, s \rangle = \sqrt{Z_2} u^s(p)$$

↳ $m^2 = m_0^2 + \delta m^2$

↳ $1 + \delta Z_2$

Nosso objetivo é agora obter as contribuições perturbativas para Z_2 e m

$$\langle \Omega | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) \} | \Omega \rangle = \underbrace{\text{---} p \text{---}}_1 + \underbrace{\text{---} k \text{---} \text{---} p-k \text{---}}_2 + \dots$$

$$\frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} + \frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \left[-i \Sigma_2(p) \right] \frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon}$$

basicamente é a contribuição de ordem e^2 para um objeto análogo ao que chamamos de M^2 na pág 100

$$-i \Sigma_2(p) = (-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \frac{i(\not{k} + m_0)}{k^2 - m_0^2 + i\epsilon} \gamma_\mu \frac{-i}{(p-k)^2 - \mu^2 + i\epsilon}$$

"massa" do fóton no fim faremos: $\mu^2 \rightarrow 0$

↳ ordem perturbativa

Temos, novamente, que usar o maquinário desenvolvido para o cálculo de loops. A parametrização de Feynman fornece (já integrando em y com o uso da delta):

$$\frac{1}{k^2 - m_0^2 + i\epsilon} \frac{1}{(p-k)^2 - \mu^2 + i\epsilon} = \int_0^1 dx \frac{1}{[k^2 - 2xkp + x p^2 - x \mu^2 - (1-x)m_0^2 + i\epsilon]^2}$$